博士后文库
中国博士后科学基金资助出版

非线性发展方程的初值依赖问题

徐润章　杨延冰　著

科学出版社

博士后文库
中国博士后科学基金资助出版

非线性发展方程的初值依赖问题

徐润章　杨延冰　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了位势井理论的研究方法及其在具广义源项的波动方程和反应扩散方程、具多个异号源项的波动方程和反应扩散方程、具应变项的非线性波动方程、具色散项的强耗散波动方程、广义 Boussinesq 方程、强耗散粘弹性波动方程以及非线性抛物方程的适定性上的应用，同时深入地讨论了非线性发展方程的定解问题的初值与解的整体存在性及非存在性的关系.

本书可作为偏微分方程领域的博士研究生与青年科研工作者快速掌握位势井方法及其应用的参考书，也可作为对位势井方法感兴趣的读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非线性发展方程的初值依赖问题/徐润章，杨延冰著. —北京：科学出版社，2017.6

(博士后文库)

ISBN 978-7-03-053225-1

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①徐… ②杨… Ⅲ. ①非线性方程—研究 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 128435 号

责任编辑：胡庆家／责任校对：彭 涛
责任印制：张 伟／封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2017 年 6 月第一次印刷 印张：21 3/4
字数：421 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《博士后文库》序言

1985 年，在李政道先生的倡议和邓小平同志的亲自关怀下，我国建立了博士后制度，同时设立了博士后科学基金。30 多年来，在党和国家的高度重视下，在社会各方面的关心和支持下，博士后制度为我国培养了一大批青年高层次创新人才。在这一过程中，博士后科学基金发挥了不可替代的独特作用。

博士后科学基金是中国特色博士后制度的重要组成部分，专门用于资助博士后研究人员开展创新探索。博士后科学基金的资助，对正处于独立科研生涯起步阶段的博士后研究人员来说，适逢其时，有利于培养他们独立的科研人格、在选题方面的竞争意识以及负责的精神，是他们独立从事科研工作的“第一桶金”。尽管博士后科学基金资助金额不大，但对博士后青年创新人才的培养和激励作用不可估量。四两拨千斤，博士后科学基金有效地推动了博士后研究人员迅速成长为高水平的研究人才，“小基金发挥了大作用”。

在博士后科学基金的资助下，博士后研究人员的优秀学术成果不断涌现。2013 年，为提高博士后科学基金的资助效益，中国博士后科学基金会联合科学出版社开展了博士后优秀学术专著出版资助工作，通过专家评审遴选出优秀的博士后学术著作，收入《博士后文库》，由博士后科学基金资助、科学出版社出版。我们希望，借此打造专属于博士后学术创新的旗舰图书品牌，激励博士后研究人员潜心科研，扎实治学，提升博士后优秀学术成果的社会影响力。

2015 年，国务院办公厅印发了《关于改革完善博士后制度的意见》（国办发〔2015〕87 号），将“实施自然科学、人文社会科学优秀博士后论著出版支持计划”作为“十三五”期间博士后工作的重要内容和提升博士后研究人员培养质量的重要手段，这更加凸显了出版资助工作的意义。我相信，我们提供的这个出版资助平台将对博士后研究人员激发创新智慧、凝聚创新力量发挥独特的作用，促使博士后研究人员的创新成果更好地服务于创新驱动发展战略和创新型国家的建设。

祝愿广大博士后研究人员在博士后科学基金的资助下早日成长为栋梁之才，为实现中华民族伟大复兴的中国梦做出更大的贡献。

杨卫

中国博士后科学基金会理事长

前　　言

非线性发展方程因为强调对解关于时间性质的考察所以具有强烈的物理背景，并与现实世界紧密联系，一直是非线性偏微分方程研究的重要方向. 研究弱解 (广义解) 的适定性也成为现代偏微分方程理论研究的重要问题. 在众多影响解适定性的因素中，本书选定 “初值” 这样一个似乎被 “冷落” 的因素进行研究. 之所以说是被 “冷落”，倒并非该领域的研究不够热络，而是在我们考察解的适定性的过程中，当我们关注其他因素时，初值往往被一个很强的条件限制，比如小性条件，即要求初值要足够小. 而初值对解适定性的影响机制是什么样的？什么样的初值会导致解整体存在，又是什么样的初值导致解的有限时间爆破？这些都是很有趣的问题. 而本书正是基于这些问题展开，介绍在初值依赖问题的研究过程中用到的数学工具和研究范式，特别是位势井方法和相关估计技术.

本书从最基本的模型方程开始，不仅介绍处理不同非线性情况的技巧和结果，而且着重通过对不同模型方程的研究介绍不同的方程结构对问题的影响，更有趣的是，对于同一个模型着重从不同的能量级别来介绍初始能量对问题的影响. 第 1 章从最经典的半线性波动方程与热方程入手，着重介绍次临界能量下位势井理论的应用条件和具体过程；第 2 章将半线性波动方程与热方程的源项推广到一般情形，将单个位势井推广到位势井族并讨论临界能量问题；第 3 章将半线性波动方程与热方程的源项推广到幂指数组合的形式并全面讨论次临界、临界和超临界能量问题；第 4 章分别讨论具广义源的非线性应变波动方程与具耗散的非线性应变波动方程中应变项的作用；第 5 章讨论一系列波动方程中阻尼项的作用，这些阻尼包括线性强阻尼、线性弱阻尼、四阶方程中的强阻尼、具色散项的强阻尼；第 6 章分别研究四阶和六阶广义 Boussinesq 方程；第 7 章研究结构更复杂的具有强耗散的粘弹性波动方程；第 8 章重点针对热方程的高能问题介绍其研究框架.

在本书的撰写过程中，作者的研究生为书稿的校对和修改做了很多工作. 刘杰整理校对第 2 章，张明有整理校对 5.1 节，牛屹整理校对第 8 章，文国均整理校对第 1 章，王兴昌整理校正本书的格式. 同时徐正生、李佳恒、陈天龙、李珊珊也对很多部分进行了修改. 另外，中国科学院数学与系统科学研究院曹道民教授为书稿提出了很多修改建议，哈尔滨工程大学理学院沈继红教授给出了很多建设性建议，书稿修改之际正值作者应辛周平教授邀请访问香港中文大学数学科学研究所，在此

一并致谢.

由于作者学识有限, 书中难免疏漏之处, 敬请读者多提宝贵意见.

作　者
2017 年 1 月

目　　录

第 1 章　非线性发展方程及位势井方法

1.1　非线性发展方程的性质及研究意义

存在非平衡约束是系统有序演化的外部源泉. 外因要通过内因起作用. 在弱小约束下, 展开式中的线性项在系统中起主导作用, 非线性项的影响受到抑制. 随着约束增大, 离开平衡态的距离相应增大, 线性项的影响逐步减弱, 非线性项的影响逐步显示, 直到取得支配地位. 从系统内部机制看, 非线性区不可能出现新的有序结构, 这与非线性因素居主导地位有关. 远离平衡态之所以是形成耗散结构的必要条件在于只有施加这样的强约束才能抑制线性因素的影响, 使非线性因素充分展现出来. 而这必须使用动力学方法.

线性相互作用使系统偏离定态后要么逐渐回归均匀定态, 要么无限发散下去, 因而不可能出现有序演化行为. 要形成耗散结构, 系统本身应有一种机制, 当它偏离均匀定态后能阻止它回归定态, 这就是使均匀定态失稳的机制. 同时还要有另一种机制, 当均匀定态失稳后, 能使系统不会无限发散, 保证它趋向于一个新的稳定态. 线性系统可以有第一种机制, 但不可能有第二种机制. 非线性系统有可能同时具有这两种机制. 在控制参数越过临界值后, 均匀态失去稳定性, 但由于系统内部存在相互制约的不同因素, 把系统行为限制在一个有限范围内, 最后到达某个稳定的极限环上.

造成系统非线性特性的因素是多方面的, 一个重要方面是系统内部有非线性反馈机制, 另一方面是外部的非线性因素的影响.

动力学系统发展方程 (evolution equation)常用来描述系统的数学形态. 发展方程, 又称演化方程或进化方程, 广义地说, 是包含时间参数的许多重要的数学物理偏微分方程的统称, 在物理、力学或其他自然科学中用来描述随时间而演变的状态或过程. 线性系统的动力学方程, 即线性发展方程, 只要初值适当光滑, 其 Cauchy 问题的解也必具有适当的光滑性, 而且在整个半空间上是全局存在的. 但对于非线性发展方程, 情况就根本不同了. 一般地, 非线性发展方程 Cauchy 问题的全局古典解通常只能在时间的一个局部范围存在, 即使对充分光滑甚至还充分小的初值也是如此; 相应地, 解在有限时间内失去正规性, 而产生奇性 (singularity) , 或者说, 解或解的某些导数的模当 $t \to T$ (T 为有限数) 时趋于无穷. 这一现象称为解的爆破 (blowup). 有大量的非线性发展方程的定解问题在某些条件下是不存在整体解的, 而且若存在局部解, 局部解的某种模也在有限时间内趋于无穷大, 即发生有限时间

爆破. 下面, 以一个常微分方程的初边值问题说明这个问题. 考虑如下常微分方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v^2, & t \geqslant 0, \\ t = 0, & v = v_0, \end{cases}$$

不难求出此问题的解为

$$v = \frac{v_0}{1 - v_0 t}.$$

设 $v_0 > 0$, 则当 $t \to \dfrac{1}{v_0}$ 时, $v \to +\infty$. 这说明若 $v_0 > 0$, 则此问题的解只在 $0 \leqslant t < t_0 = \dfrac{1}{v_0}$ 上存在. 而且当 $t \to t_0$ 时, $v \to +\infty$. 研究证明, 对大量非线性发展方程, 也有类似的现象. 因此非线性发展方程的古典解的全局存在性一般是无法保证的, 这是区别于线性发展方程的一个重要特点. 但初始条件的模相当小时, 又可得到它的全局解. 由此可以看到, 对非线性发展方程而言, 考虑下面两方面的问题是相辅相成的:

(1) 在何种条件下, 所考察的非线性发展方程的定解问题 (包括 Cauchy 问题、各种混合初边值问题及自由边界问题等) 存在着唯一的全局古典解. 并在此基础上研究解的全局性态, 特别是当 $t \to \infty$ 时的渐近性态.

(2) 在何种条件下, 所考察的非线性发展方程的定解问题不存在全局古典解, 而必在有限时间内发生爆破. 并在此基础上深入考察解在爆破点的性态, 例如, 究竟是解的本身还是解的某一阶导数首先发生爆破, 解在爆破点的奇性特征以及爆破点集的性质等.

研究这两方面的意义是很明显的. 对一些重要数学物理方程解的全局性态 (如解的稳定性等) 的研究以及有关的数值求解方法的讨论, 都要以解的全局存在性为前提. 另外, 如果发现解会在有限时间内爆破, 而这种爆破的性态不是相应的物理模型所允许的, 就反过来说明所归结的数学模型有问题, 而必须加以修改; 如果这种爆破的性态是相应的物理模型允许的, 由于相应的物理过程决不会终止于某一时刻, 必定要继续发展, 则就必须在一个更广的函数类中考察问题的解 (例如, 空气动力学方程组, 就要考虑到出现激波的可能性, 而在包含间断性的函数类中求解).

非线性发展方程的基本问题之一是研究各种初边值问题的解的存在性, 而退化的和其他奇性的方程一般都不具有古典解. Sobolev 空间的引入为求解初边值问题提供了有效的途径. 研究这类方程的第一步就是选取适合于方程特点的 Sobolev 空间或其他类型的函数空间来定义广义解, 在较为广泛的函数类中寻求方程的解, 比直接求古典解容易得多. 如果在这样选取的函数空间中, 解不仅是存在的而且是唯一的, 那么这就是一个理想的函数空间. 在得到弱解后, 再进一步讨论这些解是否

具有更高的光滑性, 是否也是古典解, 这就是所谓的正则性问题. 无论是理论上还是应用上总是希望能找到使解唯一的最弱的函数空间, 同样也希望知道解最好的正则性如何, 函数空间的选取还用于对各种逼近问题作必要的先验估计, 也是进一步研究解的性质的基础.

1.2 具有正定能量的非线性发展方程

1.2.1 半线性波动方程

本小节主要研究半线性波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+|u|^{h-1}u=0, & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0, & t\in\mathbb{R}^+,\ \Omega\subset\mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

在指标 h 满足条件:

$$(\mathrm{H}_1)\qquad \begin{cases} \text{(i) } 1<h<\infty, & n=1,2, \\ \text{(ii)} 1<h\leqslant\dfrac{n+2}{n-2}, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

下的弱解的存在性及在 h 满足条件:

$$(\mathrm{H}_2)\qquad \begin{cases} \text{(i) } 1<h<\infty, & n=1,2, \\ \text{(ii)} 1<h\leqslant\dfrac{n}{n-2}, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

下的强解的存在性与唯一性, 其中 Ω 为全空间 $\mathbb{R}^n$ 上的有界域, $\partial\Omega$ 为 Ω 的光滑边界, $u_0(x)$ 为连续且非负的初始值.

本小节首先利用 Galerkin 方法构造问题 (1.1) 的近似解; 然后利用近似解的收敛性得到弱解的存在性; 最后, 结合弱解的结论和给定初值的条件这样的情形用分析的方法和一些不等式证明强解的存在性和唯一性.

定义 1.2.1 称 $u=u(x,\ t)$ 为问题 (1.1) 于 $\Omega\times[0,\ T)$ 上的强解, 若

$$u\in L^\infty(0,\ T;H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)),$$

$$u_{tt}\in L^\infty\left(0,\ T;L^2(\Omega)\right),$$

对于所有的 $t\in[0,\ T)$ 成立

$$(u_{tt}-\Delta u+|u|^{h-1}u,\ v)=0,\quad \forall v\in L^2(\Omega)$$

且

$$u(x,\ 0)=u_0(x)\in H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega),$$

$$u_t(x,\ 0) = u_1(x) \in L^2(\Omega).$$

设 $\{w_j(x)\}$ 为满足 $\Delta w + \lambda w = 0,\ w|_{\partial\Omega} = 0$ 的特征函数系, 构造问题 (1.1) 的近似解

$$u_m(x,\ t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x),\quad m = 1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 $g_{jm}(t)$ 满足

$$(u_{mtt} - \Delta u_m + |u_m|^{h-1} u_m,\ w_s) = 0,\quad s = 1,\ 2, \cdots,\ m. \tag{1.2}$$

引理 1.2.1 *设 h 满足 (H_1) 且 $\{\omega_j(x)\}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 的一个基础函数系, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界域. 若选取 $a_{jm}(t)$, $b_{jm}(t)$, 使得*

$$u_m(x,\ 0) = \sum_{j=1}^{m} a_{jm}(t) w_j(x) \to u_0(x) \ \in\ H_0^1(\Omega), \tag{1.3}$$

$$u_{mt}(x,\ 0) = \sum_{j=1}^{m} b_{jm}(t) w_j(x) \to u_1(x) \ \in\ L^2(\Omega), \tag{1.4}$$

则有

$$\|u_{mt}\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 \leqslant E_1,\quad 0 \leqslant t < \infty.$$

证明 以 $g'_{sm}(t)$ 乘 (1.2) 两边并关于 x 在 Ω 上积分, 则有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{mtt} w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u_m w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x\\&+ \int_\Omega |u_m|^{h-1} u_m w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

再对 $s = 1,\ 2, \cdots,\ m$ 求和得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{mtt} \sum_{s=1}^{m} w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u_m \sum_{s=1}^{m} w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x\\&+ \int_\Omega |u_m|^{h-1} u_m \sum_{s=1}^{m} w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

由近似解定义可知

$$\int_\Omega u_{mtt} u_{mt}\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u_m u_{mt}\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_m|^{h-1} u_m u_{mt}\mathrm{d}x = 0. \tag{1.5}$$

上式的第二项 $\int_\Omega \Delta u_m u_{mt}\mathrm{d}x$ 可利用格林第一公式, 有

$$\int_\Omega \Delta u_m u_{mt}\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u_{mt} \frac{\partial u_m}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mt}\mathrm{d}x.$$

由 $u|_{\partial\Omega}=0$ 有

$$\int_\Omega \Delta u_m u_{mt}\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mt}\mathrm{d}x,$$

则 (1.5) 变为

$$\int_\Omega u_{mtt}u_{mt}\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mt}\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m u_{mt}\mathrm{d}x = 0,$$

即

$$(u_{mtt},\ u_{mt}) + (\nabla u_m,\ \nabla u_{mt}) + (|u_m|^{h-1}u_m,\ u_{mt}) = 0.$$

上式亦可写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t\int_\Omega u_{mtt}u_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^t\int_\Omega \nabla u_m \nabla u_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \int_0^t\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m u_{mt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) = 0.$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega\int_0^t u_{mt}\mathrm{d}u_{mt}\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_0^t \nabla u_m \mathrm{d}\nabla u_m\mathrm{d}x \right.$$
$$\left. + \int_\Omega\int_0^t |u_m|^{h-1}u_m\mathrm{d}u_m\mathrm{d}x\right) = 0.$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega \frac{1}{2}u_{mt}^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{2}\nabla u_m^2\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{1}{h+1}|u_m|^{h-1}u_m^2\mathrm{d}x\right) = 0.$$

由内积与范数定义知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{h+1}\|u_m\|_{h+1}^{h+1}\right) = 0.$$

对上式关于 t 从 0 到 t 积分, 有

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|^2 + \frac{1}{h+1}\|u_m\|_{h+1}^{h+1}$$
$$= \frac{1}{2}\|u_{mt}(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2 + \frac{1}{h+1}\|u_m(0)\|_{h+1}^{h+1}. \tag{1.6}$$

由 (1.3) 与 (1.4), 以及 $\{w_j(x)\}$ 的正交完备性知: 因 $u_1(x)\in L^2(\Omega)$, 故 $\|u_1(x)\|$ 有界, 进而 $\|u_{mt}(0)\|$ 对充分大的 m 有界; $\|\nabla u_m(0)\|$ 与 $\|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}$ 互为等价模, 而 $u_0(x)\in H_0^1(\Omega)$, 故 $\|u_0(x)\|$ 有界, 进而 $\|\nabla u_m(0)\|$ 对充分大的 m 有界, 于是有

$\frac{1}{2}\|u_{mt}(0)\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2$ 对充分大的 m 有界.

关于 $\|u_m(0)\|_{h+1}^{h+1}$ 的范围, 讨论如下:

下面利用 Sobolev 嵌入定理, 即 $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$, 对于式 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{h+1}(\Omega)$, W 的上指标为 $k=2$, $p=1$, 即 $kp=2$. 于是

(1) 当 $n\geqslant 3$ 时, 满足 $kp<n$, 只要 $p=2\leqslant q\leqslant \frac{np}{n-kp}$, 即

$$2\leqslant q=h+1\leqslant \frac{2n}{n-2},$$

就可运用 Sobolev 空间嵌入定理对 $\|u_m(0)\|_{h+1}$ 进行约束, 空间嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{h+1}(\Omega)$, 从而得到 $1\leqslant h\leqslant \frac{n+2}{n-2}$, 又因 $h>1$, 故有 $1<h\leqslant\frac{n+2}{n-2}$.而当 $1<h<\frac{n+2}{n-2}$ 时嵌入是紧的.

(2) 当 $n=1, 2$ 时, 满足 $n<kp$, 只需 $p=2\leqslant q=h+1\leqslant\infty$, 即 $1\leqslant h\leqslant\infty$, 就可运用 Sobolev 空间嵌入定理对 $\|u_m(0)\|_{h+1}$ 进行约束, 空间嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{h+1}(\Omega)$, 因 $h>1$, 进而有 $1<h\leqslant\infty$. 而当 $1<h<\infty$ 时嵌入是紧的.

对于以上两种情形, $\|u_m(0)\|_{h+1}\leqslant C_*\|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}$, C_* 是与 p, k, Ω 有关的常数. 并且由 (1.3) 知 $u_m(x,0)\in H_0^1(\Omega)$, $\|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)}$ 对充分大的 m 有界, 因此可以对 $\|u_m(0)\|_{h+1}$ 进行约束. 可知 $\|u_m(0)\|_{h+1}^{h+1}$ 对充分大的 m 有界. 于是, 有

$$\|u_{mt}\|^2+\|\nabla u_m\|^2\leqslant E_1,\quad 0\leqslant t<\infty.$$

证毕.

引理 1.2.2 设 h 满足 (H_2) 且 $\{\omega_j(x)\}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 的一个基础函数系, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的有界域. 若选取 $a_{jm}(t)$, $b_{jm}(t)$, 使得

$$u_m(x,0)=\sum_{j=1}^{m}a_{jm}(t)w_j(x)\to u_0(x)\in H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega), \tag{1.7}$$

$$u_{mt}(x,0)=\sum_{j=1}^{m}a_{jm}(t)w_j(x)\to u_1(x)\in H_0^1(\Omega), \tag{1.8}$$

则有

$$\|\nabla u_{mt}\|^2+\|\Delta u_m\|^2\leqslant E_2,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

证明　以 $\lambda_s g'_{sm}(t)$ 乘 (1.2) 两边并在 Ω 上积分, 有

$$\int_\Omega u_{mtt}\lambda_s w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta u_m\lambda_s w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x$$
$$+\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m\lambda_s w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x=0.$$

由 $\{w_j(x)\}$ 为满足 $\Delta w+\lambda w=0,\ w|_{\partial\Omega}=0$ 的特征函数系, 知 $\lambda_s w_s=-\Delta w_s$, 代入原方程, 有

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega u_{mtt}\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x+\int_\Omega \Delta u_m\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

再对 $s=1,\ 2,\cdots,\ m$ 求和得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{mtt}\sum_{s=1}^m\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta u_m\sum_{s=1}^m\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x\\&+\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m\sum_{s=1}^m\Delta w_s g'_{sm}(t)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

由 $u_m(x,\ t)=\sum\limits_{s=1}^m g_{sm}(t)w_s(x),\quad s=1,\ 2,\cdots,$ 得

$$\Delta u_{mt}=\sum_{s=1}^m g'_{sm}(t)\Delta w_s(x)=-\sum_{s=1}^m g'_{sm}(t)\lambda w_s(x).$$

故上式变为

$$\int_\Omega u_{mtt}\Delta u_{mt}\mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta u_m\Delta u_{mt}\mathrm{d}x+\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m\Delta u_{mt}\mathrm{d}x=0. \tag{1.9}$$

对 (1.9) 的首项 $\int_\Omega u_{mtt}\Delta u_{mt}\mathrm{d}x$ 利用格林第一公式, 得

$$\int_\Omega u_{mtt}\Delta u_{mt}\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} u_{mtt}\frac{\partial u_{mt}}{\partial n}\mathrm{d}s-\int_\Omega \nabla u_{mtt}\nabla u_{mt}\mathrm{d}x.$$

而 $u_{mtt}=\sum\limits_{s=1}^m g''_{sm}(t)w_s(x)$, 且有 $w_s(x)|_{\partial\Omega}=0$, 知

$$\int_{\partial\Omega} u_{mtt}\frac{\partial u_{mt}}{\partial n}\mathrm{d}s=0,$$

即有

$$\int_\Omega u_{mtt}\Delta u_{mt}\mathrm{d}x=-\int_\Omega \nabla u_{mtt}\nabla u_{mt}\mathrm{d}x.$$

故 (1.9) 变为

$$-\int_\Omega \nabla u_{mtt}\nabla u_{mt}\mathrm{d}x-\int_\Omega \Delta u_m\Delta u_{mt}\mathrm{d}x+\int_\Omega |u_m|^{h-1}u_m\Delta u_{mt}\mathrm{d}x=0,$$

即

$$\int_{\Omega} \nabla u_{mtt} \nabla u_{mt} \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \Delta u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x = \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x.$$

进行变换

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega}\int_0^t \nabla u_{mtt} \nabla u_{mt} \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{\Omega}\int_0^t \Delta u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}t\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega}\int_0^t \nabla u_{mt} \mathrm{d}\nabla u_{mt} \mathrm{d}x + \int_{\Omega}\int_0^t \Delta u_m \mathrm{d}\Delta u_m \mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Omega} \frac{1}{2} \nabla u_{mt}^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \Delta u_m^2 \mathrm{d}x\right) = \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x.$$

利用内积和范数定义, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|\nabla u_{mt}\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u_m\|^2\right) = \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

下面讨论上式的最后一项, 注意到

$$\int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x = \left(|u_m|^{h-1} u_m,\ \Delta u_{mt}\right).$$

利用格林第一公式, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \Delta u_{mt} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \frac{\partial u_{mt}}{\partial n} \mathrm{d}s - \int_{\Omega} \nabla\left(|u_m|^{h-1} u_m\right) \nabla u_{mt} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \frac{\partial u_{mt}}{\partial n} \mathrm{d}s - h \int_{\Omega} |u_m|^{h-1} \nabla u_m \nabla u_{mt} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因 $\omega_s|_{\partial\Omega} = 0$, 故 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 于是

$$\int_{\partial\Omega} |u_m|^{h-1} u_m \frac{\partial u_{mt}}{\partial n} \mathrm{d}s = 0,$$