21世纪海上丝绸之路智库丛书

基于均值和风险的投资组合选择

姚海祥　李仲飞　马庆华　著

科学出版社

21世纪海上丝绸之路智库丛书

基于均值和风险的投资组合选择

姚海祥　李仲飞　马庆华　著

科学出版社

内 容 简 介

本书以均值-风险框架为主线，展开投资组合选择和风险管理的研究，是近年来作者在该领域的部分研究工作的总结。本书基于方差、VaR 及 CVaR 等风险度量方法，研究了最低投资比例约束、限制最大损失、不确定终止时间、随机市场环境、奇异协方差矩阵、不同借贷利率、破产风险控制等各种现实条件下静态和动态的均值-风险投资组合选择问题，同时也采用了前沿的非参数估计方法研究了投资组合选择问题，实现金融风险的测算与投资组合优化的同时进行。

本书可作为在金融工程、金融数学和金融风险管理等相关领域从事科研工作的教师、科研人员和研究生的参考用书，也可作为金融业界从业人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

基于均值和风险的投资组合选择/姚海祥，李仲飞，马庆华著. —北京：科学出版社，2017.6

（21 世纪海上丝绸之路智库丛书）

ISBN 978-7-03-053470-5

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①姚… ②李… ③马… Ⅲ. ①组合投资-研究 Ⅳ. ①F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 137221 号

责任编辑：刘英红 / 责任校对：贾娜娜
责任印制：吴兆东 / 封面设计：华路天然工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 6 月第一次印刷 印张：8 1/4
字数：200 000

定价：48.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

投资组合选择（或称资产配置）是个人、家庭、金融机构、企业乃至国家在实际生活中经常遇到的现实问题，也是金融学科研究领域具有基础性地位的重大理论问题。投资组合选择问题的研究始于 Markowitz（1952）建立的均值-方差模型。此后，他所建立的均值-方差模型成为现代投资组合选择研究领域的标准框架之一（另一类研究框架是期望效用模型）。在均值-方差模型基础上衍生出了资本资产定价模型（capital asset pricing model，CAPM）、套利定价理论（arbitrage pricing theory，APT）及因子定价模型等资产定价模型，所以，投资组合选择问题是资产定价的理论基础。另外，在实践应用上，投资组合选择模型是各种重要量化投资策略的理论依据，随着我国近年来金融市场和金融产品的发展，量化投资必将继续成为学术界和业界的热点问题。所以投资组合选择问题在我国将具有广阔的应用前景。同时，随着我国证券业和保险业的迅速发展，金融业逐步实现与国际接轨并参与国际竞争，金融市场的迅速发展和金融服务业对外开放力度的不断加大，金融业面临新的机遇和挑战，金融风险正成为我们面临的大问题。例如，2007～2008年的美国次贷危机即由次级按揭贷款所引发的金融危机，进而引起美国和全球范围经济危机；我国股市 2015 年 6～7 月出现“千股跌停”“千股涨停”“流动性枯竭”事件。这些历史事件都在警告我们，如果不掌握现代风险管理技术，就可能在金融竞争中蒙受重大损失。如何在金融资产配置中规避风险不仅是投资者所关心的问题，同时也是政府部门所关心的问题，它对维护经济和社会的繁荣稳定都发挥着重要作用。

风险管理的首要核心是如何对风险进行度量和估算，传统的风险度量是 Markowitz（1952）建立均值-方差模型时提出的方差。但理论和实践都表明方差并不是有效的风险度量方法，因为它们同等对待上、下方偏差。近年来

学者们提出了许多有效的下方风险度量方法，如下偏矩、VaR（value at risk）和 CVaR（conditional VaR）等。所以本书除了采用方差度量风险，也采用了 VaR 和 CVaR 这些前沿风险度量方法研究投资组合选择问题。

本书的另外一个特色和创新之处是采用了非参数估计方法对投资组合选择问题开展了研究。以往的资产配置和风险管理的研究大多是在资产收益率服从某种特定分布类型（如正态分布）或某种特定的随机过程模型（如几何布朗运动）的假定下进行的。但当事先假定的分布类型不正确时，会导致研究结论并不能真实反映客观实际，造成很大的误差。非参数估计方法不需事先设定要估计的模型具有某种特定形式，建模和估计结果完全由样本数据驱动，避免了参数模型带来的人为偏差。

本书基于方差、VaR 及 CVaR 等风险度量方法，研究了各种现实条件下静态和动态的均值-风险投资组合选择问题，同时也采用了非参数估计方法研究了投资组合选择问题，具体内容主要包括如下几个方面。

（1）最低投资比例约束下的均值-方差投资组合选择问题。首先，利用传统的均值-方差模型研究了具有最低投资比例约束时的证券投资组合选择问题，得到了模型前沿（组合）边界及有效边界存在的充要条件。其次，给出了确定前沿边界及有效边界解析表达式的有效指标集法，该方法是一种解析分析法，可以精确且快速地确定有效边界的解析表达式。研究表明，此时组合边界及有效边界是由有限段抛物线相互平稳联结而成的。由于不允许买空只是最低投资比例约束的一种特殊情形，利用本章结论容易得到不允许买空时的均值-方差有效投资组合和有效边界的解析表达式，并且得到有效边界的构成特性和几何特征。

（2）限制最大损失时的均值-方差投资组合选择问题。在有限自然状态市场环境下，利用经典的均值-方差模型研究了在最坏的情形下资产组合损失不超过某个预先给定的边界时的投资组合选择问题。首先，指出含有无风险资产与不含有无风险资产两种情形模型的求解本质上是一样的。其次，将其作为代表研究了 n 种风险资产在限制最大损失时的前沿边界与有效边界存在的充要条件及其本质特征，根据这些结论给出了确定前沿边界及有效边界解析表达式的具体方法和步骤。研究表明，此时前沿边界及有效边界还是由有限段抛物线相互平稳联结而成的。需要指出的是，我们提出的求解方法对任意线性不等式（组）约束同样适用，如不允许买空、最低投资下界、投资上下界等具有线性不等式约束形式的情形，并且得到了有效边界的构成特性和几何特征。

（3）不确定终止时间和随机市场环境下的多阶段均值-方差投资组合选择问题。在随机市场环境和不确定投资终止时间双重不确定因素下，考虑了

多阶段均值-方差投资组合选择问题，其中假定随机市场环境只有有限个自然状态，且各自然状态的转移过程为马尔可夫链。首先，利用 Lagrange 对偶定理把原均值-方差问题转化为一个含有 Lagrange 乘子但满足可分性的多阶段最优化问题。其次，采用动态规划方法进行求解，得到模型的有效投资策略及有效边界的显式表达式，接着给出并证明了两基金分离定理。最后，为说明研究结论及应用，给出了一个算例。

（4）仅含风险资产时的连续时间均值-方差投资组合选择问题。以往关于连续时间均值-方差模型的研究都是假定市场含有一种无风险资产，我们考虑了任意 $n+1$ 种资产可以全是风险资产的更一般情形，建立了关于终端财富的连续时间均值-方差模型。利用 Lagrange 对偶定理和动态规划的方法，得到了连续时间均值-方差模型的有效投资策略及有效边界的解析表达式，并进一步把结论拓展到关于终端财富增长倍数的情形，证明了连续时间均值-方差模型的两基金分离定理是成立的。研究表明，即使市场上不存在无风险资产，在适当的条件下，我们仍然可以构造出无风险财富过程，使得全局最小方差为零且有效边界在均值-标准差平面上是一条直（射）线。数值算例还表明含有与不含有无风险资产两种情形连续时间均值-方差模型的有效边界不再相切。

（5）任意收益率分布和奇异协方差矩阵下的均值-风险投资组合选择问题。基于任意风险度量方法及任意收益率分布下，利用无套利均衡分析的方法研究了奇异协方差矩阵时的投资组合选择问题，得到了均值-风险模型有效边界的本质特征，证明了 n 种资产组合的有效边界相当于其一极大线性无关组的有效边界或相当于无风险资产与其一极大线性无关组的有效边界，并给出了极大线性无关组的确定方法及表示系数的求解方法，最后根据这些结论提出了有效的、操作性强的投资策略。我们的创新在于巧妙地引入了随机变量组的线性相关、线性无关、线性表示等概念，这些概念有助于把所有资产组合收益率看成一个线性空间，从而得到了当协方差矩阵奇异时的这个组合收益率空间（线性空间）的本质特征和结构，而且这些本质特征和结构不依赖于资产收益率服从的分布和风险度量方法的选择。

（6）不同借贷利率下基于均值和 VaR 效用最大化的投资组合选择问题。利用 VaR 方法代替方差来度量风险，从而把基于均值和方差的效用函数拓展为基于均值和 VaR 的一般二元效用函数（关于均值递增、关于 VaR 递减），进而基于效用最大化模型研究了含有无风险资产但具有不同借贷利率时的投资组合选择问题。利用均值-VaR 模型有效边界的性质，得到了一般凹效用函数下最大效用存在的条件及最优解的本质特征，并给出了求解的具体方法和数值算法。最后作为结论的直接应用和说明，给出了一个算例分析。

（7）基于非参数估计方法的均值-CVaR 投资组合选择问题。利用 CVaR 方法代替方差或 VaR 来度量风险，采用非参数估计方法来计算风险 CVaR，研究了均值-CVaR 投资组合优化问题。首先，根据 CVaR 的定义基于损失分布的密度函数及积累函数的非参数核（kernel）估计得到了 CVaR 的非参数计算公式，并把它嵌入到均值-CVaR 投资组合优化模型中。其次，在给定均值为 u 的条件下得到了求解最小 CVaR 的数值算法。最后，为了说明研究结果的可行性及有效性，通过蒙特卡罗数值模拟实验给出了一个数值算例。数值算例结果表明：采用本章介绍的非参数估计方法求解均值-CVaR 模型优于采用 Rockfeller 和 Uryasev（2000，2002）提出的线性规划方法。非参数估计方法的优点是不需要事先对分布类型进行假定，对先验信息的要求非常低（Li and Racine，2007），可以适应变幻莫测的金融市场。

（8）破产风险约束下对数效用最大化的投资组合选择问题。假定投资者符合对数效用函数，利用非参数估计方法和期望效用最大化模型研究了一个具有破产风险约束的投资组合选择问题。首先，我们利用组合收益率密度函数的非参数核估计得到了期望效用函数的计算公式。其次，把它嵌入到期望效用最大化投资组合选择模型中，并给出了求解最大期望效用的序列二次规划算法。最后，基于中国股票市场真实数据给出了一个数值算例。非参数估计方法的优点在于不需要事先对分布类型进行假定，对先验信息的要求非常低（Li and Racine，2007），可以适应变幻莫测的金融环境。

最后，加拿大劳里埃大学（Wilfrid Laurier University）Yongzeng Lai 教授和广东工业大学陈树敏副教授同本书作者有密切的合作，他们分别参与了本书第八章和第五章的研究和讨论。作者在此一并向他们表示感谢！此外，本书的研究成果及出版得到了国家自然科学基金项目（71471045，71231008）、广东省高水平大学重点学科建设项目“服务 21 世纪海上丝绸之路重大战略需求的经管学科融合创新体系建设”、广东省青年珠江学者高层次人才项目、广东省自然科学基金研究团队项目（2014A030312003）、中国博士后科学基金特别资助项目（2015T80896）、中国博士后科学基金面上项目（2014M560658）、广州市哲学社会科学规划项目（14G42）、广东省普通高校特色创新项目（人文社科类）、教育部人文社会科学研究规划基金项目（15YJAZH051）及广东外语外贸大学出版资助项目的资助，在此表示衷心感谢！

由于时间仓促，本书难免存在疏漏之处，欢迎读者批评指正。

姚海祥　李仲飞　马庆华

2017 年 1 月 15 日

目　录

第一章 绪 论

第一节 研究背景

随着我国证券业和保险业迅速发展，金融业逐步实现与国际接轨并参与国际竞争。特别是我国加入世界贸易组织（World Trade Organization，WTO）后，金融市场的迅速发展和金融服务业对外开放力度的不断加大，金融业面临新的机遇和挑战，金融风险正成为我们面临的大问题。例如，大家所热烈讨论的美国次贷危机即由次级按揭贷款所引发的金融危机，引起美国和全球范围的又一次经济危机。在我国也出现了一系列重大的金融风险暴露事件，如“中储棉”事件、“国储铜”事件等，给国家造成数百亿元的巨大损失。这些事件都在警告我们，如果不掌握现代投资决策理论和风险管理技术，就可能在国际金融竞争中蒙受重大损失。

我国股市自从 1990 年 12 月 19 日在上海证券交易所开业以来几经大起大落，充分暴露了中国证券市场的巨大风险。如何在证券市场中规避风险不仅是投资者所关心的问题，同时也是政府部门关心的问题，它对维护经济和社会的繁荣稳定都发挥着重要的作用。现代投资组合选择和风险管理理论则是解决这一问题的有力工具。

第二节 相关投资组合选择和风险管理模型简介

目前关于投资组合选择的研究主要以 Neumann 和 Morgenstern（1944）

开创的期望效用最大化模型及 Markowitz（1952）开创的均值-方差模型（后来发展为更一般的均值-风险模型）为基础进行展开。

一、基于期望效用最大化模型的投资组合选择研究

Neumann 和 Morgenstern（1944）建立了用期望效用函数来描述个人偏好的理论基础，使得采用期望效用最大化方法来研究经济金融中的不确性决策问题成为可能。Cass 和 Stiglitz（1970）利用期望效用最大化模型研究了静态情形的资产配置问题，得到了基金分离定理成立的充要条件。设市场上 n 种证券（可以含有一种无风险资产）的收益率为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，投资组合为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，则组合收益率为 $\xi_p=\sum_{i=1}^{n}w_i\xi_i$。令

$$\Pi=\left\{W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}\left|\sum_{i=1}^{n}w_i=1,\forall w_1,w_2,\cdots,w_n\in\mathbb{R}\right.\right\},$$

则期望效用最大化投资组合选择模型可表示为

$$\max_{W\in\Pi}E[U(\xi_p)], \tag{1.1}$$

其中，$U(\bullet)$ 为投资者偏好所对应的效用函数。为了保证最优解存在，$U(\bullet)$ 通常要满足某些数学性质，如凹性和单调性。

但现实中，投资是一个多阶段或连续时间的动态过程，而且投资者在投资的过程中还要考虑消费。为此，Samuelson（1969）和 Merton（1969，1971）建立了关于消费和最终财富的效用函数，分别利用离散时间和连续时间模型研究了使一生中效用最大化的最优投资策略问题。

设市场上有 $n+1$ 种资产，在时刻 k 的收益率向量为 $e_k=(e_k^0,e_k^1,e_k^2,\cdots,e_k^n)^{\mathrm{T}}$。投资者从时刻 0 进入市场，初始财富为 x_0，进行为期 T 个阶段的投资活动，他在时刻 k 拥有的财富为 x_k，消费水平为 c_k，把余下的财富 (x_k-c_k) 按比例 π_k^i 投资在第 i 种资产上（$i=1,2,\cdots,n$），则投资在第 0 种资产的比例为 $1-\sum_{i=1}^{n}\pi_k^i$，从而下一期的财富为

$$x_{k+1}=(x_k-c_k)\left(\left(1-\sum_{i=1}^{n}\pi_k^i\right)e_k^0+\sum_{i=1}^{n}\pi_k^ie_k^i\right)=(x_k-c_k)(e_k^0+P_k^{\mathrm{T}}\pi_k),$$

其中，$P_k=(e_k^1-e_k^0,e_k^2-e_k^0,\cdots,e_k^n-e_k^0)^{\mathrm{T}}$，$\pi_k=(\pi_k^1,\pi_k^2,\cdots,\pi_k^n)^{\mathrm{T}}$。则有限时域 $[0,T]$ 上多阶段的消费-投资期望效用最大化模型为

$$\begin{cases} \max\limits_{\{c_k,\pi_k\}} E\left[\sum\limits_{k=0}^{T}(1+\rho)^{-k}U(c_k)+B(x_T)\right], \\ \text{s.t. } x_{k+1}=(x_k-c_k)(e_k^0+P_k^{\mathrm{T}}\pi_k), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$U(\cdot)$和$B(\cdot)$为即时消费效用函数和终端财富效用函数；ρ为时间偏好率。

无限时域的多阶段的消费-投资期望效用最大化模型为

$$\begin{cases} \max\limits_{\{c_k,\pi_k\}} E\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1+\rho)^{-k}U(c_k)\right], \\ \text{s.t. } x_{k+1}=(x_k-c_k)(e_k^0+P_k^{\mathrm{T}}\pi_k)。 \end{cases} \tag{1.3}$$

下面我们介绍连续时间消费-投资期望效用最大化模型(不着重于数学上严格描述，只从形式上作介绍)。设市场上有$n+1$种资产，第0种为无风险资产，其余的为风险资产，其价格分别为$P_0(t),P_1(t),\cdots,P_n(t)$，满足如下方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_0(t)=P_0(t)r(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}P_i(t)=P_i(t)\left[b_i(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t)\right], \quad i=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中，$r(t)$为无风险利率；$W(t)=\left(W_1(t),W_2(t),\cdots,W_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$为$n$维标准布朗运动；$b_i(t)$和$\sigma_i(t)=(\sigma_{i1}(t),\sigma_{i2}(t),\cdots,\sigma_{in}(t))$分别为第$i$种风险资产的增长率和发散率。设一投资者在时刻0进入市场，初始财富为x_0。令$\pi_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$表示他在第i种风险资产上相应于时刻t的投资比例，$x(t)$和$c(t)$表示在时刻t的财富和消费率，则由Ito引理［详见Merton（1969）］有

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=\left[x(t)\left(r(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i(t)(b_i(t)-r(t))\right)-c(t)\right]\mathrm{d}t+x(t)\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_i(t)\sigma_i(t)\mathrm{d}W(t), \\ x(0)=x_0。 \end{cases} \tag{1.5}$$

对有限时域$[0,T]$的连续时间消费-投资期望效用最大化模型可由如下随机最优控制问题得到

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi(\cdot),c(\cdot)} E\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-\rho t}U(t,c(t))\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\rho T}B(T,W(T))\right], \\ \text{s.t.}\quad (\pi(\cdot),c(\cdot))\text{满足式(1.5)}。 \end{cases} \tag{1.6}$$

对于无限时域，连续时间消费-投资期望效用最大化模型可建立为

$$\begin{cases}\max \mathrm{E}\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t} U(t, c(t)) \mathrm{d} t\right], \\ \text{s.t.}(\pi(\cdot), c(\cdot))\text{满足式}(1.5)。\end{cases} \tag{1.7}$$

二、均值–方差模型

（一）静态均值–方差模型

Markowitz（1952，1959）从另一个角度来考虑投资组合选择和风险管理问题。由于对投资者来说期望收益率越大越好，风险越小越好，他利用方差来度量风险，建立了均值-方差模型，该理论是研究如何有效地将资金按一定的比例投资在不同的证券上，使得总体上尽可能的风险小收益大，他还提出了风险分散化的思想。Markowitz 的均值-方差模型成为研究投资组合选择和风险管理问题的基本框架，使金融研究由定性研究走向定量分析。数学上，均值-方差模型是指对任意给定期望收益率 u_p 求方差最小值，若只考虑 n 种风险资产不考虑有无风险资产的投资组合，则求如下最优化问题

$$\begin{cases}\min\limits_{W \in \Pi} \sigma_p{}^2 = W^{\mathrm{T}} \Sigma W, \\ \text{s.t. } W^{\mathrm{T}} R_n = u_p, \quad W \geqslant 0,\end{cases} \tag{1.8}$$

若考虑 n 种风险资产和一种无风险资产的投资组合，则求如下最优化问题

$$\begin{cases}\min\limits_{W} \sigma_p^2 = W^{\mathrm{T}} \Sigma W, \\ \text{s.t. } W^{\mathrm{T}} R_n + (1 - W^{\mathrm{T}} I) r_f = u_p, \quad W \geqslant 0,\end{cases} \tag{1.9}$$

其中，R_n 和 Σ 分别为市场上 n 种风险资产的期望收益率向量和协方差矩阵；I 为每个分量都为 1 的 n 维向量；r_f 为无风险利率。Merton（1972）在允许买空的条件下（即消除约束条件 $W \geqslant 0$ ）给出了均值-方差模型的有效投资策略和有效边界的解析表达式。

（二）动态均值–方差模型

经典的 Markowitz 模型只考虑单阶段静态的情形，但在现实中投资者或投资机构面临的是多阶段或连续时间的决策，为此，很多学者致力于把经典的静态均值-方差模型推广到多阶段或连续时间的情形。

设市场设置和前面所介绍的多阶段消费-投资期望效用最大化模型一样，所不同的是现在投资决策变量 $u_k^i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是指持有第 i 种资产的价值而不是投资比例，则持有第 0 种资产的价值为 $x_k - \sum\limits_{i=1}^{n} u_k^i$ ，而且不考虑消

费（可看成消费为 0），则此时财富转移过程［详见 Li 和 Ng（2000）］为

$$x_{k+1} = x_k e_k^0 + P_k^{\mathrm{T}} u_k,$$

其中，$u_k = (u_k^1, u_k^2, \cdots, u_k^n)^{\mathrm{T}}$，其他符号含义同上。设投资终止时间为 T，则多阶段的均值-方差模型是指对于给定期望终端财富为 d，求解如下多阶段最优化问题

$$\begin{cases} \min\limits_{u_k} \operatorname{Var}[x_T] = E[x_T - d]^2, \\ \text{s.t. } E[x_T] = d, x_{k+1} = x_k e_k^0 + P_k^{\mathrm{T}} u_k。 \end{cases} \tag{1.10}$$

Li 和 Ng（2000）在较为理想的假设条件下（如各期收益是统计独立的、投资终止时间是预先知道的），利用嵌入法的技术首次给出了多阶段的均值-方差模型的解析解。

连续时间则是多阶段的进一步延伸，可以理解为多阶段的极限，当阶段数无限细分趋向无穷大时则可看成连续时间的情形。现在我们考虑一个连续时间的金融体系，其市场假设和描述与前面介绍的 Merton 连续时间消费-投资模型是一样的，但此时投资者不需考虑消费，可理解为消费水平恒为零，并设投资终止时间为 T。此时财富过程 $x(t)$ 满足

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)\left\{\left[r(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(t)(b_i(t) - r(t))\right]\mathrm{d}t + \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_i(t)\,\mathrm{d}W(t)\right\}, \\ x(0) = x_0。 \end{cases} \tag{1.11}$$

连续时间均值-方差模型是指对于给定期望终端财富 u，求解如下随机最优控制问题

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi(\cdot)} \operatorname{Var}[x(T)] = E[x(T) - u]^2, \\ \text{s.t. } E[x(T)] = u,\ (x(\cdot), \pi(\cdot))\text{满足式(1.10)。} \end{cases} \tag{1.12}$$

Isabelle 和 Roland（1998）假定市场上存在一种零票息无风险债券，采用鞅方法构造出模型的有效边界和有效投资策略。Zhou 和 Li（2000）则利用 Li 和 Ng（2000）所介绍的嵌入法技术结合随机线性二次规划的方法得到了连续时间的均值-方差模型的显式解析解。

三、其他风险度量下基于均值和风险的投资组合选择研究

设市场上 n 种证券（可以含有一种无风险资产）的收益率为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，

投资组合为 $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$，则组合收益率为 $\xi_p=\sum_{i=1}^{n}w_i\xi_i$，用 ρ 表示风险度量函数，即组合收益率 ξ_p 的风险为 $\rho(\xi_p)$，并记

$$\Psi^n:=\operatorname{span}\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}=\left\{\xi\,\middle|\,\xi=\sum_{i}^{n}w_i\xi_i,\sum_{i}^{n}w_i=1,\forall w_1,w_2,\cdots,w_n\in\mathbb{R}\right\}。$$

则一般均值-风险模型是指给定期望收益率为 u_p，求风险最小，即求解如下最优化问题

$$\begin{cases}\min\limits_{\xi_p\in\Psi^n}\rho=\rho(\xi_p),\\ \text{s.t. }E[\xi_p]=u_p。\end{cases}\tag{1.13}$$

（一）基于偏离基准点方法定义风险度量的均值-风险模型

Markowitz（1952）利用方差来度量风险，即

$$\rho(\xi_p)=\operatorname{Var}[\xi_p]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E[\xi_p]\right)^2 f_{\xi_p}(x)\mathrm{d}x,$$

其中，$f_{\xi_p}(\cdot)$ 为 ξ_p 的概率密度函数，从而建立了著名的均值-方差模型。但理论和实践都表明方差并不是良好的风险度量方法，之后很多学者提出了许多其他风险度量方法，如下半方差、绝对偏差、VaR、CVaR 等。由于高于均值的超额收益实际上是投资者所喜好的，但在方差中却被当作风险来处理，一个很自然的想法是用下半方差来刻画风险，即

$$\rho(\xi_p)=E\left[\max\left\{E[\xi_p]-\xi_p,0\right\}\right]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\max\left\{E[\xi_p]-x,0\right\}\right]^2 f_{\xi_p}(x)\mathrm{d}x。$$

这类风险度量方法称为下方风险度量（downside risk measures）。Mao（1970）研究了均值-下半方差模型，并讨论了与经典均值-方差模型的异同点，Lari-Lavassani 和 Li（2003）则把 Mao（1970）的均值-下半方差模型拓展到多阶段的情形。Bawa（1975）则介绍了利用更一般的下偏矩（lower-partial moment）来度量风险，一般的下偏矩是指收益率小于某个基准点或临界点（threshold）α 的 τ 阶矩，即

$$\rho(\xi_p)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\max\{\alpha-x,0\}]^{\tau} f_{\xi_p}(x)\mathrm{d}x,\tag{1.14}$$

其中，τ 为大于零的任意常数。当取 $\alpha=E[\xi_p],\tau=2$ 时，则下偏矩即为下半方差。Fishburm（1977）把一般下偏矩引入到均值-风险框架来研究投资决策问题，Zhu 等（2009）基于一般下偏矩风险度量，研究了稳健（robust）的投资组合选择问题。Konno 和 Yamazaki（1991）则用期望绝对偏差来度量风险，即

$$\rho(\xi_p)=E\left[\left|x-E[\xi_p]\right|\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x-E[\xi_p]\right|f_{\xi_p}(x)\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

并研究了均值-绝对偏差模型，该模型后来发展为均值-下半绝对偏差模型，其中下半绝对偏差风险度量是指

$$\rho(\xi_p)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\max\left\{E[\xi_p]-x,0\right\}\right|f_{\xi_p}(x)\mathrm{d}x。 \tag{1.16}$$

Yu 等（2010）则把均值-绝对偏差模型推广到动态多阶段的情形。

（二）基于控制损失概率定义风险度量的均值-风险模型

和从偏离某个基准的角度定义风险所不同的是，Roy（1952）则从控制损失概率的角度来定义风险，提出了安全第一（safety first）准则模型。安全第一准则是指极小化投资组合收益小于给定“灾难水平”事件的概率，即 $\min P(\xi_p\leqslant\bar{d})$，其中 $\bar{d}$ 为给定的“灾难水平”。Pyle 和 Turnovsky（1970）对基于安全第一准则和基于均值-方差模型的投资组合选择问题做了比较和分析。Li 等（1998）及 Chiu 和 Li（2009）分别把基于安全第一准则的投资决策和资产-债务管理问题拓展到多阶段的情形。当然基于安全第一准则来研究投资决策及风险管理问题的研究很多，如 Ortobelli 和 Rachev（2001）、Li 等（2010）等。

受到安全第一准则思想的启发，一种称为 VaR 的风险度量指标在 20 世纪 90 年代发展起来，并成为金融风险度量的主流模型。著名的 1995 年“巴塞尔协议”中关于商业银行资金充足率要求就是以 VaR 为基础的。VaR 是指给定置信水平和目标时段下预期的最大损失［详见 Jorion（1997）］。数学上，VaR 风险度量定义如下

$$\mathrm{Prob}(\xi_p\leqslant-\mathrm{VaR})=1-\alpha,\quad \rho(\xi_p)=\mathrm{VaR}, \tag{1.17}$$

Artzner 等（1997，1999）提出良好的风险度量 $\rho(\cdot)$ 函数应该满足次可加性（subadditivity）、正齐次性（positive homogeneity）、单调性（monotonicity）和平移不变性（translation invariance），即满足如下条件。

（1）次可加性：对任意随机收益率 X 和 Y 有 $\rho(X+Y)\leqslant\rho(X)+\rho(Y)$。

（2）正齐次性：对任意正数 λ 和随机收益率 X 有 $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$。

（3）单调性：对任意随机收益率 X 和 Y 满足 $X\leqslant Y$，则 $\rho(Y)\leqslant\rho(X)$。

（4）平移不变性：对任意随机收益率 X 和常数 a 有 $\rho(X+a)=\rho(X)-a$。

我们把这四个性质的风险度量称为一致性风险度量（coherent measures of risk）。但研究表明单纯的 VaR 风险度量方法是存在局限性的，主要是不满足次可加性及凸性，从而不是一致性风险度量。为了克服 VaR 的缺陷，