21世纪创新科学之一

数频科学成果的学习

数频科学

The number and change rule of science

吴合法 著

(首创数频科学)

吉林大学出版社

21 世纪创新科学之一

数频科学成果的学习

数 频 科 学

The number and change rule of science

吴合法 著

(首创数频科学)

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数频科学/吴合法著. --长春:吉林大学出版社,2015.11
ISBN 978-7-5677-1922-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①数学分析 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 268484 号

数频科学

著　　者：吴合法
责任编辑：徐　佳
责任校对：杨　平
封面设计：崔新新
出版发行：吉林大学出版社
社　　址：长春市明德路 501 号
邮　　编：130021
发行部电话：0431-89580028/29
网　　址：http：//www.jlup.com.cn
E-mail：jn7k@163.com
济南文达印务有限公司　　印刷
开　本：787×1092 毫米 1/16　　印　张：13.5　　字数：220 千字
版　次：2016 年 10 月第 1 版　　印　次：2016 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5677-1922-4
定价：58.00 元

作者简介

吴合法，男，1972.10.2，专科，数频科学创始人，山东菏泽单县终兴镇吴集村，邮编 272934，

信仰牛顿：没有伟大的猜想就没有伟大的发现。科学研究不问出身，科学面前人人平等，科学只欢迎务实求真。——袁隆平院士在首届全国民间科技发展研讨会上的讲话；

研究方向：数频科学，发表数学论文多篇。其中《椭圆周长的数频公式》一文解决了椭圆周长没有等式的历史；《数频微积分》解决了“无穷小量是零又不是零”的难题；《交错级数 ln2 的实质是 n 到 2n 项无穷大调和级数》，《数频圆》，《论数学中的二律背反》，《数频分形的守恒定律》，《数频级数之调和级数收敛》等。未发表的有已获山东省基教处举办的“百佳”论文二等奖的《数频论》。

前 言

本书是21世纪创新科学之一，数频科学成果的学习与普及是必要的。它为经典数学分析奠定了科学定律基础，更为重要的开创了一门纯粹的数频科学。内容包括数频科学3大定律，数频调和级数的收敛，数频微积分，数频中值定律，数频分形守恒定律等等。

数频科学是将自然科学具有的数频必然性质、随机性通过单位的方式定义下来，通过周期的属性方式将其发展、理论、规范，进行分布；数频科学还将关于物质世界的结构进行以单位形式概念化，从而形成单位是科学的标志，结构是单位的科学形式。

数频科学是未来科学的标志之一，是以科学为宗旨而发展的。它将运用在各门学科中，特别是数频论它改造、发展了经典概率论及数理统计学的基本理论等，使之进入到数频科学的阶段。数频论将以独立单行本另行出版。

本书的出版发行，必定可以奠定中国在当前世界科学基础改造上遥遥领先的数频科学地位，不仅及时拯救了屡次处于世界数学危机的经典数学分析基础，更重要的是它必将推动21世纪数频科学的伟大进程。

目 录

1. 数频科学序言

科学能践行多远，看谁同行；科学能有多大成就，看谁指点。数频科学的出现并非偶然，乃客观事实的完备发展使然。

本书是突破 21 世纪 15 年代以及其前面的所有不完备的经典数学分析最基本理论而取得的数频科学成果集成之作。最著名的欧拉常数 R=0.57721……到数频-欧拉常数 r=0.273……的发现与证明，进一步完善了一个重要的积分 $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$；ln2 的突破与发展到调和级数不超过 89 的科学论断，使经典高等数学基础理论有了实事求是的科学改观。数频科学 e 的定律奠定了 $\lim\limits_{n\to 0}(1+\frac{1}{n})^n = 1$ 的数频科学地位。

本书充分深刻地展现了数频科学波澜广阔的发展全貌与数频科学定律等式的特征。

从原始的自然数到自然数的无穷数频分布，以及自然数的倒数的级数定律，它们奠定了数频科学的级数定律基础；从经典的类似Π、e、$\sqrt{2}$，……的无理数悖论到无穷大自然数定律，展现了数频科学的规律和秩序；从经典微积分中“无穷小量是 0 不是 0”的悖论到数频微积分系列定律，使其有了一个新陈代谢的实质飞跃。

科学是一致完备的。数频科学虽然是科学发展中最新的最重要的定律系列之一，但并不完全反对、排斥经典数学中那些独立的科学的理论；当然，如果利用经典数学中的悖论来妄加批判、攻讦、诽谤数频科学，将是可笑的，极其无知的，科学不立，悖论不自除。这也是数频科学发展的原动力。

本书既为少数想当数频科学家的优秀人才所设置的必读内容，也为众多向往接受科学教育的人们提供某种科学参考和借鉴。这样必然会极大地提高全人类的科学文明素质，这正是本书的目的之一。前不见古人，后不见来者。这正是本书具有空前的数频特征，它既集中体现了古中外众多大数学家们呕心沥血的智慧的结晶，也体现了数频科学如何将经典数学中的悖论加以科学改造并上升为科学理论的伟大历程。现在的社会更加文明、自由、开放，更加崇尚人道、科学、技术，年轻有为人们都在积极学习，努力去掌握哪些能制造神话般的技能，人人都在坚持不懈地为起死回生的经济在忘我地工作着……这些人类极其宝贵的进取精神不容忽视，但更需要数频科学所提供的牢不可破的科学基础作为最可信赖的理论来指导科学实践，来解疑排惑；当初大数学家牛顿虽然创立了微积分，但也一直囿于无穷小量是零又不是零的悖论而不能自拔，

不仅牛顿自己生前没有完全解决掉这一悖论，甚至到今天也还没有解决掉，除了数频科学外。爱因斯坦为了建立统一场论，虽然努力探索，致死未能成功，不如说在这一基本无穷小量是零又不是零悖论上也没有科学突破，尽管爱因斯坦创立了相对论将科学向前推动了一个时代。

这愈发显示出数频科学完备的无穷魅力，它一直深深吸引着我，并忘我地去创立数频科学，不能停止……一路过关斩将，收获颇丰，现在集成书来告一段落，愿与大家共享数频科学成果，共享数频文明。

现在来概括创作历程，愿与大家共勉。学习欧拉破经典，排除万难创新天。电闪雷鸣去教条，浪涛汹涌漫金山。法海有道遭天谴，人间自由出圣贤。春华秋实谈兴度，数频科学论发展。

2. 论数频科学

为什么要讲数频科学而不讲数学科学，这两者还是有本质区别的。钱学森在上世纪 90 年代初，曾提出一个观点，他认为数学应该与自然科学和社会科学并列，建议是成为“数学科学”，他认为在人类整个知识系统中，数学不应该被当做是自然科学的一个分支，而应该提高到与自然科学和社会科学等同重要的地位。钱学森他这个意见尽管有较强的客观性，由于他未能认识及去除掉客观存在的经典数学悖论，从而失去“数学科学”的科学纯洁属性，这就没有完备价值而不了了之。

现在从数频科学角度来分析，数学科学这一提法还不妥当。因为经典数学基础还没有建立在完备的科学基础上，还存在着无穷小量是零又不是零等等致命的悖论，这些悖论只要一天不解决，那么数学就只能徘徊在科学与伪科学之间，又怎么明确称其那些东西为数学科学呢！自然科学与社会科学却在实质上不同于数学，有其自身产生、存在、发展的条件和基础。这些特征恰好是以数学频科学的联系、规律进行的，特别是他们共同遵守的规律秩序，表明它们具有的等同重要的科学基础和地位，这就将悖论置之度外，也就一点不为奇。

不论对专家来说，还是对普通人来讲，唯一回答：“数学是什么?”这个问题，不是哲学而是数学本身中活生生的经验。—[美]R.柯朗.H.罗宾著《数学是什么》(《what is Mathematics》)oxford.university press new York.1964.这一说法并不令人满意。其中数学本身活生生的经验未必就是数学，更多的时候是悖论。例如芝诺悖论、罗素悖论等等就是数学中活生生的经验，但不是数学。其次这一说法答非所问，既没有回答什么是数学，也没有回答活生生的经验科学与否，又怎能用数学来界定经验呢！其

结果都没有得到明确的答复。

R. 柯朗(Richard courant，1888-1972)是在数学研究与数学教育上都对当代有深远影响的数学家，是西方公认的数学权威，其《数学是什么》是世界的数学名著之一，在对数学的回答上还如此含糊，似是而非，其它人又怎能做出比这更科学的判断呢！不仅如此，像这样有影响的数学家甚至数学大师们对经典数学都作出不同的程度的巨大贡献，例如牛顿，莱布尼兹，欧拉，黎曼，维尔斯托拉斯……，即使这样的数学大师天才，一方面天才地贡献数学的发现与创造，同时也不停地制造出难以克服的危机悖论……其中在调和级数问题上几乎无不做出发散的悖论佐证。

数学在现代汉语词典里的解释：研究现实世界的空间形式和数量关系的学科，包括算术、几何、代数、三角微积分等等。这里也没有将数学等同科学，也没有将数学里悖论排除。综合以上论述，数学即包罗数的现象和数的规律及秩序，也包容数的发展变化以及暂时甚至长期的悖论等的统称（见《现代汉语词典》，中国社会科学院语言研究所词典编辑室编，第六版，2013. 北京）这就是不讲数学科学的主要原因，特别是诞生了数频科学，经典数学分析的悖论逐步退出科学的平台，取而代之的数频科学及其发展。这也是人类对科学发展的客观推崇。

数频科学是完备的定律，但不是完备的体系，因为只要存在发展，就不可能是完备的体系，这不影响每个完备的定律。相反，如果每个定义定理是不完备的，即使是完备的体系，也只能导致更多更尖锐的悖论。正如牛顿的三大力学定律，不因为体系条件的变化而改变各自独立性。数频科学定律都是一个个完备的等式，科学合理的解决了最基本的经典数学由于不完整而人为制造的不必然的悖论，这就解放了经典数学科学化的羁绊，逐步规范到数频科学的完整体系上来。例如看似十分精确的莱布尼兹级数却导出约翰。伯努利 A=A+1 的悖论，这一问题解决于数频--莱布尼兹级数定律，这里不再详述，这正是本书所解决的十分重要的科学问题之一。

3. 迫切学习数频科学

迫切学习数频科学是科学与悖论相互斗争而取得科学成果的需要。科学不立，悖论不自除。科学是人类向前发展的工具和灵魂，悖论是科学发展中暂时出现的无知产物。数频科学的出现，见证了以经典数学分析为代表的数学基础由于出现了致命的危机而没有实质的进展，见证了数频科学逐步取代数学而建立崭新完备的科学理论。

迫切学习数频科学是提高辨别数学分析中是非能力的客观需要。只有学习现有的数频科学理论，才能发现、发展科学来获得更多的科学成果，因此是迫切的。著名的

欧拉常数 R=0.5772……曾经是最令人激动的伟大发现，在数频科学看来，它证明了欧拉是误算，直至另一个数频—欧拉常数 r=0.273……的发现与证明，它见证了数频科学破除及更正错误的科学完备的能力。

数频科学是定律系列，不是经典数学分析中的定义定理，这是数学不同于数频科学的地方，因此数学中的定义定理也不等同于定律。确切地讲，数学是位于科学与悖论之间的不完备理论体系，因而数学既不完全是科学，也不完全是悖论。上世纪 80、90 年代曾经出现了“数学科学”，至今仍然有许多院校建立这样的机构，其实是不完备的。另外在经典数学中，清楚的前提推理，得出的清楚结论，有时未必科学完备。例如，清楚的椭圆周长就是如此，即使是已知的两个半轴 a=1，b=2，按照经典数学分析给出的结论都是近似的，这种情形恰恰说明这一问题现象，它科学归结于椭圆的数频周长那个公式 $L=\pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$。

不仅如此，值得一提的是，经典无理数是虚拟的悖论。显然 1+1=2 是清楚的，但 $(1^2+1^2)^{1/2}=2^{1/2}$ 是最常见的不清楚解释，直至数频科学才大白于天下。根下 2 引发了一场空前的发展危机，产生了更加荒诞不经的悖论—无理数，最终结束在数频科学无穷大自然数定律。

迫切学习数频科学是更新思想理念乃至科学人生观的客观需要。经典数学分析中精确近似求值的做法有其存在的必要性，但对科学理论毕竟是不完备的，更容易引起理论上的悖论。例如“ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e$ ”，n→∞，就是如此。事实是 e=1+1+1/2!+1/3!+……+1/n!≈ 2.71828182……

就是精确近视的结论。但这不是一回事，而是两个不同而且不完备的表达式，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 和 e=1+1+1/2!+1/3! +……+1/n!+……都是不完备的。这在数频科学已经有了完备的定律。此处不在详谈。

悖论并不可怕，可怕的是哪些无原则的被悖论而扭曲的人及思想，直至变得狰狞丑恶的幽灵，以及对新兴科学的大肆反对扼杀，这就失去了应有的科学自由的本性。迫切学习数频科学是科学发展的客观完备的使然。数频科学不仅仅是一个个完备的定律，更重要的，由此它是一门逐渐丰富而广阔的科学，它是每个有良知正义感的科学工作者应有的科学素质的需要。

“事物发展的根本原因，不是在事物的外部而是在事物的内部，在于事物内部的矛盾性”—这就是对立统一—我们只能领会其中抽象的深刻的哲学意义，却不能象对待牛顿的力学定律一样有直观的也是抽象的标准，这就体现了它们的科学形式上的异同。数频科学定律则体现了对立统一在微积分上所共同遵守的规律和秩序。因此迫切学习是必然的。

第一章 数频科学第一定律

数频科学建立在等式的基础上，而等式是计算常数，变量的唯一科学的方法和工具；不等式虽然十分重要，但它依赖于等式而存在。等式是完备的，不等式是不完备的，一旦脱离了等式即所有悖论都出自不等式。数频科学它是克服经典数学悖论的唯一科学理论。数频科学第一定律奠定了数频科学的基础，它科学规范了经典数学分析中精确近似的模式。

§1. 数频科学第一定律

数频科学第一定律1：

$1/n=1/(n+1)+1/(n+1)^2+1/(n+1)^3+\cdots\cdots+1/(n+1)^n+1/[n(1+n)^n]$，$n\geqq1$，$n\to\infty$。

证明：设 $S=1/(n+1)+1/(n+1)^2+1/(n+1)^3+1/(n+1)^4+\cdots\cdots+1/(n+1)^{n+1}$，$n\to\infty$，①

$\therefore (n+1)S=1+1/(n+1)+1/(n+1)^2+1/(n+1)^3+\cdots\cdots+1/(n+1)^n$，②

②-①，得 $(n+1)S-S=nS=1-1/(n+1)^n$，$\therefore S=1/n-1/[n(n+1)^n]$

$\therefore$ $1/n=S+1/[n(n+1)^{n]}=1/(n+1)+1/(n+1)^2+1/(n+1)^3+\cdots\cdots+1/(n+1)^n+1/[n(n+1)^n]$ 完毕。

例子1：

$1=1/2+1/2=1/2+1/4+1/4=1/2+1/4+1/8+1/8=\cdots\cdots=1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots\cdots+1/2^n+1/2^n$

这一例子表明，它是一个恒等式，但是经典的 $1=1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots+1/2^n+\cdots\cdots$ 却是近似的级数，是一个开放的悖论。

例子2：

$1/2=1/3+1/3^2+1/3^3+1/3^4+\cdots\cdots+1/3^n+1/[2*3^n]$

不论例2的n为何值，它总是一个恒等式。$n=1$ 时，$1/2=1/3+1/2*3=2/6+1/6=3/6$；$n=2$ 时，$1/2=1/3+1/3^2+1/2*3^2=3/9+1/9+1/18=9/18$；……

这一定律是数频科学最基础理论之一，数频科学的标志定律之一。

数频非自然数的倒数级数定律2：$R\neq0\neq1$。

$1/(R-1)=1/R+1/R2+1/R3+\cdots\cdots+1/Rn+1/[(R-1)Rn]$，

这一定律的证明可类比上面的证明，略。

推论1：$1/\infty=1/(\infty+1)+1/(\infty+1)2+1/(\infty+1)3+\cdots\cdots+1/(\infty+1)n+1/[\infty(\infty+1)n]$

推论 2：设 Z > 0，则有

$1/Z=1/(Z+1)+1/(Z+1)^2+1/(Z+1)^3+\cdots\cdots+1/(Z+1)^n+1/[Z(Z+1)^n]$

例子 3：

$1/e=1/(e+1)+1/(e+1)^2+1/(e+1)^3+\cdots\cdots+1/(e+1)^n+1/[e(e+1)^n]$。④

例子 4：

$1/\Pi=1/(\Pi+1)+1/(\Pi+1)^2+1/(\Pi+1)^3+\cdots\cdots+1/(\Pi+1)^n+1/[\Pi(\Pi+1)^n]$。⑤

例子 3 与 4 表明，e 是④式子的非唯一解，Π 是⑤的非唯一解，这就否定了 e 与 Π 是超越数的悖论。

经典数学分析里的等比级数是近似的开放的，虽然能近似求解，但在理论上存在不完备性质而导致大量等比级数不成立，悖论重生，严重丧失科学性。

问题 1：著名的大数学家欧拉一生未能解决的著名级数悖论的数频科学实质

$1/(x-1)=1/x+1/x^2+1/x^3+1/x^4+\cdots\cdots+1/x^n+\cdots\cdots$

当 x=3 时，即 $1/(3-1)=1/2=1/3+1/3^2+1/3^3+\cdots\cdots+1/3^n+\cdots\cdots$，还可以近似精确成立；

当 x=1/2，即 $1/[(1/2)-1]=-2=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n+\cdots\cdots$，这是不可能的直觉。由于这个级数右边各项的和应超过上一个级数各项之和，欧拉得出结论：-2 比无穷大更大。欧拉同时代的一些人则认为负数大于无穷大不同于负数小于零，欧拉不同意这点，并且认为∞正像零一样把正数、负数分隔开来。

这一悖论的虚拟存在贯穿了近代现代的数学分析，它的非科学影响深远，不仅表明了经典高等数学的不完备，也表明了古今数学家们长期的无奈之举。这在数频科学第一定律而言，轻而易举被解决掉。

根据数频非自然数的倒数级数定律 2，

有 $1/(R-1)=1/R+1/R^2+1/R^3+\cdots\cdots+1/R^n+1/[(R-1)R^n]$，

设 R=1/2，$1/(1/2-1)=-2=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+1/(1/2)^n+1/[(1/2-1)(1/2)^n]$，

有 $-2=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n+(-2)(2)^n$，即有 $2*2^n-2=2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n$。

这显然是恒等式。以上事实表明，看似形式完美而不科学完备，那么就必然引出意想不到的悖论而不知所以然，这正是数频科学所不认同的经典数学悖论所在。离开了等式，而得出看似等式的结论，这是近代现代数学分析的数字悖论游戏，不是科学。

问题 2：《数学分析》（徐森林、薛春华编著第一册第一章 p5）例 1.1.8 即设 $a_n=0.333\cdots\cdots3$，$\lim a_n=0.3$ 的无穷循环=1/3。

摘要其证明：存在 ε >0，取 N∈N，S，t，N>lg1/ε，当 n>N 时，

有 $|a_n-0.3$ 的无穷循环$|=|0.333\cdots\cdots3-0.333\cdots\cdots3$(n 个)$|<1/10<\varepsilon$，

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}(0.3333\cdots\cdots3)$ n 个=0.3 无穷循环=1/3。

这就是典型的由不等式得出等式结论的悖论，既没有讲清 1 与无限循环小数的定义区别与联系，除了数字游戏外，不存在一个科学的等式，结果什么也没有证明，让人不明所以然。这一问题的解决见数频科学第一定律，略。

问题 3：经典超越数论是虚拟的……

文摘：“其定义：当一个数可以被写成含有理系数的多项式方程的根的形式时，不管这个数是实数还是复数，则这个数都可以被定义为代数数。否则，就是超越数。这就是说，如果存在非零的有理数使得方程成立，我们就说式中的数是一个代数数。而当为一个超越数时，这个数就不是任何一个含非零的有理数系数的多项式方程的根。假如 a，b 都是有理数，这等式不能成立，因而对于这种不是底 a 的幂的数 b，其对数应当恰如其分地命名为超越数。”

虚拟的超越数引起数学分析的理性更加混乱。

比如说π的“超越”的证明并没有彻底地解决了古希腊三大作图问题中的化圆为方问题，反而将问题引向不可判断；判断某些给定的数是否“超越数”实在是太困难了，为了获得上述结果，“一个多世纪以来，数学家们付出了艰苦的劳动。即便如此，这个领域仍旧迷雾重重。比如说，现在人们仍然无法断定像(e+π)这样的数到底是代数数还是超越数。”其实这恰恰证明了所谓超越数的虚拟性在于不存在一个完备的定律来限制而人为虚构。

(Π+e)是有理数的证明：

证明：根据数频非自然数的倒数级数定律 2，有

1/(R-1)=1/R+1/R2+1/R3+……+1/Rn+1/[(R-1)Rn]，

即

$$\frac{1}{e+\pi}=\frac{1}{e+\pi+1}+\frac{1}{(e+\pi+1)^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{(e+\pi+1)^n}+\frac{1}{(e+\pi)(e+\pi+1)^n}$$。

完毕。

作为数学不完备的超越数资料，可以对比欣赏

资料：超越数与代数数的不同

超越数与代数数有着明显的不同，甚至连运算法则也有区别。比如说，对于代数数成立的加法和乘法消去律，对于超越数来说就不成立。举个例子，如果对三个超越数 a，b，c 有下式成立：a+b=a+c 但 b=c 却不一定成立。类似地，对于这三个数，如果下式成立：a×b=a×c 但 b=c 也不一定成立。

数论概述，数论就是指研究整数性质的一门理论。整数的基本元素是素数，所以，数论的本质是对素数性质的研欧几里得的《几何原本》究。2000 年前，欧几里得证明了有无穷个素数。既然有无穷个，就一定有一个表示所有素数的素数通项公式，或者

叫素数普遍公式。它是和平面几何学同样历史悠久的学科。按照研究方法的难易程度来看，数论大致上可以分为初等数论（古典数论）和高等数论（近代数论）。初等数论主要包括整除理论、同余理论、连分数理论。它的研究方法本质上说，就是利用整数环的整除性质。初等数论也可以理解为用初等数学方法研究的数论。其中最高的成就包括高斯的“二次互反律”等。高等数论则包括了更为深刻的数学研究工具。它大致包括代数数论、解析数论、算术代数几何等等。同上所述，初等数论主要就是研究整数环的整除理论及同余理论。此外它也包括了连分数理论和少许不定方程的问题。本质上说，初等数论的研究手段局限在整除性质上。初等数论中经典的结论包括算术基本定理、欧几里得的质数无限证明、中国剩余定理、欧拉定理（其特例是费马小定理）、高斯的二次互逆律，勾股方程的商高定理、佩尔方程的连分数求解法等等。《数论》英文版解析数论－借助微积分及复分析—（即复变函数）来研究关于整数的问题，主要又可以分为乘性数论与加性数论两类。乘性数论藉由研究积性生成函数的性质来探讨质数分布的问题，其中质数定理与狄利克雷定理为这个领域中最著名的古典成果。加性数论则是研究整数的加法分解之可能性与表示的问题，华林问题是该领域最著名的课题。

如果解析数论的创立当归功于黎曼而由于它的数学基础不完备，从而就失去科学意义，这就变得得不偿失。黎曼他发现了黎曼 zeta 函数之解析性质与数论中的素数分布问题存在深刻联系，与其确切的说，黎曼 ς 函数的非平凡零点的分布情况决定了素数的很多性质是难以证明的，不如说黎曼 ς 函数到底完备与否。黎曼猜测，那些零点都落在复平面上实部为 1/2 的直线上。这就是著名的黎曼假设--被誉为千禧年七大世界数学难题之一。值得注意的是，欧拉实际上在处理素数无限问题时也用到了解析方法。这在过去谁应用了某某解析数论方法似乎就代表真理，现在看来未免可笑至极。这正是数频科学的未来课题。

代数数论，代数数论将整数环的数论性质研究扩展到了更一般的整环上，特别是代数数域。一个主要课题就是关于代数整数的研究，目标是为了更一般地解决不定方程求解的问题。其中一个主要的历史动力来自于寻找费马大定理的证明。代数数论更倾向于从代数结构角度去研究各类整环的性质，比如在给定整环上是否存在算术基本定理等等。这个领域与代数几何之间的关联尤其紧密，它实际上也构成了交换代数理论的一部分。它也包括了其他深刻内容，比如表示论、p-adic 理论等等。几何数论（数的几何），主要在于通过几何观点研究整数（在此即格点，也称整点）的分布情形。最著名的定理为 Minkowski 定理。这门理论也是有闵科夫斯基所创。对于研究二次型理论有着重要作用。计算数论，借助电脑的算法帮助数论的问题，例如素数测试和因数分解等和密码学息息相关的话题。组合数论，利用组合和机率的技巧，非构造性地

证明某些无法用初等方式处理的复杂结论。这是由艾狄胥开创的思路。比如兰伯特猜想的简化证明。算术代数几何，这是数论发展到目前为止最深刻最前沿的领域，可谓集大成者。它从代数几何的观点出发，通过深刻的数学工具去研究数论的性质。比如外尔斯证明费马猜想就是这方面的经典实例。整个证明几乎用到了当时所有最深刻的理论工具。

当代数论的一个重要的研究指导纲领，就是著名的郎兰兹纲领。历史版本，版本一，历史上第一个证明了超越数存在性的是法国数学家刘维尔（J.Liouville，1809~1882），他于 1851 年构造了一个数：L=1/10+1/10^2!+1/10^3!……这个无限小数后来被称为“刘维尔数”。刘维尔成功地“证明了”这个数是一个超越数。……其实这一构造不能用来作为判断是否是超越数的标准-----因为存在这样的无穷大自然数。在“刘维尔数”构造出来之后二十多年，数学家康托“证明了”：所有代数数的集合是可数的，即代数数的个数与自然数一样多！在此基础上，康托根据他的集合论中的另外一个结论—实数集是不可数的，得知复数集也是不可数的，因而进一步得到一个假设结论：必定存在不是代数数的复数，因此超越数必定存在！继刘维尔之后，数学家们为了证明某些具体的数的超越性付出了种种努力：1873 年，法国数学家埃尔米特（C. Hermite，1822～1901）证明了自然对数的底 e=2. 7182818……是超越数。1882 年，德国数学数学家林德曼（Lindemann，1852～1939）证明了圆周率 π=3. 1415926……是超越数。版本二，J.刘维尔开创了对超越数的研究，他发现无理代数数的有理数逼近的精密性有一个限度，借此他于1844年构造出历史上第一批超越数，例如[78-22]对=2，3……都是超越数。早在 1844 年以前的一个世纪里，对无理数的研究已成为一个注意焦点。1744 年，L.欧拉证明了自然对数的底 e 是无理数。1761 年，J.H.朗伯证明了圆周率 π 是无理数。1873 年，C.埃尔米特证明了 e 是超越数，从而使超越数论进入一个新阶段。1882 年，林德曼推广了埃尔米特的方法，证明了 π 是超越数，从而解决了古希腊的“化圆为方”问题。19 世纪超越数论的最高成就，是林德曼-外尔施特拉斯定理：如果……是两两不同的代数数……是非零代数数，则[79-01](1)由此可以导出，如果……在无理数域上线性无关，则[79-02]代数无关（即它们不适合任一其系数为有理数的多项式方程）。由(1)可知，如是非零代数数，则 sinx，cosx，tanx 都是超越数；如是不等于 0 和 1 的代数数，则自然对数 ln n 是超越数。

1900 年，D.希尔伯特提出的 23 个问题中的第 7 问题是：如果是不等于 0 和 1 的代数数，是无理代数数，那么是否超越数？D.希尔伯特曾预言，这个问题的解决将迟于黎曼猜想和费马大定理。A.O.盖尔丰德于 1929 年证明了：若是不等于零和 1 的代数数，是二次复代数数，则是超越数，[kg2]特别地，[79-03]是超越数。P.O.库兹明于 1930 年把这个结果推广到是二次实代数数的情形，特别地，[kg2][79-04]是超越数。1934