中国科学院规划教材

大学数学系列教材

线性代数

主编 李福乐

科学出版社

中国科学院规划教材

大学数学系列教材

线性代数

主　编　李福乐

副主编　孙丹娜　黄凯美　刘振斌

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书较全面地介绍了线性代数的主要内容. 全书共 7 章，分别介绍了行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及线性空间与线性变换. 每章末配有一定数量的习题，并在书后附有习题参考答案. 每章后面都附有一篇阅读材料，或介绍一则基础知识，或给出一种重要方法，以便于查阅和开阔视野.

本书可作为高等农林院校非数学类各专业线性代数课程的教材，也可供其他高等院校非数学类各专业学生、自学者和科技工作者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李福乐主编. —北京：科学出版社，2016. 12
中国科学院规划教材. 大学数学系列教材
ISBN 978-7-03-050662-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 274243 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 1 月第一次印刷 印张：12 3/4
字数：257 000

定价：32. 00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

线性代数作为一门基础数学课程，其基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性，它不仅是一些数学后继课程的重要基础，同时也是自然科学和工程技术等领域中重要的数学工具. 通过该课程的学习，能使学生掌握该课程的基本理论和基本方法，且对学生其他能力的培养（如逻辑推理能力、抽象思维能力）和数学素养的提高也有着重要的作用.

本书是根据全国高等农林院校"十三五"规划教材编写基本要求和高等农业院校数学教学大纲要求编写而成的. 在编写过程中，既注重线性代数课程本身结构的科学性、系统性、严谨性，又深入浅出、通俗易懂，同时突出有关理论、方法的应用. 在例题与习题的选择上注重代表性，旨在提高学生的计算和解决实际问题的能力. 本书共 7 章，主要内容为行列式、n 维向量、矩阵、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及线性空间与线性变换. 考虑到农、林、医、生物类专业之间的差异，打"*"部分可由执教老师自定取舍. 为了拓展学生视野以及提高学生兴趣，每章末编写了阅读材料，希望有益于本课程的学习. 书后有习题参考答案、自测题以及自测题参考答案与提示.

由于水平所限，不当之处在所难免，恳请广大读者和使用本教材的师生批评指正.

编　者

2016 年 12 月

目　　录

第一章 行 列 式

中学数学中一个非常重要的内容就是一次方程(组),从一元一次方程、二元一次方程组、三元一次方程组到较为多元的一次方程组,解法往往是换元、替代或高斯消元.对于多元一次方程组而言,用中学的方法求解显然是比较繁杂的,所以进一步研究一次方程组的解法是很有必要的,而行列式是研究一次方程组的重要数学工具之一.本章在对行列式概念和性质讨论的基础上,深入阐述行列式的展开定理和克拉默法则,并介绍拉普拉斯定理与行列式乘法.

1.1 行列式的概念

一、排列和逆序数

在给出行列式定义之前,首先介绍排列的有关概念和结论.先看一个例子.

例 1 用 1,2,3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 有 6 个不同的三位数,它们是:123,132,213,231,312,321.

同理,对于 n 个不同的数字,也可以作类似的排列.

定义 1 由 n 个正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列.

一般常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示一个 n 元排列,其中 j_1 是该排列的第 1 个数,j_2 是该排列的第 2 个数,依此类推.显然,由数集$\{1,2,\cdots,n\}$组成的所有 n 元排列的种数为 $n!$.下面用逆序来对排列进行分类.

定义 2 在一个排列中,若有一个大数排在一个小数之前(即左边),则称这两个数构成该排列的一个逆序(反序).一个排列中逆序的总数,称为该排列的逆序数(反序数),记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数是奇数的排列称为奇排列.

接下来讨论排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数的计算.考虑排列中的第 k 个位置上的数 $j_k(k=1,2,\cdots,n)$,如果比 j_k 大的且排在 j_k 前面的数有 a_k 个,则由 j_k 构成的逆序数就是 a_k,由此可得该排列的逆序数就是

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

例 2 求排列 24135 的逆序数.

解 在该排列中,2 排在首位,逆序数 $a_1=0$;4 的前面比 4 大的数没有,逆序数 $a_2=0$;1 的前面比 1 大的数有 2 和 4,逆序数 $a_3=2$;3 的前面比 3 大的数有 4,逆

序数 $a_4=1$；5 的前面比 5 大的数没有，逆序数 $a_5=0$. 所以该排列的逆序数 $\tau(24135)=0+0+2+1+0=3$.

二、二阶与三阶行列式

在线性代数发展的过程中，行列式的研究源于对线性方程组的研究. 例如，在中学时求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法不难求出，当 $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$ 时，得到解

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

现把方程组(1)中的未知数系数按照下标次序排列在一起

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}. \tag{3}$$

从(2)式的结果可以看出，分母正好是(3)式排列的对角线乘积之差.

定义 3　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫作一个二阶行列式，它的值定义为

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中，a_{ij} 表示第 i 行第 j 列（i,j 分别为行标和列标）位置上的元素.

由此，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则(2)式可写成

$$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}.$$

用这个公式可以求解二元一次方程组，请读者自己检验.

注意，在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 里，从 $a_{11}a_{22}$ 到 $-a_{12}a_{21}$，行标顺序没有变，而列标的顺序颠倒了，并且 $a_{11}a_{22}$ 中的列标逆序为 0（偶数），它的系数就为正数；反之，$-a_{12}a_{21}$ 的列标逆序为 1（奇数），它的系数为负，这是巧合吗？下面来看三阶行列式.

定义 4　$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 叫作一个三阶行列式，它的值定义为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 表示第 i 行第 j 列(i,j 分别为行标和列标)位置上的元素.

例 3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

解 按三阶行列式的定义代入便有

$$\begin{aligned} D &= 4\times3\times(-1)+(-7)\times6\times1+2\times5\times1- \\ &\quad 4\times6\times1-(-7)\times5\times(-1)-1\times3\times2 \\ &= -12-42+10-24-35-6=-109. \end{aligned}$$

同理,在 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 里,从正项到负项每项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 行标的顺序没有变,而列标的顺序变了,并且正项的列标逆序数为偶数,负项的列标逆序数为奇数,看来这不是巧合. 这样三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三元排列 $j_1j_2j_3$ 求和. 由此可以给出 n 阶行列式的定义.

三、n 阶行列式

定义 5 将 n^2 个数按 n 行 n 列排列为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

叫作一个 n 阶行列式,它的值定义为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

例 4　证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证　我们只关心 D 的展开式中不为零的那些项. D 的展开式是

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由于 D 的第 n 行元素除去 a_{nn} 外全是零,所以只要考虑 $j_n = n$ 的那些项;同理, D 的第 $n-1$ 行只需考虑 $j_{n-1} = n-1$. 逐步推导下去得,在 D 的展开式中,除 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这项外,其余项全为零,且此项前的系数为 $(-1)^{\tau(12\cdots n)} = 1$.

另外,由这个结论可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

和

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

1.2 行列式的性质

一、排列的对换

在研究 n 阶行列式的性质之前必须要了解排列的性质.

定义 6 在排列中任意对调两个元素,其余的元素不动,这一过程被称为对换.若两个元素相邻,则称为相邻对换.

定理 1 每作一个对换,排列的逆序数改变奇偶性.

证[*] 先看相邻情况,设

$$\cdots ab\cdots \to \cdots ba\cdots.$$

这种情况下,a 和 b 与其他数是否构成逆序的事实没有改变.不同的只是对换了 a 与 b 的次序.若原来它们不构成逆序,那么对换后,排列的逆序数增加 1;反之减少 1.因此,相邻数的对换改变了排列的奇偶性.

再看一般情况,设

$$\cdots aj_1j_2\cdots j_sb\cdots \to \cdots bj_1j_2\cdots j_sa\cdots.$$

显然,这个对换总可以通过一系列的相邻对换来实现.先把 a 与 j_1 对换,再与 j_2 对换,…,即把 a 一位一位地向右移,则经过 $s+1$ 次相邻的对换,就变成了

$$\cdots aj_1j_2\cdots j_sb\cdots \to \cdots j_1j_2\cdots j_sba\cdots.$$

同样,再把 b 一位一位相邻左移,经过 s 次相邻的对换可得

$$\cdots j_1j_2\cdots j_sba\cdots \to \cdots bj_1j_2\cdots j_sa\cdots.$$

因此,a,b 的对换可以通过 $2s+1$ 次相邻的对换来实现.前面已证明相邻的对换改变排列的奇偶性,显然,$2s+1$ 次相邻对换的最终结果还是改变排列的奇偶性.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

证 按行列式定义,原式有

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

记

$$D_1=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,经过因子的交换便得到 D_1 中的唯一一项 $(-1)^{\tau(i'_1i'_2\cdots i'_n)}a_{i'_11}a_{i'_22}\cdots a_{i'_nn}$,以下只需说明 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(i'_1i'_2\cdots i'_n)$ 的奇偶性

相同即可. 我们说,每进行一次因子的交换,行排列和列排列都发生一次对换,由定理 1 可知,行排列和列排列的奇偶性同时改变,而行排列由偶排列 $12\cdots n$ 变成排列 $i_1'i_2'\cdots i_n'$,列排列则由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 变成偶排列 $12\cdots n$,所以排列 $i_1'i_2'\cdots i_n'$与 $j_1j_2\cdots j_n$ 有相同的奇偶性. 于是,$D=D_1$.

二、行列式的性质

定义 7　称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的转置行列式,记为 D^{T}.

性质 1　行列式和它的转置行列式相等.

证　根据行列式的定义不难得到

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

再由定理 2 即可得出结论.

性质 1 告诉我们这样一个事实:行列式中行具有的性质列也具有. 这使得性质的证明过程省掉一半,即只对行(或列)证明即可.

性质 2　互换行列式的两行(或列),行列式变号.

为了便于书写,往往以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j\,(i\neq j)$,交换两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j\,(i\neq j)$.

推论 1　若行列式有两行(或列)完全相同,则行列式为零.

证　把这两行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行(或列)中所有的元素都乘以同一个数 k,等于用数 k 乘以此行列式. 即

$$kD=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第 i 行(或列)乘以 k,记作 kr_i(或 kc_i).

结合推论 1 立得以下推论:

推论 2 行列式中如果有两行(或列)的元素成比例,则此行列式等于零.

性质 2、性质 3 直接由行列式定义不难验证(略).

性质 4 若行列式的某一行(或列)的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义,

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{ij_i}+a'_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &\quad +\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a'_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右边}. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式的某一行(或列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去,行列式不变.

由性质 4 拆开,再由推论 2 即得(略).

以数 k 乘第 j 行(或列)加到第 i 行(或列)上,记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

例 5　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解　$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} = 2\times 5\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -10\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+2r_3} -10\times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 40.$$

例 6　证明行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & d_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

证　**解法 1**　利用性质 4

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2x & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3x & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1x & b_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & b_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & d_1 \\ a_2 & a_2x & d_2 \\ a_3 & a_3x & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & d_1 \\ b_2x & a_2x & d_2 \\ b_3x & a_3x & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & d_1 \\ b_2x & b_2 & d_2 \\ b_3x & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

利用性质 3 可得

$$原式=x\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}+x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & d_1 \\ b_2 & b_2 & d_2 \\ b_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

利用推论 1 可得

$$原式=x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

再利用性质 2 可得

$$原式=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

必须注意:以下做法是错误的.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & d_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & d_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & d_1 \\ a_2 & a_2x & d_2 \\ a_3 & a_3x & d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1x & b_1 & d_1 \\ b_2x & b_2 & d_2 \\ b_3x & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

一般来讲,拆开的方法较麻烦. 以下我们给出例 6 的更简单解法.

解法 2 左边$\xlongequal{c_1-xc_2}\begin{vmatrix} a_1(1-x^2) & a_1x+b_1 & d_1 \\ a_2(1-x^2) & a_2x+b_2 & d_2 \\ a_3(1-x^2) & a_3x+b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

$$=(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & d_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & d_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-xc_1}(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=右边.$$

例 7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 把第 2 列到第 n 列都加到第 1 列上,可得

$$原式=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

再从第 2 行至第 n 行,每行都减去第 1 行可得

$$\text{原式}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\0 & x-a & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

1.3 行列式的展开定理

结合行列式的性质,1.2 节已经详细讨论了行列式的计算方法. 我们不难发现,低阶行列式的化简还是比较容易的. 因此,如果能够把高阶的行列式降阶,这对计算高阶行列式显然是非常有益的. 接下来我们将着重讨论这个问题.

定义 8 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫作元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 被称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例 8 求三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$$

中元素 1 和 8 的余子式和代数余子式.

解 1 的余子式:$M_{11}=\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}=45-48=-3$;

1 的代数余子式:$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=-3$;

8 的余子式:$M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 3\\4 & 6\end{vmatrix}=6-12=-6$;

8 的代数余子式:$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=6$.

利用代数余子式,我们可以得出一个很重要的行列式展开定理:

定理 3 一个 n 阶行列式,若其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零,则这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即

$$D=a_{ij}A_{ij}.$$

证 先证 $i=n,j=n$ 的情况,此时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\\vdots & & \vdots & \vdots\\a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

根据行列式的定义可知

$$D=\sum_{j_1\cdots j_{n-1}j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}.$$

在 D 的展开式中，对应于 $j_n\neq n$ 的项全为零，故只考虑 $j_n=n$ 的项，所以

$$\begin{aligned}D&=\sum_{j_1\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}\\&=a_{nn}\sum_{j_1\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}\\&=a_{nn}M_{nn}\\&=a_{nn}A_{nn}.\end{aligned}$$

再看一般形式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&a_{ij}&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

只要对此进行相邻对换行和列，直至 a_{ij} 到第 n 行第 n 列行的位置上，再利用上面已得出的结果即可.

利用定理 3，容易得到行列式展开定理的一般形式：

定理 4(展开定理) 一个 n 阶行列式等于它的任一行(或列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}+0+\cdots+0&0+a_{i2}+\cdots+0&\cdots&0+\cdots+0+a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&a_{i2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$