

主编◎蒋小平

现代控制理论

Xiandai Kongzhi Lilun

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

现代控制理论

主 编 蒋小平

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/蒋小平主编. —徐州:中国矿业大学出版社, 2017. 1

ISBN 978-7-5646-3308-0

I. ①现… II. ①蒋… III. ①现代控制理论 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 252088 号

书 名 现代控制理论
主 编 蒋小平
责任编辑 仓小金
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路 邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307 83884995
出版服务 (0516)83885767 83884920
网 址 <http://www.cumtp.com> E-mail: cumtpvip@cumtp.com
印 刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开 本 787×1092 1/16 印张 14 字数 358 千字
版次印次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷
定 价 28.00 元

(图书出现印装质量问题,本社负责调换)

前 言

现代控制理论是自动化学科的重要基础理论。本书是自动化专业、电气工程专业教学计划中“现代控制理论”课程的教材。课程目的是使学生获得现代控制理论的基础知识,掌握控制系统的状态空间方法的基本理论和概念,以及运用状态空间方法对控制系统进行分析与综合控制的方法,并为后续课程的学习和实际应用打下基础。现代控制理论研究范围广、内容多,受学时的限制,难以做到面面俱到。全书介绍线性系统理论中最基本的分支,内容包括线性系统的状态空间表示与线性系统的运动分析、线性系统的能控性与能观性分析、线性系统的状态空间方法综合,控制系统的李雅普诺夫稳定性分析。

编者多年从事控制理论系列课程的教学工作,本书总结了编者多年的控制理论课程的教学经验和教学研究成果。在撰写过程中参考了国内外控制理论的经典名著,充分考虑了学习过程的教与学两个环节的特点,以增强教学过程的可操作性,在编写中,充分强调了如下几点:

(1) 全书注重课程体系的优化与衔接,结构清晰,强调基本概念、基本理论和基本方法的应用。

(2) 现代控制理论内容较抽象,涉及较多数学知识。本书以学生为本,加强能力培养,遵照认知规律,内容叙述力求深入浅出、层次分明。

(3) 在理论论述和公式推导中,精选方法和内容,选用了较简单并在应用中较常用的方法。尽量用经典例题代替文字叙述。

(4) 内容精简,突出工科特点,注重物理概念,避免繁琐的数学推导。尽量多地采用图表代替论述。

(5) 精选例题和习题,加强基本理论和方法的学习和训练,使学生从整体上掌握现代控制理论的基本方法;突出现代控制理论的工程应用背景,便于指导学生运用理论解决实际问题。

本书的编写参考了许多同行及前辈编写的专著和教材,在此表示衷心感谢!鉴于时间仓促,编者水平所限,书中错漏之处在所难免,敬请读者批评指正。

目 录

第一章 绪论	1
第一节 控制理论的发展简介	1
第二节 控制理论的发展趋势	2
第三节 现代控制理论的主要特点	4
第四节 现代控制理论的主要优点	4
第五节 现代控制理论基本内容	4
第二章 控制系统的状态空间描述	6
第一节 控制系统状态空间描述的基本概念	6
第二节 控制系统状态空间描述及结构图	8
第三节 控制系统状态空间表达式的建立	11
第四节 状态空间描述与传递函数	32
第五节 组合系统状态空间描述及传递函数	35
第六节 状态空间表达式的特征值规范型	37
本章小结	45
习题	45
第三章 控制系统的运动分析	48
第一节 线性定常系统齐次状态方程的求解	48
第二节 状态转移矩阵	51
第三节 线性定常系统非齐次状态方程的解	66
本章小结	69
习题	70
第四章 线性系统的能控性与能观性	72
第一节 能控与能观的概念及意义	72
第二节 线性定常系统的能控性	75
第三节 线性定常系统状态的能观性	92
第四节 对偶原理及对偶系统	103
第五节 能控规范型与能观规范型	104
第六节 线性系统的规范分解	119
第七节 传递函数的实现	133

本章小结·····	138
习题·····	139
第五章 线性系统设计·····	141
第一节 引言·····	141
第二节 输出反馈与状态反馈·····	143
第三节 极点配置·····	150
第四节 状态重构和状态观测器·····	163
第五节 观测器状态反馈系统·····	178
第六节 带输入变换矩阵的状态反馈·····	183
第七节 带输出误差积分的状态反馈·····	186
第八节 系统能镇定问题·····	189
第九节 系统能检测问题·····	192
本章小结·····	195
习题·····	195
第六章 控制系统稳定性分析·····	198
第一节 概述·····	198
第二节 李雅普诺夫意义下的稳定性问题·····	199
第三节 李雅普诺夫稳定性理论·····	203
第四节 线性定常系统的李雅普诺夫稳定性分析·····	211
本章小结·····	214
习题·····	215
参考文献·····	216

第一章 绪 论

经典控制理论是建立在系统的输入—输出关系或传递函数的基础上的,而现代控制理论是以状态空间来描述系统,可极大简化系统的数学表达式。随着工程控制系统复杂程度增大以及对控制精确程度和动态品质要求的不断提高,经典控制理论的局限性越来越明显,生产和科学技术的发展,迫切要求发展一种能很好适用于多输入/多输出动态系统新的控制理论与综合方法,于是现代控制理论技术在这种背景下应运而生。

第一节 控制理论的发展简介

一、经典控制理论

经典控制理论以拉氏变换为数学工具,以单输入、单输出的线性定常系统为主要的研究对象。它将描述系统的微分方程或差分方程变换到复数域中,得到系统的传递函数,并以此为基础在频率域中对系统进行分析和设计,确定控制器的结构和参数。经典控制理论通常是采用反馈控制,构成所谓闭环控制系统。

经典控制理论具有明显的局限性,突出的是难以有效地应用于时变系统、非线性系统、多变量系统。当控制系统变得复杂时,经典控制理论就显得无能为力了,主要是以下几个特点所导致:

① 只限于研究线性定常系统,即使对最简单的非线性系统也是无法处理的。

② 只限于分析和设计单变量系统,采用系统的输入/输出描述方式,也不能处理输入和输出皆大于1的系统。这就从本质上忽略了系统结构的内在特性,而实际应用中,大多数的控制工程对象都是多输入/多输出系统,所以用经典控制理论设计这类系统都没有得到满意的结果。

③ 经典控制理论一般采用试探法设计系统。即根据经验选用合适的、简单的、工程上易于实现的控制器,然后对系统进行分析,直至找到满意的结果为止。这种设计方法具有简单、实用等很多优点,但是在推理上却是不能令人满意的。人们自然提出这样一个问题,即对一个特定的应用课题,能否找到最佳的设计。

综上所述,经典控制理论的最主要特点是:线性定常对象,单输入单输出,完成镇定任务。即便对这些极简单的对象、对象描述以及控制任务,经典控制理论在理论上也尚不完整,从而促使现代控制理论的发展方向:对控制理论的精确化、数学化及理论化。

二、现代控制理论

现代控制理论的本质是基于状态空间模型在时域中对系统进行分析和设计。由于采用状态方程对系统进行分析,因此原则上可以分析多输入/多输出、非线性时变系统。基于状态空间模型来对系统进行分析,主要借助于计算机解出状态方程,根据状态解可以对系统性能作出评估。由于无需经过任何变换,在时域中可直接求解和分析,控制的要求和性能指标就非常直观。在系统的设计方法上,通过严密的理论基础,推导出满足一定性能指标的最优控制系统。因此,在经典控制理论中存在的困难和局限,在现代控制理论中可以迎刃而解。现代控制理论中首先研究的是多输入多输出线性系统,尤其是对描述控制系统基本理论的建立,如可控性、可观性、实现理论、典范型分解理论等,这使控制由工程设计方法提高为一门新的科学,同时也促使非线性系统、最优控制、自适应控制、辨识与估计理论、卡尔曼滤波、鲁棒控制等成为成果丰富的独立学科分支。

在 20 世纪 50 年代航空航天技术的推动和计算机技术发展的支持下,控制理论在 1960 年前后有了重大的突破和创新。在此期间,贝尔曼提出寻求最优控制的动态规划法;庞特里亚金证明了极大值原理,使得最优控制理论得到极大的发展;卡尔曼系统地把状态空间法引入到系统与控制理论中,并提出了能控性、能观测性的概念和新的滤波理论,这些构成了现代控制理论的发展起点和基础。

现代控制理论以线性代数和微分方程为主要的数学工具,以状态空间法为基础分析与设计控制系统。状态空间法本质上是一种时域的方法,它不仅描述了系统的外部特性,而且描述和揭示了系统的内部状态和性能。现代控制理论分析和综合的目标是在揭示系统内在规律的基础上,实现在一定意义下的最优化。它的构成带有更高的仿生特点,即不限于单纯的闭环,而是扩展为适应环、学习环等。较之经典控制理论,现代控制理论的研究对象要广泛得多,原则上讲,它既可以是单变量的、线性的、定常的、连续的,也可以是多变量的、非线性的、时变的、离散的。

第二节 控制理论的发展趋势

控制理论当前的研究成果十分丰富,其中一些研究已经成为成熟的独立学科。当前,现代控制理论的进一步发展包括以下方面:

一、对动态系统的研究

包括非线性系统、时变系统、随机系统、分布参数系统、大规模系统、模糊系统、机械系统以及不确定系统等。

非线性系统:状态变量和输出变量相对于输入变量的运动特性不能用线性关系描述的系统。

鲁棒控制:控制系统在其特性或者参数发生摄动时仍可使系统性能指标不变的属性称为鲁棒性。

模糊控制:采用由模糊数学语言描述的控制律来操纵系统工作的控制方式。

大系统:考虑到系统的内部信息结构时,将组成系统的各部分称为“子系统”,而系统就被称为“大系统”,期望用子系统及其关联的性质来对大系统的性质作出某些判断,提供分析方法。

二、控制任务的多样化

多数情况下,经典及现代控制理论的任务在于寻求反馈控制,使得闭环系统稳定,这就是通称的“镇定问题”。当前工程技术不断提出新的控制任务,远远不可能用镇定来概括,必须发展新的概念、理论与方法。

车间调度控制,在工程上为 FMS 及 CIMS,理论上出现了 DEDS(离散事件动态系统)理论,要求完成的任务已远比镇定复杂得多。化工过程、煤矿采掘面等各种工业过程要求实现的最简单的任务有:监控、预警等也远远超出镇定的范围。拟人机器人、智能机器人等,要求实现的任务更是多种多样的,如跟踪、代替人做各种操作以及简单的装配任务等。

自动控制就是由系统来代替人控制。随着科学技术的发展,人们的控制活动越来越多,因而控制任务也会越来越复杂和困难。

三、专业学科化的发展

因受控对象的性质千差万别,各学科又有自己的独特之处,所以各门学科都在相对独立地发展控制理论及方法。

随着科学技术的突飞猛进,对工业过程控制的要求也越来越高,不仅要求控制的精确性,也更注重控制的鲁棒性、实时性、容错性以及的控制参数的自适应和学习能力。另外,需要控制的工业过程日益复杂,工业过程严重的非线性和不确定性,使许多系统无法用数学模型精确描述。这样建立在数学模型基础上的经典和现代控制方法将面临空前的挑战,同时也给新的控制方法的发展带来了良好的机遇。

四、复杂系统与智能控制的研究

一般来说,复杂系统的特征可以概括为以下三个方面:

① 复杂对象(Complex Plant):难于用常规数学工具建模并研究的对象,如多机械组成的系统,大型工业生产过程,自动化工厂等。

② 复杂任务(Complex Task):镇定问题所不能包括的任务。

③ 复杂环境(Complex Environment):现有控制理论通常假设对象是孤立的、自由的,但实际却常是开放的,受到外部环境制约,如煤矿采掘面的多变工作环境,这时环境对控制有巨大影响。

复杂系统在对象、环境及任务这三方面中至少有一个是复杂的。解决这类系统的控制问题,必须跳出建立在简化理想数学模型基础上的现代控制理论框架,真正面对系统的复杂性,提出新的概念和模型,探索新的方法和手段。

智能控制是解决复杂系统控制问题的主要途径,目前有很多智能控制方法已投入使用。从现代控制理论向智能化发展的研究越来越多,如带有智能功能的传统控制(自适应控制、鲁棒性控制等)、基于行为的智能反馈控制、学习控制、故障诊断及容错控制、以生产调度管理控制为背景的离散事件系统研究、机器人班组自组织协调控制、自主控制以及控制系统的

智能化设计等。

另外,用人工智能方法解决控制问题的研究也越来越多,如:决策论、带有专家系统的监控、预警及调度系统,用神经网络实现控制的系统,基于符号表示、模糊逻辑等设计的控制系统,模式识别与特征提取,智能机的应用等。

第三节 现代控制理论的主要特点

现代控制理论具有以下特点:

① 控制对象结构的转变。由简单的单回路模式向多回路模式转变,即从单输入单输出向多输入多输出转变。它处理极为复杂的工业生产过程的优化和控制问题。

② 积分工具的转变。积分变换法向矩阵理论、几何方法转变,由频率法转向状态空间的研究,由人工计算转向计算机计算。

③ 建模手段的转变。由机理建模向统计建模转变,开始采用参数估计和系统辨识的统计建模方法。

控制理论的发展同其他学科一样,依赖于工业、科学、技术提出的越来越高的要求。“现代控制理论”这一名称是 20 世纪 60 年代初,卡尔曼首先提出的。而在此之前,钱学森发表了《工程控制论》的专著,并为当时几乎所有论文以突出形式加以引用。工程控制论,从广义上看,是控制学科最具远见卓识的科学预见与理论,现代控制理论只是其中一支。

第四节 现代控制理论的主要优点

与经典控制方法相比,基于状态变量法的现代控制理论有以下优点:

① 采用状态变量法有利于直接利用计算机求解和分析。

② 状态变量法不但适用于单输入单输出系统,也适用于多变量系统,并且系统模型具有统一的形式。

③ 状态变量法应用于非线性系统、时变系统的分析与设计。原则上讲,它既可以是单变量的、线性的、定常的、连续的,也可以是多变量的、非线性的、时变的、离散的。

④ 状态变量法有利于采用现代分析的方法。如优化方法等实现控制系统设计。

第五节 现代控制理论基本内容

(1) 线性多变量系统理论

这是现代控制理论中最基础、最成熟的部分。它揭示系统的内在规律,从能控性、能观测性两个基本概念出发,研究系统的极点配置、状态观测器设计和抗干扰问题的一般理论。

(2) 最优控制理论

根据已建立的被控对象的数学模型,选择一个控制律,使得被控对象按预定要求运行,

并使给定的某一性能指标达到极值。从数学观点来看,最优控制研究的问题是求解一类带有约束条件的泛函极值问题,属于变分学的范畴。然而,经典变分法理论只能解决控制无约束,即容许控制属于开集的一类最优控制问题,而工程实践中所遇到的多为控制有约束,即容许控制属于闭集的一类最优控制问题。为了满足工程实践的需要,20 世纪 50 年代中期,出现了现代变分理论,其中最常用的方法是动态规划和极小值原理。

(3) 控制系统的李雅普诺夫稳定性分析

1892 年俄国学者李雅普诺夫提出的稳定性原理是确定系统稳定性的更一般性理论,它采用了状态空间描述,不仅适用于单变量、线性、定常系统,而且适用于多变量、非线性、时变系统。李雅普诺夫理论在建立一系列关于稳定性概念的基础上,提出了判断稳定性的两种方法:一种方法是利用线性系统微分方程的解来判断系统稳定性,称之为李雅普诺夫第一法或间接法;另一种方法是首先利用经验和技巧来构造李雅普诺夫函数,进而利用李雅普诺夫函数来判断系统稳定性,称为李雅普诺夫第二法或直接法。

(4) 最优估计理论

在对象数学模型已知的情况下,最优估计理论研究的问题是如何从被噪声污染的观测数据中确定系统的状态,并使这种估计在某种意义下是最优的。由于噪声是随机的,而且是非平稳随机过程(随机序列),这种情况下的状态估计是卡尔曼提出和解决的,故又称卡尔曼滤波。这种滤波方法是保证状态估计为线性无偏最小估计误差的估计。

(5) 系统辨识与参数估计

这是基于对象的输入、输出数据在希望的估计准则下,建立与对象等价的动态系统(即建立对象的数学模型),由于数学模型一般是由阶次(系统中出现的最高次偏导数项的偏导阶次)和参数决定的。因此,系统辨识与参数估计决定系统的阶次和参数(即参数估计)。

第二章 控制系统的状态空间描述

经典控制理论建立在系统的输入—输出关系或传递函数的基础之上的,对系统内部的中间变量不加描述,因而不能包括系统的所有信息。而现代控制理论以状态空间来描述系统,它能反映系统的全部独立变量的变化,从而能同时确定系统的内部运动状态。在设计控制系统时,不再只局限于输入量、输出量和误差量,为提高系统性能提供了有力的工具。

第一节 控制系统状态空间描述的基本概念

控制系统的数学描述通常有两种基本形式:一种是基于输入和输出模型的外部描述,它将系统看成为“黑箱”,只反映输入与输出间的关系,而不表征系统的内部结构和内部变量,如微分方程或传递函数;另一种则是基于状态空间模型的内部描述,状态空间模型反映了系统的内部结构与内部变量,由状态方程和输出方程两个方程组成。状态方程反映系统内部变量 x 和输入变量 u 间的动态关系,具有一阶微分方程组或一阶差分方程组的形式;输出方程则表征系统输出向量 y 与内部变量及输入变量间的关系,具有代数方程的形式。外部描述虽能反映系统的外部特性,却不能反映系统内部的结构与运行过程,内部结构不同的两个系统也可能具有相同的外部特性。因此外部描述通常是不完整的,而内部描述则能全面、完整地反映出系统的动力学特征。这些差异将在后续的章节中逐步介绍。

一、系统的状态与状态变量

◆状态:能够完全描述系统时域行为的最小变量组。如:

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$$

◆状态变量:确定系统状态的一组独立(数目最小)变量称为状态变量。即状态变量组的每一个变量如 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 。

系统在任何时刻的状态变量组(状态),实际上是以某种有效的方式,充分地、既不多也不少地概括和存储了与系统过去历史有关的信息,这些附加信息与未来的输入变量一起就能确定系统未来的行为,由此可见状态变量组的重要性。

状态变量的特点:

- ① 独立性:状态变量之间线性独立。
- ② 多样性:状态变量的选取不唯一,存在无穷多种方案。

- ③ 等价性:两个状态向量之间只差一个非奇异线性变换。
- ④ 现实性:状态变量通常取为含义明确的物理量。
- ⑤ 抽象性:状态变量可以没有直观的物理意义。

二、状态向量

由系统的状态变量构成的向量(矢量)。记为

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T \quad (2-1)$$

三、状态空间

状态空间是指由状态变量 $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴构成的 n 维空间。

正如前面所述,状态是指在系统中决定系统状态的最小数目的变量的有序集合。而状态空间则是指该系统的全部可能状态的集合。简单来说,状态空间可以视为一个以状态变量为坐标轴的空间,因此系统的状态可以表示为此空间中的一个向量。

四、状态方程

描述系统状态变量与输入变量之间关系的一阶微分方程组(连续时间系统)或一阶差分方程组(离散时间系统)。状态方程表征了系统由输入引起的内部状态变化,其一般形式为:

$$\dot{x}_{n \times 1}(t) = A_{n \times n} x_{n \times 1}(t) + B_{n \times r} u_{r \times 1}(t) \quad (2-2)$$

其中矩阵 A 称为系数矩阵或状态矩阵,矩阵 B 称为控制矩阵或输入矩阵。

状态方程是现代控制理论所依据的数学模型。用状态方程研究系统动态特性的方法,称为状态变量法,也称为状态空间法。

五、输出方程

描述系统输出变量与系统状态变量和输入变量之间函数关系的代数方程,其一般形式为:

$$y_{m \times 1}(t) = C_{m \times n} x_{n \times 1}(t) + D_{m \times r} u_{r \times 1}(t) \quad (2-3)$$

其中矩阵 D 称为直接传递矩阵。在大多数的实际应用中 $D=0$,系统称为严格正常型(或绝对固有系统)。对应于该类系统的 $n>m$,如果 $D \neq 0$,系统称为正常型(或固有系统)。对应于该类系统的 $n=m$ 。(注: $m>n$ 时,系统称为非正常型)

六、状态空间表达式

系统的状态空间表达式又称为系统的状态空间描述。它是输出方程与状态方程的组合,它构成对一个系统动态行为的完整描述。对线性定常连续系统,其一般形式为:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n \times 1}(t) = A_{n \times n} x_{n \times 1}(t) + B_{n \times r} u_{r \times 1}(t) \\ y_{m \times 1}(t) = C_{m \times n} x_{n \times 1}(t) + D_{m \times r} u_{r \times 1}(t) \end{cases} \quad (2-4)$$

系统的动态特性由状态变量构成的一阶微分方程组来描述,能同时给出系统全部独立变量的响应,因而能同时确定系统的全部内部运动状态。用状态变量分析法研究系统具有如下优点:

- ① 便于研究系统内部的一些物理量在信号转换过程中的变化。这些物理量可以用状

态矢量的一个分量表现出来,便于研究其变化规律。

② 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度无关,它和简单系统的数学模型相似,表现为一些状态变量的线性组合,因而更适用于多输入多输出系统。

③ 状态变量分析法还适用于非线性和时变系统,因为一阶微分方程或差分方程是研究非线性和时变系统的有效方法。

④ 状态变量分析法可以用来定性地研究系统的稳定性及如何控制各个参数使系统的性能达到最佳等。

⑤ 由于状态方程都是一阶联立微分方程组或一阶联立差分方程组,因而便于采用数值解法,从而为使用计算机进行分析和设计系统提供有效的途径。

七、状态空间分析

状态空间分析指对以状态空间表达式描述的系统进行系统性能分析,分析的内容有系统的稳定性、可控性和可观性等。

八、状态反馈

在进行系统的分析综合时,状态反馈能提供更多的校正信息,反馈信息来自若干个状态变量,则称为状态反馈,此系统称为状态反馈控制系统。

九、状态观测或状态估计

由于实际系统的状态变量并非全部可以量测得到,所以可通过一个专门设计的动态系统,根据实际系统的输入/输出,系统重构或估计出所需的状态变量,这一状态变量的重构或估计的过程就称为状态观测或状态估计。

第二节 控制系统状态空间描述及结构图

一、状态空间描述的一般形式

状态方程与输出方程的组合称为系统状态空间表达式或者状态空间描述。一般有以下四种形式:

(1) 线性定常系统状态空间表达式

对于线性定常系统,状态方程和输出方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n \times 1}(t) = A_{n \times n} x_{n \times 1}(t) + B_{n \times r} u_{r \times 1}(t) \\ y_{m \times 1}(t) = C_{m \times n} x_{n \times 1}(t) + D_{m \times r} u_{r \times 1}(t) \end{cases} \quad (2-5)$$

线性定常系统状态空间表达式中各个系数矩阵为常数矩阵。

(2) 线性时变系统状态空间表达式

对于线性时变系统,状态方程和输出方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n \times 1}(t) = A_{n \times n}(t) x_{n \times 1}(t) + B_{n \times r}(t) u_{r \times 1}(t) \\ y_{m \times 1}(t) = C_{m \times n}(t) x_{n \times 1}(t) + D_{m \times r}(t) u_{r \times 1}(t) \end{cases} \quad (2-6)$$

线性时变系统状态空间表达式中各个系数矩阵中有随时间变化的元素,若矩阵 A 和 B 中有随时间变化的元素,状态方程就是线性时变的。

(3) 非线性定常系统状态空间表达式

对于非线性系统,状态方程和输出方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n \times 1}(t) = f[x(t), u(t)] \\ y_{m \times 1}(t) = g[x(t), u(t)] \end{cases} \quad (2-7)$$

(4) 非线性时变系统状态空间表达式

对于非线性时变系统,状态方程和输出方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n \times 1}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y_{m \times 1}(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases} \quad (2-8)$$

各种形式的状态空间描述中,状态方程中不能含有状态变量 x 的高于一阶导数的项和输入函数的导数项。输出方程中不含有变量的任何导数项。

多输入多输出系统状态空间表达式中, m 输入 r 输出系统中输入向量 u 的维数为 $r \times 1$,输出向量 y 的维数为 $m \times 1$,状态向量 x 的维数为 $n \times 1$ 。状态方程为一阶微分方程组的向量矩阵表示形式,输出方程为代数方程组的向量矩阵表示形式。研究重点为线性定常系统(A 、 B 、 C 、 D 常数矩阵)。

A :系数矩阵。表达了系统内部状态变量之间的关系,它取决于系统的作用机理、结构和各项参数,是一个 $n \times n$ 的矩阵。

B :输入矩阵、控制矩阵。它表明了各个输入变量对状态变量的控制特性是一个 $n \times r$ 的矩阵。

C :输出矩阵。表示输出变量与状态变量之间的关系是一个 $m \times n$ 的矩阵。

D :直接输出矩阵。反映输入对输出的直接作用,所以称之为直接传递矩阵,是一个 $n \times n$ 的矩阵。

二、状态空间描述的结构图

现代控制理论的分析中常用模拟结构图(状态变量图)的方法来描述系统,它包含三种组件:加法器、积分器和比例器,统称为积分组件。由积分组件描述的系统结构图中每个积分器的输出即为状态变量。这种图形既描述了系统状态变量之间的关系,又说明了状态变量的物理意义。由状态结构图可直接求得系统的状态空间表达式。

状态空间描述结构图绘制步骤:

① 首先,绘制积分器以确定状态变量的个数和位置。积分器的个数等于状态变量数,每个积分器的输出表示相应的某个状态变量。

② 其次,画出加法器和比例器。根据状态方程和输出方程,画出相应的加法器和比例器。

③ 最后,用线连接各元件,并用箭头示出信号传递的方向。

考虑如下的线性定常系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

状态空间描述结构图如图 2-1 所示。

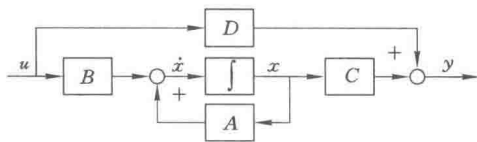


图 2-1 系统状态结构图

信号线为向量传递,矩阵乘法不存在交换律,矩阵下标角码要符合矩阵运算条件。每个方块的输入输出关系规定为:

$$\text{输出向量} = (\text{方块所示矩阵}) \times (\text{输入向量})$$

如图 2-2 所示。

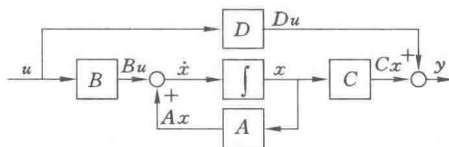


图 2-2 系统结构图的运算关系图

〔例 2-1〕 给定系统状态空间表达式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

绘出其状态结构图。

〔解〕 状态空间表达式展开成一阶方程组的形式为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 + u(t) \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

状态结构图如图 2-3 所示。

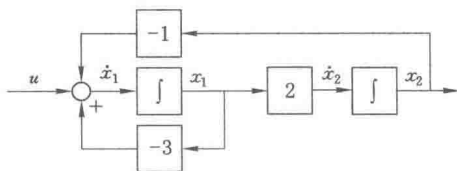


图 2-3 例 2-1 状态结构图

〔例 2-2〕 状态空间表达式如下所示,试绘制模拟结构图。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

〔解〕 状态空间表达式展开成一阶方程组的形式为:

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 4u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 3x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + 6x_2(t)$$

结构图如图 2-4 所示。

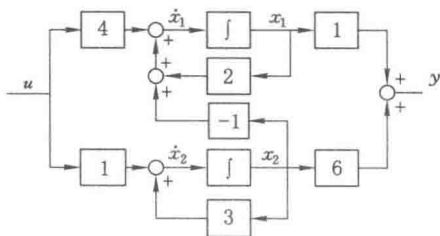


图 2-4 例 2-2 控制系统的状态结构图

采用经典控制理论中的结构图和积分组件可以方便地获得系统的状态结构图,状态结构图清楚地反映了系统输入、输出和内部状态各变量(每一个标量)之间的内在联系,状态结构图是一种方便的表示状态空间描述的图形。

第三节 控制系统状态空间表达式的建立

现代控制理论是建立在状态空间分析方法基础上的。因此,如何获得状态方程和输出方程是研究实际系统首先要解决的问题。为获得控制系统的状态空间表达式,常用的方法有:由物理模型建立状态空间表达式、由微分方程建立状态空间表达式、由传递函数建立状态空间表达式、由系统结构图建立状态空间表达式。根据系统的微分方程、传递函数或结构图来建立状态空间表达式称为实现问题。

一、由物理模型建立状态空间表达式

通常可以对系统的物理过程进行研究,从而直接建立系统的状态空间表达式,其方法和步骤如下:

① 确定输入 $u(t)$ 、输出 $y(t)$ 和状态 $x(t)$ 。其中状态变量 $x(t)$ 的维数等于物理系统中独立储能元件的个数。

② 根据系统特性列写描述系统动态特性或运动规律的代数方程和微分方程组。

③ 消除中间变量,得出状态变量的一阶导数与各状态变量、输入变量的关系式。

④ 方程整理成状态空间表达式的标准形式。

[例 2-3] 图 2-5 表示一个含有弹簧、运动部件、阻尼器的机械位移装置。其中外力 $u(t)$ 是系统的输入量,位移 $y(t)$ 是系统的输出量。设质量块的重量已经和弹簧的初始拉伸相抵消,试确定系统的状态空间表达式,并做出系统的状态结构图。

[解] 根据牛顿力学定律有:

$$\sum F = u(t) - ky - b \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$u(t) = m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky$$