



俄罗斯数学精品译丛

代数、数论 及分析习题集

□ [俄]波拉索洛夫 著

□ 叶思源 译

◆ 数学奥林匹克

◆ 世界看中国

◆ 中国学俄罗斯

- 中国是数学奥林匹克大国
- 俄罗斯是数学奥林匹克强国
- 中国有世界上人数最多的数学奥林匹克选手
- 俄罗斯有世界上最优秀的数学奥林匹克选手
- 中国的数学奥林匹克训练题花样翻新
- 俄罗斯的数学奥林匹克训练题最具原创性
- 中国全民学奥数
- 俄罗斯精英学奥数



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

代数、数论 及分析习题集

☐ [俄] 波拉索洛夫 著

☐ 叶思源 译



哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2016 - 046 号

内容简介

本书包括 39 章和一些补充问题(补充问题作为第 40 章),每一章又以解题方法为基础分为若干专题,其中包括代数、数论及分析相关内容的专题,每道习题都给出了详细答案或分析.

本书适合数学专业学生、高等院校数学教师、数学研究人员,以及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

代数、数论及分析习题集/(俄罗斯)波拉索洛夫著.
—叶思源译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,
2017.1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6236 - 6

I. ①代… II. ①波… ②叶… III. ①代数数论—习
题集 IV. ①O156.2 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 248148 号

书名:Задачи по алгебре, арифметике и анализу

作者:Виктор Васильевич Прасолов

©Виктор Васильевич Прасолов, 2005.

本作品中文专有出版权由中华版权代理总公司代理取得,由哈尔滨工业大学出版社
独家出版

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 李广鑫 刘春雷 陈 璐

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 35.75 字数 602 千字

版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6236 - 6

定 价 98.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

序 言

本书共有 40 章,其中包括代数、数论及分析相关内容的习题和一些补充的内容.

本书可供高等院校的数学老师使用,也适用于希望更深入研究数学的学生.书中介绍了代数、数论及分析中一系列具体的问题,这些问题正是众多数学学院的讨论班目前研讨的课题.书中有些材料超出了俄罗斯的中学数学的教学大纲,但是本书内容都在高等院校数学系的教学大纲的范围之内.下列问题对学生来说是很感兴趣的:素数的性质,整数方程的解,硬币数量的估计,三次方程的解,用尺规三等分任意角的不可能性等.

为了方便读者,书中采用详细的标题.首先将全部问题分为 39 个专题,然后又将每个专题再分为若干节.虽然有时问题的外在的特征起着重要的作用(如方程、不等式、多项式、三角函数等),但我们仍是以解题方法作为分类的基础.

本书特别关注众多的重要理念.这些理念正在现代数学及其他科学领域,如物理学、经济学等中有着广泛的应用.

“补充”一章由代数、数论与分析中一些热门的专题组成:圆的有理参数化,多项式的平方和,将一个数表示为两个平方

之和的形式,正 17 边形的作法,尺规作图,图的颜色多项式,数 e 与 π 的超越性,用根式解方程的可能性,多项式的丢番图方程,等差数列的范·德·瓦尔登定理,以及一些数学术语的起源.

在各章中可以查到相应的概念的定义.如果遇到不熟悉的符号,请参看本书开头的符号表.

在以下网址可以找到本书的电子版:<http://www.mccme.ru/prasolov/>.

作者

2016. 10

符号表

GCD	最大公约数	
LCM	最小公倍数	
$[x]$	x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数	
$\{x\}$	x 的小数部分, 即 x 与它的整数部分之差	
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$	
$(2n)!!$	$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n$	
$(2n+1)!!$	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)$	
$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$	二项式系数	
$\equiv$	对模同余	
$d n$	d 整除 n	
$\lim$	极限	
$\sum$	求和	
$\prod$	求积	
$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 或 $\min(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最小的数	
$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 或 $\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$	$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的最大的数	

lg	以 10 为底的对数
ln	以 e 为底的对数(自然对数)
sgn	正负号函数
sh	双曲正弦
ch	双曲余弦
th	双曲正切
cth	双曲余切
Arsh	反双曲正弦
Arch	反双曲余弦
Arth	反双曲正切
Arcth	反双曲余切
$f'(x)$	函数 $f(x)$ 的导数
$\int$	积分

目 录

第1章 二次三项式	1
1.1 二次三项式的最小值	1
1.2 判别式	1
1.3 各种各样的问题	2
1.4 中间值定理	3
1.5 与二次曲线有关的方程	4
1.6 结式	4
解答	4
第2章 方程	11
2.1 变量替换	11
2.2 推测方程的根	11
2.3 带根号的方程	11
2.4 各种方程	12
解答	12
第3章 方程组	16
3.1 求出全部解	16
3.2 求实解	17
3.3 正解	18
3.4 方程组的解的组数	18
3.5 线性方程组	19
解答	21

第4章 整除性	27
4.1 偶数与奇数	27
4.2 欧几里得算法与算术基本定理	28
4.3 分解为素因子	29
4.4 整除性准则	29
4.5 最大公约数与最小公倍数	30
4.6 完全整除性	30
4.7 素数幂的整除性	31
4.8 除法的剩余	32
4.9 互素的数	33
4.10 素数	33
4.11 余数的运算	33
解答	34
第5章 恒等式	47
5.1 因式分解	47
5.2 证明恒等式	47
5.3 平方和	47
5.4 辅助的恒等式	48
5.5 分解有理函数	49
5.6 分解二次函数	49
5.7 有整数部分的恒等式	50
解答	50
第6章 有理数与无理数	57
6.1 数的比较	57
6.2 在分母中的无理数	57
6.3 有根号的恒等式	58
6.4 有理性与无理性的证明	59
6.5 共轭数	59
6.6 法里数列	60
6.7 有整数部分的问题	61
解答	61
第7章 文字题	71
7.1 不用计算的解答	71

7.2	计算	71
7.3	不等式	72
7.4	整数的近似	73
7.5	对应	73
	解答	74
第8章	不等式	78
8.1	不等式 $x + \frac{1}{x} \geq 2$	78
8.2	三角形不等式	78
8.3	柯西不等式	79
8.4	平均值不等式	79
8.5	有几何解释的不等式	80
8.6	循环不等式	81
8.7	各种不等式	81
8.8	凸性	83
8.9	赫尔德不等式与闵科夫斯基不等式	83
	解答	84
第9章	和与积的计算	97
9.1	等差数列与等比数列	97
9.2	改变求和的次序	98
9.3	和数 $S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$	98
9.4	分拆为数对	99
9.5	用两种方法计算同一个和数	100
	解答	100
第10章	多项式 I	106
10.1	分解为完全平方	106
10.2	多项式的根	106
10.3	多项式的系数	106
10.4	韦达定理	107
10.5	整除性	107
10.6	根的不等式	108
10.7	多项式的实根的个数	109
10.8	各种问题	109

10.9	插值多项式	110
10.10	有理函数	111
10.11	整值多项式	111
10.12	多元多项式	111
	解答	112
第 11 章	三角学	122
11.1	不等式与数的比较	122
11.2	三角恒等式	123
11.3	方程	123
11.4	与正多边形相关的正弦及余弦之和	123
11.5	和的计算与积的计算	124
11.6	$\cos n\varphi$ 及其他的表达式	125
11.7	辅助的三角函数	125
11.8	三角多项式	126
	解答	127
第 12 章	整数方程	140
12.1	毕达哥拉斯三元组	140
12.2	求出全部解	140
12.3	求出某些解	141
12.4	证明解的个数是有限的	141
12.5	佩尔方程	142
12.6	马尔可夫方程	142
	解答	143
第 13 章	数学归纳法	151
13.1	和的计算	151
13.2	不等式	151
13.3	恒等式的证明	152
13.4	各种问题	152
	解答	153
第 14 章	组合分析	158
14.1	组合分析基础	158
14.2	二项式系数的恒等式	159
14.3	算术中的牛顿二项式	159

14.4	算术中的组合分析	160
14.5	二项式系数的不等式	160
14.6	二项式系数的算术	161
14.7	容斥原理	161
14.8	模拟二项式系数	162
14.9	卡塔兰数	162
14.10	概率论基础	164
	解答	164
第 15 章	递推数列	179
15.1	一般性质	179
15.2	斐波那契数	179
15.3	斐波那契数与欧几里得算法	181
15.4	组合分析中的斐波那契数	181
15.5	特殊的递推数列	181
	解答	182
第 16 章	例子与构造	188
16.1	数组	188
16.2	无穷数列	188
16.3	操作系列	189
16.4	多项式与有理数	189
16.5	各种例子与构造	189
	解答	190
第 17 章	抽屉原理与极端性法则	195
17.1	除法的余数	195
17.2	各种问题	196
17.3	以有理数逼近无理数	196
17.4	极端性法则	197
	解答	198
第 18 章	不变量与半不变量	205
18.1	除法的余数	205
18.2	半不变量	206
18.3	排列的奇偶性	206
	解答	207

第 19 章	逻辑	212
19.1	逻辑问题	212
19.2	逻辑悖论	213
19.3	命题逻辑	214
	解答	215
第 20 章	策略、竞赛、表	218
20.1	策略的选择	218
20.2	转注	218
20.3	竞赛	219
20.4	称量	220
20.5	表	221
	解答	222
第 21 章	记数系统	230
21.1	最后一位数码	230
21.2	第一位数码	230
21.3	其他数码	231
21.4	数码之和	231
21.5	关于十进制记数法的各种问题	231
21.6	十进制分数的周期与循环整数	232
21.7	确定一个数的 d 进制数记法	233
21.8	二进制	233
21.9	其他记数系统	234
21.10	数的其他表示法	234
	解答	235
第 22 章	图	243
22.1	图的环	243
22.2	定向图	244
22.3	匹配	244
	解答	245
第 23 章	复数	248
23.1	复数的恒等式与不等式	248
23.2	棣美弗公式	249
23.3	单位根	249

23.4	多项式的根	251
	解答	252
第 24 章	用根式可解的方程	258
24.1	三次方程的解	258
24.2	三次多项式的判别式	259
24.3	四次方程的解	259
24.4	用根式可解的其他方程	260
	解答	260
第 25 章	数列的极限	265
25.1	极限的性质	265
25.2	魏尔斯特拉斯定理	266
25.3	极限的计算	267
25.4	数 e	269
25.5	共轭数	269
25.6	上确界	270
	解答	270
第 26 章	连续函数与间断函数	282
26.1	单调函数	282
26.2	周期函数	282
26.3	函数的极限	282
26.4	连续性	283
26.5	中值定理	284
26.6	闭区间上连续函数的性质	284
26.7	凸函数	285
26.8	一致连续性	286
26.9	有界变差函数	286
	解答	287
第 27 章	指数函数与对数函数	293
27.1	指数函数与对数函数的定义	293
27.2	指数函数	294
27.3	对数恒等式	294
27.4	不等式与数的比较	294
27.5	对数的无理数	295

27.6	几个重要的极限	295
27.7	双曲函数	295
	解答	296
第 28 章	导数	302
28.1	导数的定义	302
28.2	初等函数的导数	303
28.3	多项式的重根	303
28.4	多项式的导数	304
28.5	恒等式	305
28.6	切线与法线	305
28.7	在闭区间上的可微函数	306
28.8	不等式	307
28.9	洛必达法则	308
28.10	方程的根的个数	309
28.11	周期函数	309
28.12	正规化对称函数	309
28.13	代数函数与超越函数	310
28.14	泰勒公式	310
	解答	311
第 29 章	积分	332
29.1	不定积分	332
29.2	定积分	333
29.3	积分的计算	335
29.4	面积的计算	336
29.5	体积的计算	336
29.6	曲线的长度	337
29.7	曲面的面积	337
29.8	不等式	338
29.9	极限的计算	339
29.10	恒等式	339
29.11	例子与构造	340
29.12	反常积分	340
	解答	340

第 30 章	级数	354
30.1	无穷和的计算	354
30.2	无穷乘积的计算	354
30.3	调和级数	354
30.4	关于对数的级数	356
30.5	关于数 π 的级数	356
30.6	复域中的指数	357
30.7	不等式的证明	357
30.8	收敛的级数与发散的级数	357
30.9	无穷乘积的收敛性	358
	解答	358
第 31 章	数论基础	369
31.1	费马小定理	369
31.2	伪素数	369
31.3	欧拉函数	369
31.4	威尔逊定理	370
31.5	同余问题	370
31.6	函数 $\sigma_k(n)$. 因数	371
31.7	平方剩余	372
31.8	二次互反律	373
31.9	高斯和	375
31.10	两个平方之和	375
31.11	四个平方之和	376
31.12	素数模的原根	377
31.13	合数模的原根	378
31.14	关于素数的切比雪夫定理	378
	解答	379
第 32 章	多项式 II	402
32.1	根的隔离	402
32.2	不可约多项式	403
32.3	对称多项式	406
32.4	切比雪夫多项式	408
32.5	代数数与超越数	410

32.6	添加多项式的根	411
	解答	412
第 33 章	算法与计算	425
33.1	一些数的计算	425
33.2	算术运算、多项式	425
33.3	分类	426
33.4	公钥密码学	427
	解答	428
第 34 章	函数方程	434
34.1	代换法	434
34.2	任意函数的函数方程	434
34.3	连续函数的函数方程	435
34.4	可微函数的函数方程	436
34.5	多项式的函数方程	436
	解答	437
第 35 章	连分数	447
35.1	定义与基本性质	447
35.2	最佳逼近	448
35.3	连分数与佩尔方程	449
	解答	449
第 36 章	形式级数与函数	455
36.1	形式级数	455
36.2	形式导数	455
36.3	形式级数的根	456
36.4	指数与对数	456
36.5	形式级数的恒等式	457
36.6	生成函数	458
36.7	伯努利数与伯努利多项式	458
36.8	分拆的个数	459
36.9	华林公式	460
	解答	460
第 37 章	有限差分的计算	472
37.1	有限差分的性质	472