上海大学出版社

2005年上海大学博士学位论文 38

一阶椭圆型方程组边值问题的理论和数值计算

● 作 者： 宋　洁

● 专 业： 计 算 数 学

● 导 师： 李 明 忠

上海大学出版社

2005年上海大学博士学

一阶椭圆型方程组边值问题的理论和数值计算

● 作者：宋　洁

● 专业：计算数学

● 导师：李明忠

A Dissertation Submitted to Shanghai University
for the Degree of Doctor (2005)

On the Theory and Numerical Computation for the First Order Elliptic Systems

Candidate: Song Jie
Major: Computational Mathematics
Supervisor: Li Mingzhong

Shanghai University Press
· Shanghai ·

摘　要

本文主要研究一阶椭圆型方程组的非线性 Riemann 边值问题和 Riemann-Hilbert 边值问题，并利用边界元方法讨论广义解析函数(一阶椭圆型方程组的一种特殊形式)的 Riemann-Hilbert 边值问题.

对于一阶椭圆型方程组的 Riemann 边值问题，是通过把它们转化为与原问题等价的奇异积分方程，利用广义解析函数理论、奇异积分方程理论、压缩原理或广义压缩原理，证明在某些假设条件下所讨论问题的解的存在性；对于一阶椭圆型方程组的 Riemann-Hilbert 边值问题，利用广义解析函数理论、Cauchy 积分公式、函数论方法和不动点原理，证明在某些假设条件下所讨论问题的可解性；广义解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题的边界元方法是利用广义解析函数的广义 Cauchy 积分公式，引入 Cauchy 主值积分，通过对区域边界的离散化，得到边界积分方程，再利用边界条件得到问题的解.

本文的难点是方程的非线性或边界条件的非线性性，在证明奇异积分方程的解的存在性时，要进行模的估计，此估计过程是一个复杂的计算过程. 广义解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题的边界元方法是以 Cauchy 公式为基础，Cauchy 核具

有奇性，这是所面临的困难，可以设法利用 Cauchy 主值积分来解决，最后给出问题的解.

关键词： 一阶椭圆型方程组，Riemann 问题，Riemann-Hilbert 问题，奇异积分方程，边界元方法

Abstract

The dissertation discusses the Nonlinear Riemann boundary value problems and the Riemann-Hilbert boundary value problems for the first order elliptic systems, and discusses the Riemann-Hilbert boundary value problems for the generalized analytic function (an especial form of the first order elliptic systems) by means of the boundary element method.

For the Riemann boundary value problems for the first order elliptic systems, we translates them to equivalent singular integral equations and proves the existence of the solution to the discussed problems under some assumptions by means of generalized analytic function theory, singular integral equation theory, contract principle or generaliezed contract principle; for the Riemann-Hilbert boundary value problems for the first order elliptic systems, we proves the problems solvable under some assumptions by means of generalized analytic function theory, Cauchy integral formula, function theoretic approaches and fixed point theorem; the boundary element method for the Riemann-Hilbert boundary value problems for the generalized analytic function, we obtains the boundary integral equations by means of the generalized Cauchy integral formula of the

generalized analytic function, introducing Cauchy principal value integration, dispersing the boundary of the area, and we obtains the solution to the problems using the boundary conditions.

The difficulty of the dissertation is the nonlinear of the equations or the boundary conditions. When proving the existence of the solution to the singular integral equation, we must estimate the norm of the operators, the process of the estimation is a complicated process. The boundary element method for the Riemann-Hilbert boundary value problems for the generalized analytic function uses Cauchy integral formula as the foundation. The singularity of the Cauchy kernel is the difficulty we are facing, we give the solution to the problems by intruduing Cauchy principal value integration.

Keyword: the first order elliptic systems, Riemann problem, Riemann-Hilbert problem, singular integral equation, boundary element method

目　录

第一章　前言 …………………………………………………… 1

第二章　一阶椭圆型方程组及边值问题 ………………………… 4
2.1　一阶椭圆型方程组 ………………………………………… 4
2.2　边值问题 …………………………………………………… 6
2.2.1　解析函数的 Riemann 边值问题 ………………… 6
2.2.2　解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题 ……… 6
2.2.3　广义 Riemann-Hilbert 边值问题 ……………… 7

第三章　一阶椭圆型方程组的 Riemann 问题 ………………… 8
3.1　广义解析函数的非线性 Riemann 问题 ……………… 8
3.2　一般形式的一阶椭圆组的非线性 Riemann 问题 …… 14
3.2.1　线性方程的非线性 Riemann 问题 ……………… 14
3.2.2　拟线性方程的非线性 Riemann 问题 …………… 19
3.3　索伯列夫空间 $W_{1,p}(D)$中的非线性椭圆组的非线性 Riemann 边值问题 ………………………………… 22
3.3.1　问题的提出 ………………………………………… 22
3.3.2　微分方程转化为积分方程 ………………………… 23
3.3.3　积分方程组的解 …………………………………… 24
3.3.4　非线性 Riemann 边值问题 ……………………… 26

第四章　一阶椭圆型方程组的 Riemann-Hilbert 问题 ……… 32
4.1　一阶椭圆组的 Riemann-Hilbert 问题 ……………… 32
4.2　一般形式的一阶拟线性椭圆组的非线性 Riemann-

Hilbert 问题 …… 40
4.2.1 问题的提出和等价的积分方程的建立 …… 40
4.2.2 定理的证明 …… 42
4.3 平面上一阶椭圆型方程组的广义 Riemann-Hilbert 问题 …… 53
4.3.1 问题的提出 …… 53
4.3.2 化非齐次 Riemann-Hilbert 问题为等价的非齐次 Riemann 问题 …… 53
4.3.3 齐次 Riemann-Hilbert 问题的解 …… 56
4.3.4 一般一阶线性椭圆型方程的非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题 …… 62
4.3.5 对非线性边界条件情形的推广 …… 64

第五章 广义解析函数 Riemann-Hilbert 边值问题的边界元方法 …… 67
5.1 广义解析函数 …… 67
5.2 广义解析函数的广义 Cauchy 积分公式 …… 68
5.3 复变量边界积分方程 …… 70
5.4 边界元方程 …… 71
5.5 举例 …… 74

参考文献 …… 79
作者在攻读学位期间公开发表的论文 …… 85
致　谢 …… 86

第一章 前　　言

随着自然科学、工程技术、人类社会的发展与变革，人们对自然界、人类社会的认识经历了由感性到理性、由定性到定量、由表及里的深刻变化，人们已经解决了许许多多的科学之谜，获得了一项项科学技术成就，但人们的认识在许多领域远未达到全面而深刻的程度．众所周知，来源于地质勘探、无损探伤、CT 技术、军事侦探、环境治理、遥感遥测、信号处理、控制论、经济学等的许多问题都可以从数学上归结为偏微分方程组的边值问题，而这些问题是当今世界十分重要而又极其困难的课题，对这些问题的研究与解决将直接提升国家的科学技术水平甚至综合国力，特别对我国这样一个发展中国家，倡导边值问题的研究具有非常重要的意义．

对边值问题的研究可分为理论研究与实际应用两方面，地质、工程、医学、军事、环境、遥测、通信、控制、气象、经济等领域着重实际应用，而数学研究着重问题的机理、理论和方法．在数学上，偏微分方程边值问题的研究是应用数学与计算数学的一个重要研究方向．从纵向看，偏微分方程的边值问题的研究是伴随着微积分的诞生而出现的，如 Bernoulli 最速降线问题、简谐振动、热传导等，解决的问题往往简单而且初步，低维、线性的问题容易求解，由于受到当时科学技术水平的限制，特别是试验、测量和计算条件的限制，人们只能解决一些经典的问题．时间推到 20 世纪，数学有了很大发展，特别是 20 世纪中叶以来，现代数学、计算理论、传感器、计算机的飞速发展，为偏微分方程的边值问题的提出与解决提供了强有力的手段，这些问题是非线性的、高维的、不适定的．但是到目前为止，这些问题还远未达到圆满解决的程度．世界上有许多国家的科学家从事偏微分方程边值问题理论与方法的研究，主要集中于机理分析、理论方法的探索、

算法设计和数值试验等，在20世纪中取得了丰富、系统、深入的进步和杰出成果. 在20世纪80年代和90年代;我国科学家在偏微分方程边值问题的研究领域颇有建树，有一些方面处于国际领先地位. 有人预言：偏微分方程边值问题的研究在21世纪将有突破性的进展，偏微分方程边值问题的研究成果将伴随着人们的工作和生活，人们正在并将进一步享受这一文明成果.

苏联著名数学家I. N. Vekua院士[1]和美国著名数学家L. Bers教授[2]创建的广义解析函数理论的研究领域，在苏联、美国、德国及西欧等世界各地得到广泛而深入的发展，并在物理学、力学和工程技术中得到了有效的应用. 在我国也有不少数学工作者在从事这方面的研究，并取得了可喜的成果[3]～[5]，受到国际上同行的重视. 一阶、二阶椭圆型方程组的基本理论与边值问题的研究方面也硕果累累[3]，[6]～[20]，他们所做的工作主要是线性方程或非线性方程的线性边值问题，在以上研究的基础上，我进一步对一阶椭圆型方程组的非线性Riemann和Riemann-Hilbert边值问题进行研究，并采用复变量形式的边界元方法来研究广义解析函数的Riemann-Hilbert边值问题.

边界元法是继有限元法之后的一种别具特色的新的数值方法，它是将描述力学问题的偏微分方程边值问题化为边界积分方程并吸收有限元法的离散化技术而发展起来的. 将力学问题归结为求解一组边界积分方程，这就是边界积分方程方法. 边界积分方程有奇异性，解析求解极为困难. 边界元法中有有限元法的思想，它把有限元法的按求解域划分单元离散的概念移植到边界积分方程方法中，但边界元法不是有限元法的改进或发展，边界元法与有限元法存在着质的差异.

有限元法要在整个求解域上进行离散，边界元法只在求解域的边界上进行离散. 有限元法是完全的或全域的数值方法，而边界元法在域内采用了力学基本解和Somigliana积分，数值计算只是在边界上进行，它属于半解析半数值方法论. 不难看到，边界元法具有有限

元法所没有的优点.

现在边界元法的发展已涉及工程和科学的很多领域,几乎可以解决所有的有限元法能够解决的问题. 对线性问题,边界元法的应用已经规范化;对非线性问题,其方法亦趋于成熟.

在工程和工业技术领域,边界元法的应用已涉及水工、土建、公路、桥梁、机械、电力、地震、采矿、地质、汽车、航空、结构优化等诸方面.

用边界元法求解偏微分方程的边值问题通常分作两类:一类是实变量边界元法,是从 Green 公式出发,导出问题的边界积分方程;另一类是复变量边界元法,它以 Cauchy 公式为基础. 目前实变量边界元法已有较多的资料([22]~[48]),但对于复变量边界元法的应用([28],[49]~[51])却讨论得比较少,我在此主要是以 Cauchy 公式为基础讨论广义解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题.

以 Cauchy 公式为基础, Cauchy 核具有奇性,这是所面临的困难,可以设法利用 Cauchy 主值积分来解决,最后给出问题解的方法.

第二章 一阶椭圆型方程组及边值问题

2.1 一阶椭圆型方程组

力学、物理学、工程机械等领域的许多问题都可以归结为一阶椭圆型方程组.考虑一阶方程组(参考文献[1])

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y}+b_{11}\dfrac{\partial v}{\partial x}+b_{12}\dfrac{\partial v}{\partial y}+a_1u+b_1v=f_1 \\ a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y}+b_{21}\dfrac{\partial v}{\partial x}+b_{22}\dfrac{\partial v}{\partial y}+a_2u+b_2v=f_2 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 a_{ik}, b_{ik}, a_i, b_i, f_i 是某一域 G 内两个自变量的已知函数.对应于这一方程组的二次型为

$$F \equiv a\,dx^2+2b\,dx\,dy+c\,dy^2 \tag{2.1.2}$$

其中

$$a=\frac{a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12}}{\Delta},\quad c=\frac{a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11}}{\Delta} \tag{2.1.3}$$

$$b=-\frac{1}{2\Delta}(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{22}b_{11})$$

$$\Delta=(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})(a_{11}b_{21}-a_{21}b_{11})-\frac{1}{4}(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{22}b_{11})^2 \tag{2.1.4}$$

二次型 F 当且仅当 $a>0$，$\Delta>0$ 时是正定的. 在这种情形称方程组(2.1)为椭圆型方程组. 从条件 $\Delta>0$ 推出 $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}\neq 0$. 否则就会有 $b_{11}=\mu b_{12}$，$b_{21}=\mu b_{22}$，于是

$$\Delta=-\frac{1}{4}(a_{11}b_{22}-a_{21}b_{12}+a_{12}b_{21}-a_{22}b_{11})^2\leqslant 0.$$

所以我们永远可以将方程组(2.1.1)化为下面的一般形式：

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial v}{\partial y}+a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial y}+a_1u+b_1v=f_1\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y}+a_2u+b_2v=f_2\end{cases}\tag{2.1.5}$$

在这种情形下的椭圆型条件取以下形式：

$$a_{11}>0,\Delta=a_{11}a_{22}-\frac{1}{4}(a_{12}+a_{21})^2\geqslant\Delta_0>1\tag{2.1.6}$$

$$\Delta_0=\text{常数}$$

引进 $w=u+\mathrm{i}v,z=x+\mathrm{i}y$，方程组(2.1.5)可以化为以下的复形式，即复形式的一般形式的一阶椭圆型方程组(参考文献[3])：

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}-q_1(z)\frac{\partial w}{\partial z}-q_2(z)\frac{\partial\overline{w}}{\partial\bar z}+A(z)w+B(z)\overline{w}=F(z)\tag{2.1.7}$$

其中

$$|q_1(z)|+|q_2(z)|=\frac{\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2-4\Delta}+\sqrt{(1+\delta)^2-4\Delta}}{1+a_{11}+a_{22}+\delta}\tag{2.1.8}$$

$$\delta=\Delta+\frac{1}{4}(a_{21}-a_{12})^2.$$

由椭圆型条件(2.1.6)得

$$|q_1(z)|+|q_2(z)|\leqslant q_0<1,\ q_0=\text{常数} \tag{2.1.9}$$

系数 $q_1(z)$ 和 $q_2(z)$ 是在域 G 上满足条件(2.9)的可测函数，而 $A(z),B(z),F(z)$ 为属于 $L_{p,2}(G)(p>2)$ 类的函数.

2.2 边值问题

2.2.1 解析函数的 Riemann 边值问题

求一个包括无穷远点在内的分块解析函数 $\Phi(z)$，它在围道 Γ 上满足边界条件(参考文献[52])

$$\Phi^+(t)-G(t)\Phi^-(t)=g(t) \tag{2.2.1}$$

称此边值问题为单连通区域上的 Riemann 边值问题. 其中 $G(t)$ 称为这个问题的系数，它在 Γ 上满足 Hölder 条件，$g(t)$ 为自由项. 当 $g(t)\equiv 0$ 时，称此边值问题为齐次 Riemann 边值问题.

若设 G^+ 是复平面 E 上由有限、封闭、不相交曲线 $\Gamma_k\in C^{1,\alpha}$，$k=0,\cdots,m$ 围成的多连通区域，Γ_0 把其余曲线包含在它内部. 我们记 G^+ 的补集为 G_k^-，$k=0,\cdots,m$ 且 G_0^- 是无界的. 记 $G^-=\bigcup\limits_{k=0}^{m}G_k^-$. Γ_0 的逆时针方向是正方向，而其它 Γ_k 顺时针方向为正方向. 如果 $w(z)$ 是定义在 $E-\Gamma$ 上的分块解析函数，其中 $\Gamma=\bigcup\limits_{k=0}^{m}\Gamma_k$，则对 $t\in\Gamma$ 我们记 $w^+(t)$ 为 $w(z)$ 当 z 从 G^+ 内部趋于 t 时的极限(如果存在)，同样记 $w^-(t)$ 为 $w(z)$ 当 z 从 G^- 内部趋于 t 时的极限. $w(z)$ 在围道 Γ 上满足边界条件

$$w^+(t)-G(t)w^-(t)=g(t) \tag{2.2.2}$$

称此边值问题为多连通区域上的 Riemann 边值问题.

2.2.2 解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题

在由一条简单的光滑闭围道 Γ 所围成的区域 D^+(有界的或有无

界的)内，求一个在 D^+ 内解析、在 $D^+ + \Gamma$ 上连续的函数 $\Phi(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$，使在 Γ 上满足边界条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t) + \mathrm{i}b(t)]\Phi^+(t)\} = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t) \tag{2.2.3}$$

其中 $a(t)$，$b(t)$ 和 $c(t)$ 都是给定在 Γ 上满足 Hölder 条件的实函数，此边值问题称为 Riemann-Hilbert 边值问题. 如果 $c(t) \equiv 0$，称此边值问题为齐次 Riemann-Hilbert 边值问题.

2.2.3 广义 Riemann-Hilbert 边值问题

要求在域 G 内找方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\overline{w} = F(z),\ z \in G \tag{2.2.4}$$

的解 $w(z) = u + \mathrm{i}v$，使它满足边界条件

$$\alpha u - \beta v \equiv \mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}w] = \gamma(z),\ z \in \Gamma,\ \lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \tag{2.2.5}$$

当 $A \equiv B \equiv F \equiv 0$ 时，这就是熟知的关于解析函数的 Riemann-Hilbert 边值问题. 因此我们称问题(2.2.4)～(2.2.5)为广义 Riemann-Hilbert 边值问题. 当 $F \equiv \gamma \equiv 0$ 时，称它为齐次问题.

第三章　一阶椭圆型方程组的 Riemann 问题

3.1　广义解析函数的非线性 Riemann 问题

设 G^+ 是复平面 E 上由有限、封闭、不相交曲线 $\Gamma_k \in C^{1,\alpha}$，$k = 0, \cdots, m$ 围成的多连通区域，Γ_0 把其余曲线包含在它内部. 我们记 G^+ 的补集为 G_k^-，$k = 0, \cdots, m$ 且 G_0^- 是无界的. 记 $G^- = \bigcup\limits_{k=0}^{m} G_k^-$. Γ_0 的逆时针方向是正方向，而其它 Γ_k 顺时针方向为正方向. 如果 $w(z)$ 是定义在 $E-\Gamma$ 上的函数，其中 $\Gamma = \bigcup\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$，则对 $t \in \Gamma$ 我们记 $w^+(t)$ 为 $w(z)$ 当 z 从 G^+ 内部趋于 t 时的极限(如果存在)，同样记 $w^-(t)$ 为 $w(z)$ 当 z 从 G^- 内部趋于 t 时的极限.

下面提出我们要考虑的广义解析函数(参考文献 [1])的非线性 Riemann 问题.

问题 R：在 $G^+ \cup G^-$ 内寻找方程

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0 \tag{3.1.1}$$

的解 $w(z)$，它在 $\overline{G^+} = G^+ \cup \Gamma$ 和 $\overline{G^-} = G^- \cup \Gamma$ 内 Hölder 连续，$\bar{z}$ 的偏导数在 $L_{p,2}(E)(p > 2)$ 内，在无穷远处为零，并且在 Γ 上满足跳跃条件

$$w^+(t) - G(t)w^-(t) = \mu g(t, w) \tag{3.1.2}$$

其中 μ 是一个正常数.

假设：