数 值 分 析

（一）

南京航空学院翻印

1974.8.

毛主席语录

"任何一种东西，必须能使人民群众得到真实的利益，才是好东西。"

"不要把分数看重了，要把精力集中在培养分析问题和解决问题的能力上，不要只是跟在教员的后面跑，自己没有主动性。"

目　　录

第一章 插值

引言： 上海某船厂设计生产了一种中速柴油机，为了改进和提高柴油机排气阀的质量，要知道排气阀在工作时的内部温度分布，也就是要知道内部每一个点上的温度值多少。气阀形状如图一1因为它的各点环境和条件不一样，因此温度不会是常数，也就是不会每点都一样。怎样才能知道内部各点的温度呢？数学上已经研究出一种办法，只要知道物体表面上的温度，即边界条件，可以推算出内部的各点温度，对于气阀来说，它是轴对称的。用中心轴线作为Z一轴：取柱面坐标下，每点坐标为（Y.Z.θ），气阀表面坐标Z（Y，θ），当取定Y时，θ不管取什么值Z（Y.θ）值都一样的，这就是气阀形状是轴对称的。

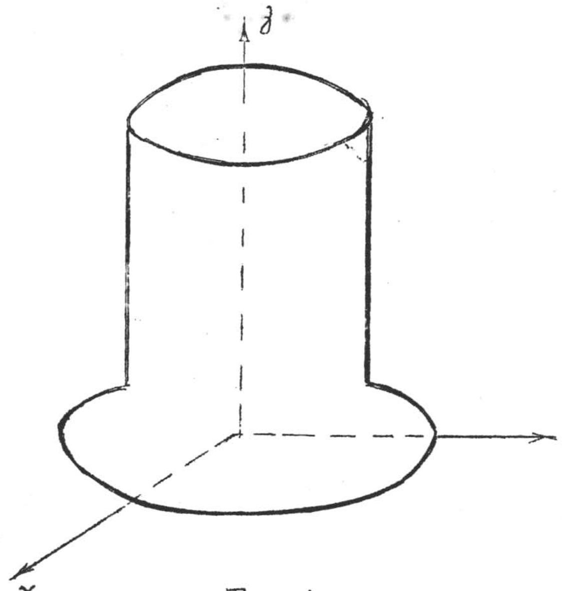
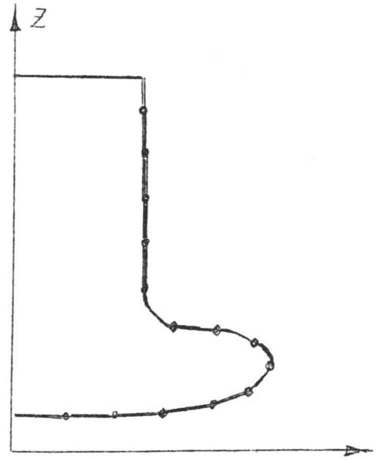


图 1

在气阀工作时它的环境和条件也可以假设为轴对称的，因此它表面上的各点的温度T（Y，Z，θ），对于取定的 Y，Z，对不同的θ，T（Y，Z，θ）都相同。因此要知道气阀内部的温度只要知道气阀在一个Y一Z平面上图形的边界上每一点的温度。这个图形如图一2。（见下页）边界就是粗线表示的部分。但是边界上温度怎么才能知道呢？气阀又不是液体的，无法拿温度计量，而且又在工作的，每分钟上下数百次。厂里的工人老师付想出一个办法，凿小孔，用导线接热电偶的办法，可以测量一些点（如图中打圈的点）的温度，这给计算提供了第一手材料，但是粗线条上，

其他点的温度怎么知道呢？实践上经常会碰到这种离散和连续的矛盾。

恩格斯教导我们："在进行较精确的考察时，我们也发现某种对立的两极，例如正和负，是彼此不可分离的，正如它们是彼此对立的一样，而且不管它们如何对立，它们总是互相渗透的"。



图一2

毛主席教导我们："矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方向转化。"

离散和连续这样一对矛盾，双方是可以互相转化，当然从离散转化成连续，是要有条件的。

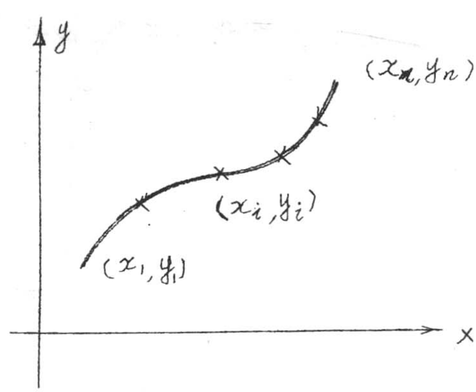
我们这一章介绍的多项式插值法，就是在一定的函数光滑性条件和误差条件下，将离散的转化成连续的一种办法。

§1 多项式插值

已知在X－Y平面上几个点，要求找一条曲线通过这些点，并把这条曲线对应的函数的表达式写出来。

记给定的点为(x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，通过这些点的函数就是要求满足下面条件的函数$p(x)$：

$$p(x_i)=y_i, \quad i=1, 2, \cdots, n. \quad (1)$$



这种函数有很多很多（这是为什么？）。我们要找一个跟实

际情况比较符合的，计算比较方便的函数。这一节介绍多项式插值，就是找一个 $P(x)$ 多项式，使满足(1)。

给定 n 个点，找一个次数大于等于 n 的多项式，满足条件(1)，仍然是有很多很多。因为任何一个多项式 $p(x)$ 满足关系(1)的话，那么

$$p(x)+K(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$$

也是满足关系(1)的。这里 K 是任意常数。

次数越高的多项式计算越烦，所以我们要求次数尽可能低的多项式，当然可以限制所求的多项式的次数不超过 $n-1$.

所以我们的问题变成，要找一个 $(n-1)$ 次的多项式

$$p(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$$

使满足条件(1)。

解决这个问题最直观的办法是按条件(1) 列出 $a_0, a_1, \cdots\cdots,$ a_{n-2}, a_{n-1} 的方程；即

$$a_0x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+a_2x_1^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x_1+a_{n-1}=y_1$$

$$a_0x_2^{n-1}+a_1x_2^{n-2}+a_2x_2^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-2}x_2+a_{n=1}=y_2$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$a_0x_n^{n-1}+a_1x_n^{n-2}+a_2x_n^{n-3}+\cdots\cdots+a_{n-2}x_n+a_{n-1}=y_n$$

这里有 n 个方程，n 个未知量，在什么情况下可以求解？我们指出这个方程是唯一的解的。但是计算太复杂，特别当 n 比较大时，所以我们不从这里来求 $p(x)$，另想别的办法。

多项式

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_i-x_j)}$$

是 $n-1$ 次多项式，有特点：

$$l_i(x_i)=1,\quad l_i(x_K)=0,\text{当}\quad x_K\neq x_i\text{时},$$

满足

$$p(x_1)=y_1,\ p(x_2)=0,\ \cdots\ p(x_n)=0$$

的 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 就是 $y_1 l_1(x)$，同样满足

$$p(x_1)=0,\ p(x_2)=y_2,\ p(x_3)=0,\ \cdots,\ p(x_n)=0$$

的 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 就是 $y_2 l_2(x)$，

所以 $l_i(x)$，相当于坐标向量，满足条件(1)的 $n-1$ 次多项式 $p(x)$ 就是

$$L_n(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i l_i(x)$$

这个 $L_n(x)$ 在外国书上称为拉格朗日(Lagrange)插值多项式。

上面这种办法我们称它为取坐标向量法，以后我们还会遇到。这是怎么想出来的，实际上还是从简单的情况抽象出来的。例如当 $n=2$ 的情况，过 (x_1, y_1), (x_n, y_2) 要找一个一次多项式 $a_0 x+a_1$

$$a_0 x_1+a_1=y_1$$
$$a_0 x_2+a_1=y_2$$

解

$$a_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\qquad a_1=\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$$

于是这

$$p(x)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x+\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$$

$$=y_2\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)+y_1\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}$$

$$l_1(x)=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\quad\text{满足}\quad l_1(x_1)=1,\ l_1(x_2)=0;$$

$$l_2(x)=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\quad\text{满足}\quad l_2(x_1)=0,\ l_2(x_2)=1;$$

所以 y_1，y_2 的系数就是坐标向量那样的函数，将这种直观的

材料经过抽象就得到上述结果。

有了 $L_n(x)$，我们要计算 $x=a$ 时的函数值，只要计算 $L_n(a)$，计算的框图是

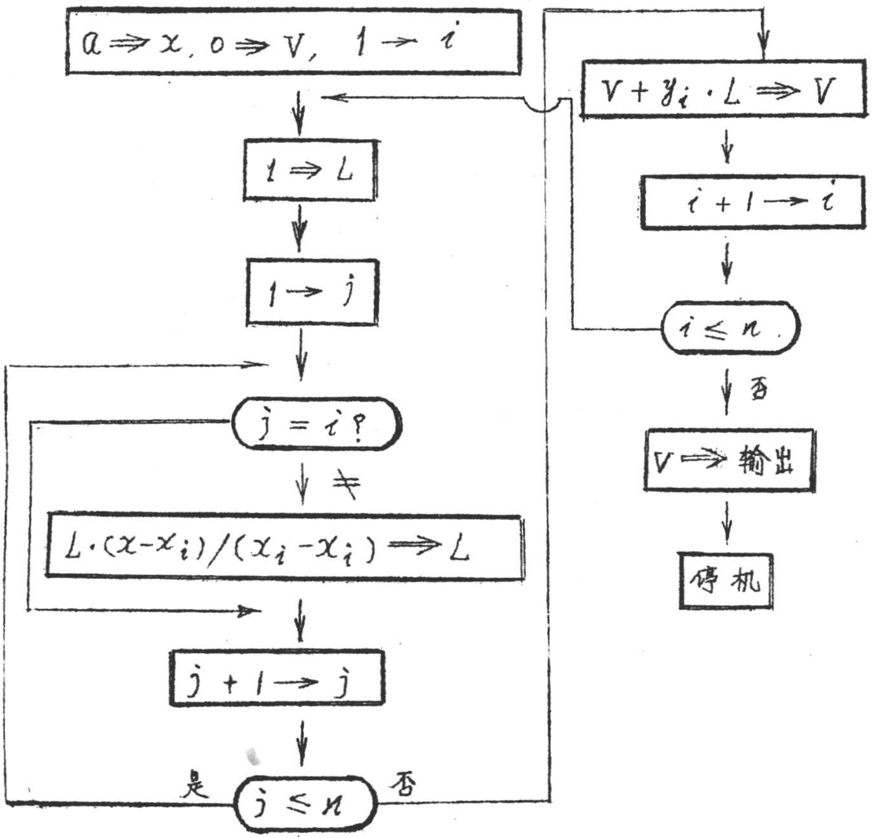


图 3

求满足条件(1)的 $n-1$ 次多项式 $P(x)$，还有一个方法。给定 n 个点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots$，(x_n,y_n) 这些点是在一个函数上的，也就是原来有一个函数 $f(x)$，使

$$f(x_1)=y_1,\ f(x_2)=y_2,\ ----,\ f(x_n)=y_n。$$

如果 $n=1$，只有一个点 (x_1, y_1)，找一个 $n-1$ 次多项式就是常数，我们记为 $P_0(x)$，满足条件(1)

$$P_0(x)=P(x_1)=f(x_i)=y_1\text{。}$$

$n=2$，找一个一次多项式 $P_1(x)$ 满足条件(1)，这样的 $P_1(x$ 与 $P_0(x)$ 之差

$$P_1(x)-P_0(x)=R(x)$$

是一个一次多项式 $R(x)$，$R(x)$ 有一个零点 x_1，因为

$$R(x_1)=P_1(x_1)-P_0(x_1)=y_1-y_1=0$$

所以 $R(x)=A(x-x_1)$

于是 $P_1(x)=P_0(x)+A(x-x_1)$

但 $P_1(x_2)=y_2$ 故

$$P_0(x_2)+A(x_2-x_1)=y_2$$

$$A=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 称为 $f(x)$ 在 x_2，x_1 上的一阶均差（或差商）·

$f(x_1,x_2)$；同样对任意两点 x_i，x_j 上的一阶均差为

$$f(x_i,x\ )=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$ 易知

$$f(x_i,x_j)=f(x_j,x_i)\text{。}$$

于是对于通过2个点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的一次多项式为

$$P_1(x)=f(x_1)+f(x_1,x_2)(x-x_1)$$

类似的 $f(x)$，在 x_1，x_2，x_3 上的二阶均差（差商）为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$$

当然在 x_i，x_j，x_K 上的二阶均差（差商）为

$$(x_i,x_j,x_K)=\frac{f(x_j,x_K)-f(x_i,x_j)}{x_K-x_i}$$

一般地来说 $K-1$ 阶均差定义以后，K 阶均差就定义如下：

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_K, x_{K+1})$$
$$=\frac{f(x_2, x_3, \cdots\cdots, x_K, x_{K+1})-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_K)}{x_{K+1}-x_1}$$

现在我们可以写出 n 个给定的点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_n, y_n)$ 满足条件(1)的 $n-1$ 次多项式为

$$P_{n-1}(x)=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i) \qquad (2)$$

这件事可以用数学归纳法证明。实际上，$n=1$，$n=2$ 已经在前面讲过，即(2)式对于 $n=1$，2 成立，今假设关系式(2)在 $n=K-1$ 时成立，我们来证明 $n=K$ 时也成立。先记通过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_{K-1}, y_{K-1})$ 的满足条件(1)的 $K-2$ 次多项式为 $P_{K-2}(x)$；通过 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_{K-1}, y_{K-1}), (x_K, x_K)$ 的 $K-1$ 次多项式为 $P_{K-1}(x)$；另外通过 $(x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots\cdots(x_{K-1}, y_{K-1})$，$(x_K, y_K)$ 的 $K-2$ 次多项式为 $\widetilde{P}_{K-2}(x)$。

$$R_1(x)=P_{K-1}(x)-P_{K-2}(x)$$

是一个 $K-1$ 次多项式，它有零点 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{K-1}$ 因此

$$R_1(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{K-1}),$$ 其中 A 是常数。

$$R_2(x)=P_{K-1}(x)-\widetilde{P}_{K-2}(x)$$

也是一个 $K-1$ 次多项式，它有零点 $x_2, \cdots\cdots, x_K$，因此

$$R_2(x)=B(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_K)$$

B也是常数。于是

$$p_{k-1}(x)=p_{k-2}(x)+A(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{k-1})$$
$$=\widetilde{p}_{k-2}(x)+B(x-x_2)(x-x_3)\cdots\cdots(x-x_k)$$

同一个 $p_{k-1}(x)$，它的首项系数即 x^{k-1} 的系数一定只有一个，因此

$$A=B$$

另一方面 $p_{k-1}(x)$ 的首项系数即 x^{k-2} 的系数按归纳法的假设为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1})$；$\widetilde{p}_{k-2}(x)$ 的首项系数按归纳法的假为 $f(x_2, x_3, \cdots\cdots, x_k)$，比较 $p_{k-1}(x)$ 两个等式的 x^{k-2} 的系数即得

$$f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1})-A(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{k-1})$$
$$=f(x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{k-1}, x_k)-B(x_2+x_3+\cdots\cdots+x_k)$$

由 $A=B$ 即得

$$A(x_k-x_1)=f(x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{k-1}, x_k)-$$
$$-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1})$$

$$A=\frac{f(x_2, x_3, \cdots, x_{k-1}, x_k)-f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1})}{x_k-x_1}$$
$$=f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k)$$

所以

$$p_{k-1}(x)=p_{k-2}(x)+f(x_1, x_2, \cdots, x_k)\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)$$

按归纳法假设

$$p_{k-2}(x)=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+\cdots+f(x_1, x_2,$$
$$\cdots\cdots, x_{k-1})\prod_{i=1}^{k-2}(x-x_i)$$

所以

$$p_{k-1}(x)=f(x_1)+f(x_1, x_2)(x-x_1)+\cdots\cdots$$
$$\cdots+f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{k-1})\prod_{i=1}^{k-2}(x-x_i)。$$

由此证明了对于给定n个点的情况找满足条件(1)的$n-1$次多项式为

$$P_{n-1}(x)=f(x_1)+f(x_1,x_2)(x-x_1)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+f(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$$

这个公式称为牛顿(Ne ton)插值公式。

牛顿插值公式与前面拉格朗日插值公式实际上是一样的．因为都是通过n个点的$n-1$次多项式

$$P_{n-1}(x)-L_{n-1}(x)$$

是一个$n-1$次多项式，它在$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$上都等于零，因此$P_{n-1}(x)-L_{n-1}(x)$必须为零。也即二种插值多项式是一样的，但是表达形式（计算格式）不同。

牛顿插值公式的计算中，主要是计算各阶差商。差商的计算格式可以列表如下：

$$\begin{array}{lllll}
\underline{x_1\, f(x_1)} & & & & \\
 & \underline{f(x_1,x_2)} & & & \\
x_2\, f(x_2) & & \underline{f(x_1,x_2,x_3)} & & \\
 & f(x_2,x_3) & & \underline{f(x_1,x_2,x_3,x_4)} & \\
x_3\, f(x_3) & & f(x_2,x_3,x_4) & & \underline{f(x_1,x_2,x_3,x_4\,x_5)} \\
 & f(x_3,x_4) & & f(x_2,x_3,x_4,x_5) & \\
x_4\, f(x_4) & & f(x_3,x_4,x_5) & & \\
 & f(x_4,x_5) & & & \\
x_5\, f(x_5) & & & &
\end{array}$$

假如要求$x=a$处的函数值$f(a)$的近似值$p_{n-1}(a)$，只要将表中用横线标出的差商与对应的$(a-x_i)$的因子相乘，

$$p_{n-1}(a)=f(x_1)+f(x_1,x_2)(a-x_1)+\cdots+f(x_1,x_2,\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots,x_n)(a-x_1)(a-x_2)\cdots\cdots(a-x_{n-1})。$$

计算的工作量要比拉格朗日公式少，（为什么）．

下面介绍一个计算$p_{n-1}(a)$的算法语言程序。

$x_1, x_3, \cdots\cdots, x_n$存放在$x[1:n]$；$f(x_1),\cdots,f(x_n)$存放在$F[1:n]$；$f(x_1,x_2)$，$f(x_1,x_2,x_3),\cdots\cdots$，$\cdots\cdots, f(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n)$依次存放在$AA[1:n-1]$；结果

$p_{n-1}(a)$ 存放在y中

```
procedure Nin(X, F, AA, ; n, y, a);
aroy X, F, AA, ; integer n; real a, y;
value a; begin array A[1:n];
        for i:=1 step 1 until n do
        A[i]:=f[i];
        for K:=1 step 1 until n-1 do
    begin for i:=1 step 1 until n-K do
      A[i]:=(A[i+1]-A[i]/(x[i+K]-x[i]);
      AA[K]:=A[i]
      end;
      y:=0
      for K:=n-1 step 1 until 1 do
      y:=(y+AA[K])*(a-x[K]);
      y:=F[i]+y
      end;
```

现在我们讨论$f(x)$与$p_{n-1}(x)$之差，也就是来研究用$p_{n-1}(x)$来计称$f(x)$的误差问题。

在n个给定的点(x_1, y_1)，$(x_2, y_2)\cdots$，(x_n, y_n)再加上一个点$(Z, f(Z))$，通过这些点的n次的插值多项式应该是：

$$p_n(x)=f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x-x_i)+f(x_1, x_2, \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots x_n, z)\prod_{i=1}^{n}(z-x_i)$$

$$=p_{n-1}(z)+f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,z)\prod_{i=1}^{n}(z-x_i)。$$

但 $p_n(z)=f(z)$。故

$$f(z)=p_{n-1}(z)+f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n,z)\prod_{i=1}^{n}(z-x_i),$$

所以

$$f(z)-p_{n-1}(z)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,z)\prod_{i=1}^{n}(z-x_i).$$

因为z可以取与 $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n$ 不同的任意一个实 x，所以

$$f(x)=p_{n-1}(x)+f(x_1,x_2,\cdots,x_n,x)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\text{----}(3)$$

对于 x 不是 $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n$ 都成立，由 $p_{n-1}(x)$ 满足条件(1)所以(3)式对 x 在 $x_1, x_2\cdots\cdots, x_n$ 上也成立，这个误差估计依赖于差商 $f(x_1, x_2,\cdots\cdots, x_n, x)$ 不方便，我们把它与微商的联系提出来。

定理：差商

$$f(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n)=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\xi)\text{------}(4)$$

其中 ξ 满足

$$a=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)<\xi<\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)=b\text{------}(5)$$

证明：

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $p_{n-1}(x)$ 的首项系数。$f(x)-p_{n-1}(x)$ 有零点 $x_1, x_2,\cdots, x_n$，根据罗尔定理知道这个函数的一阶导数有 $n-1$ 个根在 (a,b) 中，再根据罗尔定理知道二阶导数有 $n-2$ 个根在 (a,b) 中，依此类推，知道 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数有一个根在 (a,b) 中，记这个根为 ξ，于是

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(f(x)-P_{n-1}(x)\right)\Big|_{\xi}=0$$

即
$$f^{(n-1)}(\xi)=P_{n-1}^{(n-1)}(\xi)$$
$$=(n-1)!\,f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

所以(4)和(5)成立。

这个定理的条件中当然要假定函数 $f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数存在且连续。

利用这个定理，从(3)可得

$$f(x)=P_{n-1}(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

$$\min(x_1,x_2,\cdots,x_n,x)<\xi<\max(x_1,x_2,\cdots,x_n,x)$$

比较一下泰勒级数

$$f(x)=f(x_n)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

可知牛顿插值公式与泰勒级数十分相似，泰勒级数是按一点 x_0 展开，牛顿插值公式是按一组点 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$ 展开，实际上牛顿插值公式是泰勒级数的展开。

现在来谈谈，多项式插值公式的应用。

一，函数 $f(x)$，要造一个函数表，一般形式如下：

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
⋮	⋮
x_i	$f(x_i)$
⋮	⋮

其中 $x_i = x_{i-1} + h$

h 是常数称为步长，很多函数表如三角函数，对数表等都是这种常数步长的函数表。

如果我们要查一个值 x 在 x_2 与 x_3 之间，那么就要作插值，造表的时候，要求这样的插值只要一次多项式插值就满足精确度的要求，这称为线性补插，也即我们通常用比例的办法作插值。这时候对步长 h 就会提出要求，即要要求步长足够小，究竟要多小，可由上面介绍的插值多项式的误差项来分析。

例如：要造一个 $\sin x$ 的表，误差要求小于 $\frac{1}{2}10^{-8}$，对于任意二点 x_i，x_{i+1} 之间，用一次插值多项式 $p_1(x)$ 代替 $\sin x$，有关系

$$\sin x - p_1(x) = \left[\frac{d^2}{dx^2}\sin x\right] / 2!\,(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\frac{d^2}{bx^2}\sin x = -\sin x,\quad 而\ |\sin x| \leqslant 1$$

所以误差项的绝对值

$$|\sin x - p_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|$$

又 x 在 x_i 与 x_{i+1} 之间可以表示成

$$x = x_i + th,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$t=0$ 对应的 x 为 x_i，$t=1$ 对应的 x 为 x_{i+1}

于是 $$\left|(x-x_i)(x-x_{i+1})\right| = \left|th(t-1)h\right| = \left|t(t-1)h^2\right|$$

但 $|t(t-1)|$ 最大值在 $t=\frac{1}{2}$ 时达到，此时 $t(t-1) = \frac{1}{4}$

所以 $$|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \leqslant \frac{1}{4}h^2$$

于是当

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \text{ 时}$$

$$|\sin x - P_1(x)| \leq \frac{1}{8} h^2$$

要 $\frac{1}{8} h^2 \leq \frac{1}{2} 10^{-8}$

即 $h^2 \leq 4 \times 10^{-8}$

$h \leq 2 \times 10^{-4}$

对于常用对数表函数 $\log_{10} x$ 来说

$$f(x) = \log_{10} x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$f'(x) = (\log_{10} e)\frac{1}{x},\ f''(x) = -(\log_{10} e)\frac{1}{x^2}$$

如果考虑 $x \in (1, 10)$ 之间造表要误差小于 $\frac{1}{2}10^{-7}$，步长 h 该满足关系式

$$\frac{1}{4} h^2 \cdot (\log_{10} e)\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{2} 10^{-7}$$

于是

$$h^2 \leq 2 \cdot 10^{-7} / \log_{10} e$$

$$h^2 \leq 2/0.432814 \times 10^{-7}$$

$$h \leq 6 \times 10^{-4}.$$

一般地说对于 $f(x)$ 的函数表，精确度为 $\frac{1}{2}10^{-5}$，则要能线性补插的条件是

$$\frac{1}{8} h^2 \cdot \max_{[x_i, x_{i+1}]} |f''(x)| \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$$

二．用插值公式求函数值

这个方法用的最多，实用上，所给出函数值的点的个数可很大，但插值的多项式阶不宜太高，这一方面因为阶越高，从差项 $\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$ 来看，知道要求函数光滑性越高，另一方面数高，多项式上下波动会励害，如图一4所示，因此实用上来分段低阶插值，通常用二阶，三阶插值，二阶插值就是用抛物