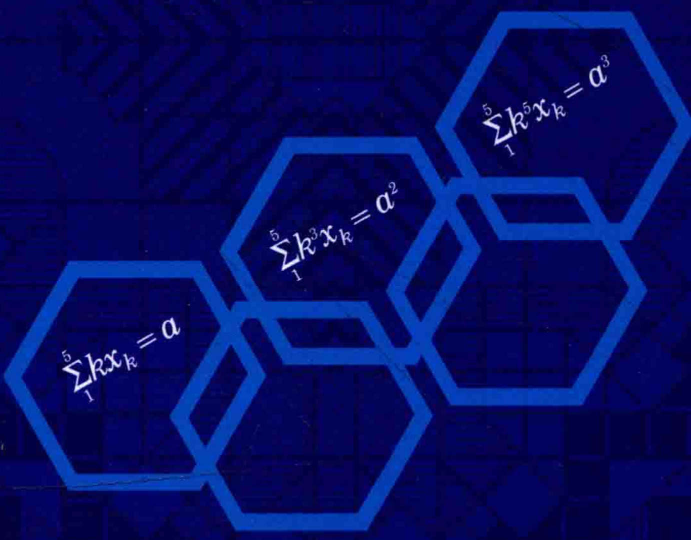
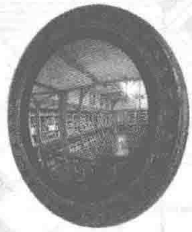
超越普特南试题：大学数学竞赛中的方法与技巧

[美] 勒兹万·吉尔卡
[美] 蒂图·安德烈埃斯库 著
郑元禄 译

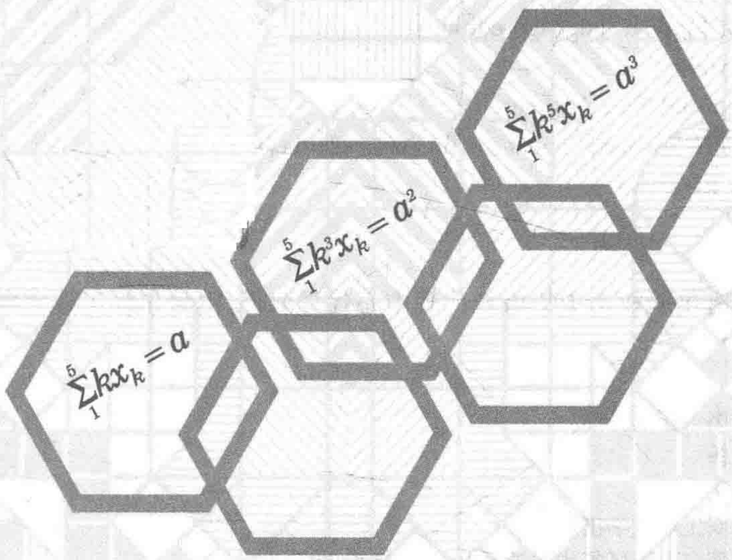


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



超越普特南试题：大学数学竞赛中的方法与技巧

[美] 勒兹万·吉尔卡
[美] 蒂图·安德烈埃斯库 著
郑元禄 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2015－059 号

内 容 简 介

本书共分 6 章，在每章中，按主题编排问题，并举例对理论进行说明. 一些问题是留给读者解答的，并且本书第 2 部分给出了完整解答.

本书可用来指导普特南数学竞赛的学习，并可用来提高大学数学的教学水平.

本书适合于普特南竞赛参赛者、高等院校相关专业教师、本科生、研究生使用.

图书在版编目(CIP)数据

超越普特南试题：大学数学竞赛中的方法与技巧/
(美)勒兹万·吉尔卡，(美)蒂图·安德烈埃斯库著；
郑元禄译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.5
书名原文：PUTANM and BEYOND
ISBN 978－7－5603－6489－6

Ⅰ.①超… Ⅱ.①勒… ②蒂… ③郑… Ⅲ.①数学－竞赛题－题解 Ⅳ.①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042293 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　曹　杨
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 45.75　字数 690 千字
版　　次　2017 年 5 月第 1 版　2017 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6489－6
定　　价　98.00 元

人生只有两种事业是美好的——发现数学与教数学。

S. Poisson

序

这部书具有大学水平，是为了指导普特南竞赛学习而写的. 本书是解答大学数学问题与研究数学问题之间的桥梁，是对掌握基本概念与扩展数学学习很有帮助的入门书. 所有这些要求读者耐心地研读以下书文.

威廉·罗维尔·普特南数学竞赛是最有声誉的世界级大学数学竞赛. 在历史上，这个一年一次的竞赛从 1938 年开始，是按照 W. L. 普特南的建议举行的，他意识到创办大学之间智力竞赛的价值. 现今有美国与加拿大 300 多所大学，2 500 多名学生参加了这个竞赛.

普特南的名字成为大学数学优秀生的代名词. 利用普特南竞赛作为标记，我们从一个单一的研究性的观点，奠定了高等数学的基础. 因此本书是通过大学数学进行世界之旅，它提供了大学学年鼓励性问题与科学研究要求的问题之间的联系，它引导大学生学会概念并获得解题策略，磨炼他们的解题技巧并检验他们所学的知识，寻找数学的联系与发现在现实世界的应用. 它的主要目的是为大学毕业生建立适当的数学或应用科学的知识基础.

我们的观点是，在数学中，理解“为什么”比知道“怎样”更重要. 因此我们坚持证明与推理. 正如罗马尼亚数学家 G. Moisil 曾经说过，数学表示“正确的推理”，数学思想方法在现代科学中是通用的.

本书首先把主要的普特南培训，解决问题的讨论会与具有大学水平的数学社团作为目标，弥补大学全部课程中的缺陷. 但是还要做更多的事. 本书采用教科书结构形式，但特别强调数学问题与专门作业写出的培训材料，它包含我们要求的大学数学中最重要的课题与技巧，把这些材料汇集成一本书，目的在于牢固对数学的整体性的信仰. 本书针对的读者具有与此主题密切相关的中学数学基础知识，且有一定的灵活性水平，所以本书在难度与深度上超过通常的教科书. 在编写培训材料时，我们受到了 G. O'Keeffe 的话的启发：“细节与混淆. 我们得出事物的实际意义正是用了选择

法、消去法和加强法.”

本书可以用来提高大学数学的教学水平. 因为它扩大了以下课程的问题数据库:实分析、线性代表、三角学、解析几何学、微分方程、数论、组合学与概率. 此外,研究生与教师一样可以用它来提高数学水平,因为可以在这里发现更多隐藏在初等数学语言中的高等数学概念,如 Gauss-Bonnet 定理,量子力学中误差的线性传播,纽结不变量和 Heisenberg 群. 本书中提供的思考方法打开了真正科学研究的大门.

至于数学问题,它们是数学竞赛的灵魂. 回忆一下,普特南竞赛分两部分,每个部分包含 6 个问题,编号为 A1 至 A6,B1 至 B6. 习惯上按难度增加的次序列出题目,其中 A1 与 B1 最容易,A6 与 B6 最难. 竞赛保持相同的难度上升模式,但是跨度范围从 A0 至 B7. 这表示我们从一个吸引人的低难度题目开始,向高难度题目前进.

本书利用普特南考试,国际大学生数学竞赛,国际数学奥林匹克,美国、罗马尼亚、俄罗斯、中国、印度与保加利亚的国家数学竞赛试题,数学杂志如 *American Mathematical Monthly*(美国数学月刊),*Mathematics Magazine*(美国数学杂志),*Revista Matematică din Timişoara*(*Timişpara* 数学学报),*Gazeta Matematică*(数学学报,布加勒斯特),*Kvant*(量子杂志,俄罗斯),*Kǒgépiskolai Matematikai Lapok*(高等学校数学杂志,布达佩斯),以及罗马尼亚出版的大量数学问题集作为问题的来源. 许多问题是作者们的创造性贡献. 只要有可能,我们就给出历史背景,并指出问题的出处与作者. 一些问题的出处很难找到,这就是我们向你们提供最好问题的原因. 另外一些出处是广泛流传的,我们只选出一些最有代表性的问题,以引起你们的注意.

本书内容的简单介绍. 第 1 章是引言,综述了广泛应用的方法. 其他 5 章反映数学各领域内容:代数学、实分析、几何学与三角学、数论、组合学与概率. 重点放在前两章,因为它们在大学生数学竞赛中占最大比例.

在每一章中,按主题编排问题. 我们已经用一个或更多详细例题来说明这些简单的理论基础. 一些问题是留给读者解答的. 并且因为我们的问题是难题,所以本书第 2 部分给出完整解答. 要十分小心选择最好的解法并把它们书写出来,以便激发想象并鼓励继续研究. 正如 A. Wiles 曾经说过:“我们已经根据数学的美来判断

它们的证明."

本书的第一作者是美国密歇根大学与德克萨斯工程大学竞赛团队,美国与印度国际大学生奥林匹克竞赛团队的教练;第二作者是美国国际数学奥林匹克竞赛团队总教练,美国数学竞赛主席,罗马尼亚国际数学奥林匹克竞赛团队教练,普特南数学竞赛数学问题编写委员会成员.

最后我们要为以下人士的建议与贡献,表示感谢:E. Johnston, D. Andrica, C. Jeuell, I. Acharya, B. J. Venkatachala, C. R. Pranesachar, B. Heath, M. Deaconescu, G. Dospinescu, R. Vakil, V. Grover, V. V. Acharya,美国与印度参加国际数学奥林匹克培训工作的大学生们. 我们尤其感谢 R. Stong, D. Kramer, P. Stanford,他们仔细地阅读了手稿,且大大改善了本书质量. 我们将高兴地接受更多的建议与修正,可以把您的建议发送到 rgelca @ gmail.com.

Răzvan Gelca
(德克萨斯工程大学)
Titu Andreescu
(在美国达拉斯的德克萨斯大学)
2007 年 5 月

学 习 指 导

本书有6章:证明的方法、代数学、实分析、几何学与三角学、数论、组合学与概率.其中又被分成线性代数、数列与级数、几何学与算术这些子章.所有子章是自给自足的,且彼此独立,可以按任何顺序学习.大多案例,反映了标准的大学课程或各数学领域.各子章中的各节按规定的顺序连接起来.

若你是正在试图获得某个数学领域的技巧或检验某个数学领域的知识的大学生,则先要学习正规的教科书,一定要做到很好地理解教科书.其次选择本书适当的章或子章,一节一节地学习.先阅读引言部分的理论基础知识与例题,然后做章节后的问题.按难度增加的顺序把它们列出一个表格,最初可能不易做到.要有信心,不要怕挫折,对每个问题努力地思考,只有所有这些努力都失败了,才去看书后的解答.但是即使你成功了,也要读这些解答,因为它们提供了新的视野,更重要的是,它们打开了走向更高深数学理论的大门.

请注意!每一节最后几个问题可能是很困难的.在初次遇到这些问题时跳过它们,当你更有经验时,再回到这些问题可能是个好主意.

若你是一位普特南竞赛参加者,则当你在学习本书时,要努力解答真正的普特南试题(已经出版了3册).查明你的不足之处,并一定要读它们在本书的有关章节.解答出一个问题后,要详细地写出解答,然后把它与本书后给出的解答比较.更重要的是,你的解答应当是正确的、具有构造性的、令人信服的,且容易仿效的.

教师可以把本书的一些问题加入正规课程,以鼓励与鞭策成绩较好的学生.一些理论题目也可以编入课程,以便给出较好的理解与新的观点.本书可以作为习题课的教材.在这种情形下,我们建议从第1章开始,并鼓励学生们把他们自己的解答写出来.

若你是大学数学系研究生,你要知道且理解本书的内容是最重要的.首先完全理解问题内容并写下论证过程,是很好地完成博

士考试不可缺少的事情. 其次,目前大多数研究生课程是积木结构,学会本书将使学习这些课程更自然与容易.

“别为了要比同辈或前辈更好而担心,要力求比你自己做得更好.”(W. Faulkner)

目 录 | Contest

1 证明的方法

在这作为引言的第 1 章,我们说明一些数学证明的方法. 它们是反证法、数学归纳法、鸽笼原理、序在集合中的利用及不变性.

这些方法的基本性质及其在数学中的普遍利用使分开论述是必要的. 在每种情形下,我们选择最适当的例题,逐题解答其中一些题目,要求你们用其他方法训练解题技能. 因为这些技能是数学的基本方法,所以你们应该彻底地理解它们,因为"理解许多事物比知道许多事物更好."(G. L. Bon)

1.1 反 证 法

反证法用以下步骤证明命题:

首先设命题不成立. 其次,通过一系列逻辑推理得出结论,它与假设矛盾(间接方法),或与已知成立的事实矛盾(归谬法). 这个矛盾蕴涵原命题成立.

这是 Euclid 爱好的方法,你可以发现反证法可应用于他的《几何原理》一书中一些最漂亮的证明. Euclid 最著名的证明是"素数有无穷多个"的证明.

Euclid 定理. 素数有无穷多个.

证. 设相反,只存在有限多个素数. 记它们为 $P_1=2, P_2=3, P_3=5, \cdots, P_n$. 数 $N=P_1P_2\cdots P_n+1$ 可被素数 P 整除,可是与 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 互素. 因此 P 不属于上述所有素数表,矛盾. 因此,假设不成立,证明了有无穷多个素数.

我们继续用 Euclid 的例题说明反证法.

例. 证明:没有最小次数为 1 的整系数多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

具有性质:$P(0), P(1), P(2), \cdots$都是素数.

证. 设相反,令 $P(0)=P$,P 是素数,则 $a_0=P$,$P(k_p)$当所有的 $k\geqslant 1$时,可被 P 整除. 因设所有这些数都是素数,故得当 $k\geqslant 1$ 时,$P(k_p)=P$. 因此 $P(x)$无穷多次取相同的值,矛盾. 证毕.

最后的例题选自 I. Tomescu 的书 *Problems in Combinatorics* (Wiley, 1985).

例. 令 $F=\{E_1,E_2,\cdots,E_s\}$ 是某集合 X 中有 r 个元素的子集族. 证明:若 F 中任意 $r+1$ 个(不一定不同的)集合的交集为非空集,则 F 中所有集合的交集为非空集.

证. 设相反,即 F 中所有集合的交集为空集. 考虑集合 $E_1=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$. 因没有一个 $x_i,i=1,2,\cdots,r$,在所有 E_j 的交集中(这个交集为空集),故得,对每个 i,可求出某个 E_{ji} 使 $x_i\notin E_{ji}$. 于是

$$E_1\cap E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_r}=\varnothing$$

因为同时这个交集包含在 E_1 中,又不包含 E_1 中任一元素,所以这与假设矛盾. 可见我们的假设不成立,因此集合族 F 中的交集为非空集.

以下问题帮助你训练经常利用在本书中的这个方法.

1. 证明:$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$是无理数.

2. 证明:没有由 9 个相继整数所组成的集合可分为两个集合,使第 1 个集合的元素之积等于第 2 个集合的元素之积.

3. 求最小整数 n,使大于 1 且小于 2 005 的 n 个两两互素整数的任一集合至少包含 1 个素数.

4. 三维空间中每个点被涂为红色、绿色或蓝色. 证明:一种颜色达到所有的距离,意思是任一正实数表示这种颜色的两点间的距离.

5. 每个平曲面面积为 1,9 个平曲面的并集总面积为 5. 证明:这些曲面中某两曲面重叠面积大于或等于$\frac{1}{9}$.

6. 证明:不存在函数 $f:\mathbf{Z}\to\{1,2,3\}$ 满足 $f(x)\neq f(y)$,其中所有的 $x,y\in\mathbf{Z}$,使 $|x-y|\in\{2,3,5\}$.

7. 证明:不存在严格递增函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 满足 $f(2)=3$ 与 $f(mn)=f(m)f(n)$,其中所有的 $m,n\in\mathbf{N}$.

8. 求满足以下条件的所有函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,对所有正整数 x 与 y,有

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$$

9. 证明:区间$[0,1]$不能分为两不相交集合 A 与 B,使得对某一实数 a,$B=A+a$.

10. 令 $n>1$ 是任一实数,k 是小于或等于 n 的素数个数. 选出 $k+1$ 个正整数,使其中没有一个整除其他所有数的积. 证明:在选出的 $k+1$ 个数中存在一数大于 n.