2017 执业资格考试丛书

一级注册结构工程师基础考试应试指南

（第九版）

（上册）

兰定筠　杨利容　主编

2017

中国建筑工业出版社

第一章　高　等　数　学

第一节　空 间 解 析 几 何

一、《考试大纲》的规定

向量的线性运算；向量的数量积、向量积及混合积；两向量垂直、平行的条件；直线方程；平面方程；平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系；点到平面、直线的距离；球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程；常用的二次曲面方程；空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

二、重点内容

1. 向量代数

掌握向量的概念、向量的加减法、向量与数量的乘积、向量的坐标、向量的数量积与向量积。

（1）向量的加减法运算规律

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}；(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})；$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

（2）向量与数量的乘积运算规律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}；(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}；$$
$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

（3）向量的坐标

向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为终点的向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 用坐标表达式为：

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

或
$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

向量的模。设非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$，$\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ，即方向角，则有：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$
$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}；\ \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$$
$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

向量在轴上的投影，向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影（记作 $prj_u\boldsymbol{a}$）等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 φ 的余弦，即：

$$prj_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$

有限个向量的和在轴上的投影等于各个向量在该轴上的投影的和，即：

$$prj_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=prj_u\boldsymbol{a}_1+prj_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+prj_u\boldsymbol{a}_n$$

(4) 向量的数量积与向量积

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则有：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{a}|prj_{a}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|prj_{b}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$$

2. 平面

掌握平面的点法式方程、平面的一般方程、平面的截距式方程、两平面的夹角、空间一点到某平面的距离。

(1) 平面的点法式方程

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 π 上的任一点，平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则平面 π 的方程为：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 平面的一般方程

设平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则平面 π 的一般方程为：

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(3) 平面的截距式方程

设平面 π 与 x，y，z 轴分别交于 $P(a, 0, 0)$、$Q(0, b, 0)$ 和 $R(0, 0, c)$ 三点(其中 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$)，则平面 π 的截距式方程为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

(4) 两平面的夹角

平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则平面 π_1 和 π_2 的夹角 θ(通常指锐角)为：

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

π_1 与 π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

π_1 与 π_2 互相平行相当于 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

(5) 点到平面的距离

空间一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 d 为：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3. 直线

掌握空间直线的一般方程、空间直线的对称式方程与参数方程、两直线的夹角、直线与平面的夹角。

(1) 空间直线的一般方程

设空间直线 L 是平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2$

$=0$ 的交线，则 L 的一般方程为：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

(2) 空间直线的对称式方程与参数方程

设空间直线 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，则直线 L 的对称式方程为：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线 L 上点的坐标 x，y，z 用另一变量 t(称为参数)的函数来表达，如设：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则
$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$$

上述方程组称为直线 L 的参数方程。

(3) 两直线的夹角

设有直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$和直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，则直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ(通常指锐角)为：

$$\cos\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1|\ |\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

直线 L_1 和 L_2 互相垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

直线 L_1 和 L_2 互相平行相当于$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

(4) 直线与平面的夹角

设有直线 L：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$和平面 π：$Ax+By+Cz+D=0$，则直线 L 与平面 π 的夹角 φ(通常指锐角)为：

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面垂直相当于$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

直线与平面平行或直线在平面上相当于 $Am+Bn+Cp=0$

4. 旋转曲面

一般地，一条平面曲线绕其平面上的一条定直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，旋转曲线和定直线分别称为旋转曲面的母线和轴。

掌握圆锥面方程。顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面方程：

$$z^2=a^2(x^2+y^2)\quad (a=\cot\alpha)$$

或
$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cot\alpha$$

掌握旋转双曲面方程。将双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转所成的旋转双曲面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

一般地，若已知旋转曲面的母线 C 的方程：$\begin{cases} f(y, z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

将该母线绕 z 轴旋转，只要将母线的方程 $f(y, z)=0$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，即得该曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程，即：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$

同理，该曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为：

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

5. 柱面

一般地，平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹称为柱面，定曲线 C 称为柱面的准线，动直线 L 称为柱面的母线。掌握圆柱面方程。以 xoy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 为准线，平行于 z 轴的直线为母线的圆柱面方程为：

$$x^2+y^2=R^2$$

掌握抛物柱面方程。以 xoy 平面上的抛物线 $y^2=4x$ 为准线，平行于 z 轴的直线为母线的抛物柱面方程为：

$$y^2=4x$$

一般地，如果曲线方程 $F(x, y, z)=0$ 中，缺少某个变量，那么该方程一般表示一个柱面。如方程 $F(x, y)=0$ 一般表示一个母线平行于 z 轴的柱面。同样，如方程 $x-z=0$ 表示过 y 轴的柱面。

6. 二次曲面

三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面。熟悉标准的二次曲面方程如下：

(1) 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(2) 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

(3) 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$

(4) 双曲抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$

(5) 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(6) 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

7. 空间曲线

空间曲线可以视为两个曲面的交线。设曲面 $F(x, y, z)=0$ 和 $G(x, y, z)=0$ 的交线为 C，则曲线 C 的一般方程为：

$$\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$$

若空间曲线 C 上动点的坐标 x，y，z 表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

该方程组称为空间曲线 C 的参数方程。

三、解题指导

历年一级注册结构工程师基础考试的高等数学部分试题有24道，计算型选择题较多，计算量较大，而基本概念、分析型题目偏少，所以，应熟练掌握高等数学中的基本计算方法和技巧。同时，注意单项选择题解题技巧的训练。

【排除法】 求解单项选择题时，由于只有一个正确答案，故可以采用排除法，去掉三个错误答案，便可得正确答案。

【例 1-1-1】 下列结论中，正确的是(　　)。

A. 方程 $2x^2-3y^2-z^2=1$ 　表示单叶双曲面

B. 方程 $2x^2+3y^2-z^2=1$ 　表示双叶双曲面

C. 方程 $2x^2+3y^2-z=1$ 　表示椭圆抛物面

D. 方程 $2x^2+2y^2-z^2=1$ 　表示圆锥面

【解】 因为A项表示双叶双曲面，故A项不对，排除；

B项表示单叶双曲面，故B项不对，排除；

D项不是表示圆锥面，故D项不对，排除；

所以，正确答案只能是C项。

【检验法】 求解单项选择题时，四个选择项中有一个是正确答案，当直接求解结果较困难时，可将四个选择项分别代入题目条件中进行一一验证，若不满足题目条件，便排除它；反之，满足题目条件，便为正确答案。

【例 1-1-2】 过点 $A(2,0,3)$ 且与直线 L：$\begin{cases}x+2y-7=0\\3x-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为(　　)。

A. $2x-y+3z=-13$ 　　　　B. $2x-y+3z=13$

C. $2x+y+3z=-12$ 　　　　D. $2x+y+3z=12$

【解】 将点 $A(2,0,3)$ 分别代入A、B、C、D项进行一一检验，只有B项满足，所以，正确答案为B。

【直解法】 依据题目条件，由基本概念、定义、定理的相关知识，直接求解答案，再在四个选择项中找出与求解答案一致的选择项。

【例 1-1-3】 点 $A(1,2,2)$ 到平面 π：$x+2y+2z-10=0$ 的距离是(　　)。

A. 1 　　B. $\frac{1}{3}$ 　　C. $\frac{2}{3}$ 　　D. $\frac{19}{3}$

【解】 由点到平面的距离公式，可得：

$$d=\frac{|1\times1+2\times2+2\times2+(-10)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{3}$$

所以，正确答案为B项。

【逆向法】 当题中直接求解结果很困难时，可借助逆向思维分析，将命题变化为某些常见的公式、结论等，再求解原命题。如本章第三节解题指导例1-3-2。

【其他解题技巧】 在解答选择题时，由于考试中不要求写出解题过程，所以，为提高解题速度、解答正确率，应综合运用上述几种解题技巧。

【例 1-1-4】 平行于 x 轴且经过点 $(4,0,-2)$ 和点 $(2,1,1)$ 的平面方程是(　　)。

A. $x-4y+2z=0$ B. $3x+2z-8=0$

C. $3y-z-2=0$ D. $3y+z-4=0$

【解】 由平面平行于 x 轴，故平面方程中 x 的系数为 0，所以 A 项、B 项不对，应排除。

又平面经过两已知点，将点(4，0，−2)代入 C、D 项进行检验，D 项不满足，所以 D 项应排除。

综上可知，C 项为正确答案。

四、应试题解

1. 已知四点 $A(1,-2,3)$，$B(4,-4,-3)$，$C(2,4,3)$和 $D(8,6,6)$，则向量$\overrightarrow{AB}$在向量$\overrightarrow{CD}$上的投影是(　　)。

A. $-\dfrac{4}{7}$ B. $-\dfrac{2}{7}$ C. $\dfrac{4}{7}$ D. $\dfrac{2}{7}$

2. 向量 $\boldsymbol{a}=(4,-7,4)$在向量 $\boldsymbol{b}=(2,1,2)$上的投影是(　　)。

A. (2，1，3) B. (3，−1，2) C. 3 D. 1

3. 已知两点 $A(1,0,\sqrt{2})$和 $B(3,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，则方向和$\overrightarrow{AB}$一致的单位向量是(　　)。

A. $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7},-\dfrac{\sqrt{7}}{7},\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$ B. $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7},\dfrac{\sqrt{7}}{7},\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7},-\dfrac{\sqrt{7}}{7},-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$ D. $\left(\dfrac{\sqrt{14}}{7},\dfrac{\sqrt{7}}{7},-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$

4. 已知两点 $A(-5,2,5)$和 $B(3,5,10)$，过点 B 且垂直于 AB 的平面是(　　)。

A. $8x+3y+5z-98=0$ B. $8x+3y+5z-89=0$

C. $8x+3y+5z+98=0$ D. $8x+3y+5z+89=0$

5. 点 $A(1,2,2)$到平面 π：$x+2y+2z-10=0$ 的距离是(　　)。

A. 1 B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{19}{3}$

6. 过两点 $M_1(3,-2,1)$和 $M_2(-1,0,2)$的直线方程是(　　)。

A. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$ B. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+2}{-2}=z-1$

C. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=z-2$

7. 过点 $A(2,0,3)$且与直线 L：$\begin{cases}x+2y-7=0\\3x-2z+1=0\end{cases}$垂直的平面方程为(　　)。

A. $2x-y+3z=-13$ B. $2x-y+3z=13$

C. $2x+y+3z=-12$ D. $2x+y+3z=12$

8. 直线 L：$\begin{cases}2x-y+5=0\\x+3z+1=0\end{cases}$，则 L 的一个方向向量是(　　)。

A. (−3，6，1) B. (−3，6，−1)

C. (−3，−6，1) D. (−3，−6，−1)

9. 已知两条空间直线 L_1：$\begin{cases}x+2y=8\\x+z=8\end{cases}$和 L_2：$\begin{cases}3x+6y=4\\2x+2z=5\end{cases}$，则这两条直线的关系为(　　)。

A. 重合　　B. 垂直

C. 平行但不重合　　D. 相交但不垂直

10. 过点 $A(1,-2,-2)$ 与平面 π：$2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程为(　　)。

A. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=z+2$　　B. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-3}=z+2$

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=z+2$　　D. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=z+2$

11. 平面 π_1：$x+2y-3z-1=0$ 与平面 π_2：$2x-y+z=0$ 的位置关系是(　　)。

A. 平行　　B. 垂直　　C. 重合　　D. 相交但不垂直且不重合

12. 过点 $(1,3,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$ 的平面方程是(　　)。

A. $-x+y+z+3=0$　　B. $x-y-z+1=0$

C. $x+y+z-3=0$　　D. $x+y-z+3=0$

13. 设平面 π 通过球面 $x^2+y^2+z^2=4(x-2y-2z)$ 的中心，且垂直于直线 $\begin{cases}x=0\\y+z=0\end{cases}$，则平面的方程是(　　)。

A. $y+z=0$　　B. $4x+y+z=0$

C. $y-z=0$　　D. $2x+2y-z=0$

14. 过点 $A(2,4,-3)$ 且与连接坐标原点及点 A 的线段 OA 垂直的平面方程为(　　)。

A. $2x+4y-3z=-29$　　B. $2x+4y-3z=29$

C. $2x+4y-3z=-11$　　D. $2x+4y-3z=11$

15. 以点 $(1,2,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程是(　　)。

A. $x^2+y^2+z^2=9$　　B. $x^2+y^2+z^2=3$

C. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z+9=0$　　D. $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z=0$

16. 球面 $x^2+y^2+(z+2)^2=25$ 与平面 $z=2$ 的交线方程是(　　)。

A. $x^2+y^2=9$　　B. $x^2+y^2+(z-2)^2=9$

C. $\begin{cases}x=3\cos t\\y=3\sin t\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=2\end{cases}$

17. 已知两球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，则它们的交线在 xoy 坐标面上的投影曲线方程是(　　)。

A. $x^2+y^2=1$　　B. $x^2+y^2-2y+1=0$

C. $\begin{cases}x^2+2y^2-2y=0\\z=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x^2+2y^2+2y=0\\z=0\end{cases}$

18. 方程 $\begin{cases}x^2+4y^2+9z^2=40\\y=1\end{cases}$ 所表示的曲线为(　　)。

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 双曲线

19. 方程 $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 所表示的曲面为(　　)。

A. 椭球面　　B. 双曲面　　C. 椭圆抛物面　　D. 柱面

20. 曲线 C：$\begin{cases} z^2=8x \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程是(　　)。

A. $x^2+y^2=8x$　　B. $y^2+z^2=8x$

C. $x^2+z^2=8x$　　D. $z^2=8\sqrt{x^2+y^2}$

21. 下列结论中，错误的是(　　)。

A. 方程 $2x^2+3y^2-z=1$ 表示椭圆抛物面

B. 方程 $2x^2+3y^2-z^2=1$ 表示单叶双曲面

C. 方程 $2x^2-3y^2-z=1$ 表示双叶双曲面

D. 方程 $2x^2+2y^2-z^2=0$ 表示圆锥面

22. 下列结论中，正确的是(　　)。

A. 方程 $2x^2-3y^2-z^2=1$ 表示单叶双曲面

B. 方程 $2x^2+3y^2-z^2=1$ 表示双叶双曲面

C. 方程 $2x^2+3y^2-z=1$ 表示椭圆抛物面

D. 方程 $2x^2+2y^2-z^2=1$ 表示圆锥面

第二节　微　分　学

一、《考试大纲》的规定

函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；数列极限与函数极限的定义及其性质；无穷小和无穷大的概念及其关系；无穷小的性质及无穷小的比较极限的四则运算；函数连续的概念；函数间断点及其类型；导数与微分的概念；导数的几何意义和物理意义；平面曲线的切线和法线；导数和微分的四则运算；高阶导数；微分中值定理；洛必达法则；函数的切线及法平面和切平面及切法线；函数单调性的判别；函数的极值；函数曲线的凹凸性、拐点；偏导数与全微分的概念；二阶偏导数；多元函数的极值和条件极值；多元函数的最大、最小值及其简单应用

二、重点内容

1. 极限

掌握函数极限的概念，左、右极限，极限运算法则，极限存在准则，常见的两个重要极限，无穷小的比较。

(1) 极限运算法则

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则：

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$　（当 $\lim g(x)=B\neq 0$ 时）

$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$　（复合函数极限运算）

若 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，且 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，则有 $a\geqslant b$

(2) 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则)。若数列 x_n、y_n 及 z_n 满足条件：$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则数列 x_n 的极限存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

准则Ⅱ（单调有界准则）。单调有界的数列（或函数）必有极限。

（3）常见的两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

（4）无穷小的比较

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就称 β 是与 α 同阶的无穷小；

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就称 β 是与 α 等阶的无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$。

2. 连续

掌握函数的连续性与间断点，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质。

（1）函数的连续性与间断点

函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处连续的条件是：① $f(x_0)$ 有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

若上述条件中任何一条不满足，则 $f(x)$ 在 x_0 处就不连续，不连续的点称为函数的间断点。间断点分为如下两类：

第一类间断点：x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但 $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在。它进一步又分为跳跃间断点（指 $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 均存在但不相等）和可去间断点（指 $f(x_0^-)$、$f(x_0^+)$ 均存在且相等）。

第二类间断点：不是第一类的间断点。

（2）闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则：

①（**最大值最小值定理**）$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最大值和最小值；

②（**介值定理**）对介于 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$ 之间的任一数值 C，在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$；

③（**零点定理**）当 $f(a)f(b)<0$ 时，在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$。

3. 导数

掌握导数的定义与几何意义，求导基本公式与求导法则，高阶导数的求导法则。

（1）求导基本公式

① $(C)'=0$	② $(x^u)'=ux^{u-1}$
③ $(\sin x)'=\cos x$	④ $(\cos x)'=-\sin x$
⑤ $(\tan x)'=\sec^2 x$	⑥ $(\cot x)'=-\csc^2 x$
⑦ $(\sec x)'=\sec x\tan x$	⑧ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$
⑨ $(a^x)'=a^x\ln a$	⑩ $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
⑪ $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	⑫ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

⑬ $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　⑭ $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑮ $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　⑯ $(\text{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

(2) 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 均可导，则：

① $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　② $(Cu)'=Cu'$（C 为常数）

③ $(uv)'=u'v+uv'$　　④ $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

(3) 反函数的求导法则

若 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间 I_x 内也可导，并且有：$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$。

(4) 复合函数求导法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 均可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也可导，有：

$$y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

(5) 隐函数的求导法则

设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 $y=y(x)$，F_x、F_y 连续且 $F_y\neq0$，则隐函数 $y=y(x)$ 可导，且有：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$。

(6) 参数方程的求导法则

若函数 $y=y(x)$ 由参数方程：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ 所确定，且 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，$\varphi'(t)\neq0$，则：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

(7) 高阶导数

若 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处有 n 阶导数，则：

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \text{（莱布尼兹公式）}$$

4. 微分

掌握微分的概念、基本微分公式与微分法则、微分的应用。

(1) 函数可微分的充分必要条件：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微分的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

(2) 函数和、差、积、商的微分法则

设函数 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 均可微分，则：

$$d(u\pm v)=du\pm dv;\ d(Cu)=Cdu \text{（}C\text{ 为常数）}$$

$$d(uv)=vdu+udv;\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

(3) 复合函数的微分法则：

设 $y=f(u)$、$u=\varphi(x)$ 均可微，则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微，且有：

$$dy=f'(u)du=f'(u)\cdot\varphi'(x)dx$$

(4) 微分的应用

当 $f'(x_0)\neq0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，则有：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$。

常用的近似公式，如：$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\frac{1}{n}\cdot x$；$e^x\approx1+x$；$\ln(1+x)\approx x$；$\sin x\approx x$（$x$ 为弧度）。

5. 导数的应用与中值定理

掌握罗尔定理与拉格朗日中值定理，罗必塔法则求极限，函数单调性、极值与拐点的判定，函数的最大值最小值问题，曲线的弧微分与曲率。

(1) 中值定理

① (**罗尔定理**)若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

② (**拉格朗日中值定理**)若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则至少有一点 $\xi\in(a, b)$，使得下式成立：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

(2) 罗必塔法则

未定式 $\frac{0}{0}$ 的情形，设：

① 当 $x\to a$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)\to0$ 且 $F(x)\to0$；

② 在点 a 的某去心邻域内（或当 $|x|>N$ 时），$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq0$；

③ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大）；

则：
$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

对其他尚有 $0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 型的未定式，可通过变形为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式进行计算。如 $0\cdot\infty$ 型变形为 $\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，$0^0$、$1^\infty$、$\infty^0$ 通过取对数变形。

(3) 函数单调性、极值与拐点

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

函数的极值的判定见表 1-2-1、表 1-2-2。

用一阶导数判定极值　表 1-2-1

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		极小值	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		极大值	

用二阶导数判定极值　表 1-2-2

x	x_0	x_0
$f'(x)$	0	0
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	极大值	极小值

曲线凹凸判定可利用二阶函数的符号判定，即：当 $f''(x)$在区间上为正，$f(x)$的图形为凹；当 $f''(x)$在区间上为负，$f(x)$的图形为凸。曲线的拐点：若 $f''(x_0)=0$，且 $f''(x)$在 x_0 的左右两侧邻近异号，则点$(x_0, f(x_0))$就是一个拐点。

（4）曲线的弧微分与曲率

弧微分公式：$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

曲率公式：$$K=\frac{|y''|}{(1+y')^{3/2}}$$

6. 偏导数和全微分

掌握偏导数的概念，多元复合函数求导，高阶偏导数，全微分概念，多元函数可偏导与可微分的关系，偏导数的运用。

（1）多元复合函数求导法则

设 $u=\varphi(x, y)$，$v=\psi(x, y)$均具有偏导数，$z=f(u, v)$是有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$的偏导数存在，且：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

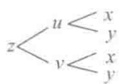
图 1-2-1

在求解多元复合函数的偏导数时，关键是辨清函数的复合结构，可借助结构图来表示出因变量经过中间变量，再通向自变量的途径。如上述函数的结构图如图 1-2-1 所示。

（2）函数可微分的条件

若函数 $z=f(x, y)$在点(x, y)可微分，则偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$必定存在。

函数可微分的充分条件是函数具有连续偏导数。

（3）多元函数连续、可偏导、可微分的关系

多元函数连续与可偏导没有必然的联系；多元函数可微分必定可偏导，但反之不成立；当偏导数存在且连续时，函数必定可微分，但反之不成立；多元函数可微分，则函数必定连续，但反之不成立。

（4）偏导数的应用

掌握运用偏导数求空间曲线的切线与法平面、曲面的切平面与法线、方向导数与梯度、多元函数的极值。

多元函数的极值判定。设 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)具有偏导数，则它在点(x_0, y_0)取得极值的必要条件是：$f_x(x_0, y_0)=0$，$f_y(x_0, y_0)=0$。

设 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内具有二阶连续偏导数，且

$$f_x(x_0, y_0)=f_y(x_0, y_0)=0,\ f_{xx}(x_0, y_0)=A,\ f_{xy}(x_0, y_0)=B,$$
$$f_{yy}(x_0, y_0)=C,\text{ 则有：}$$

① 当 $AC-B^2>0$ 时，具有极值 $f(x_0, y_0)$，且当 $A<0$ 时，$f(x_0, y_0)$为极大值，当 $A>0$ 时，$f(x_0, y_0)$为极小值；

② 当 $AC-B^2<0$ 时，$f(x_0, y_0)$不是极值。

三、解题指导

本节是历年考试中题目数量较多的部分，应通过做题提高解题能力，熟练掌握本节知

识点的运用。

【例 1-2-1】 极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的值等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在且不为∞

【解】 本题只能采用直接法求解。

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to 1^-} (x+1) e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

所以左、右极限不等，故选 D 项。

【例 1-2-2】 设函数 $z=xy+xF(u)$，$u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$为可导函数，则 $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}+y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$等于（　　）。

A. $z-xy$　　B. $-z+xy$　　C. $-z+xy$　　D. $z+xy$

【解】 本题只能采用直接法求解。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u) \cdot \frac{1}{x}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=[xy+xF(u)-yF'(u)]+[xy+yF(u)]=z+xy$$

所以应选 D 项。

四、应试题解

1. $\lim\limits_{n \to \infty}(1+4^n)^{\frac{1}{n}}$ 的值等于（　　）。

A. 4　　B. e　　C. 1　　D. ∞

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x-1}{x\tan x}$的值等于（　　）。

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$的值等于（　　）。

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. 0

4. 极限 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$的值等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

5. 极限 $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x^2}$的值等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ∞

6. 极限 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$的值等于（　　）。

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在且不为∞

7. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}2\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的值等于(　　)。

A. 0　　B. 1　　C. ∞　　D. 不存在

8. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ 的值等于(　　)。

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

9. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\sin 2x$ 和 $\beta(x)=x^3+5x$ 都是无穷小，则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(　　)。

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小

C. 同阶且非等价的无穷小　　D. 等价无穷小

10. 设函数 $f(x)=e^x+e^{-x}-2$，当 $x\to 0$ 时，则(　　)。

A. $f(x)$ 是比 x^2 较低阶的无穷小

B. $f(x)$ 是比 x^2 较高阶的无穷小

C. $f(x)$ 是 x^2 的等价无穷小

D. $f(x)$ 与 x^2 是同阶但非等价的无穷小

11. 若函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & (x<0) \\ x^2+a & (x\geqslant 0)\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 a 的值应当是(　　)。

A. e　　B. -1　　C. 0　　D. 1

12. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} (x>0) \\ ax+b (x\leqslant 0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 a、b 之值为(　　)。

A. $a=1$，$b=0$　　B. $a=0$，b 为任意常数

C. $a=0$，$b=0$　　D. $a=1$，b 为任意常数

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-2x} & (x\leqslant 0) \\ \lambda\ln(1+x)+1 & (x>0)\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 λ 的值是(　　)。

A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqslant 1) \\ ax+b & (x>1)\end{cases}$，它在 $x=1$ 处连续且可导，则 a、b 之值等于(　　)。

A. $a=1$，$b=0$　　B. $a=0$，$b=1$　　C. $a=2$，$b=-1$　　D. $a=-1$，$b=2$

15. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　)。

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

C. 第二类间断点　　D. 上述 A、B、C 均不对

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　)。

A. 不连续，不可导　　B. 连续，可导

C. 连续，不可导　　D. 可导，不连续

17. 函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (0<x\leqslant 1) \\ 2-x & (1<x\leqslant 3)\end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断是因为(　　)。

A. $f(1)$不存在　　B. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$不存在　C. $\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在　D. $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$不存在

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{1}{x}} & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$，则点 $x=0$ 是 $f(x)$的(　　)。

A. 连续点　　B. 第二类间断点

C. 可去间断点　　D. 跳跃间断点

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^3-2x^2-3x}$的间断点为(　　)。

A. $x=0$，$x=1$　　B. $x=0$，$x=-1$，$x=3$

C. $x=-1$，$x=3$　　D. $x=0$，$x=3$

20. 一元函数在某点有极限是函数在该点连续的(　　)。

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分条件，也非必要条件

21. 方程 $x\cdot 2^x-1=0$ 在下列(　　)项区间内至少有一个实根。

A. $(-1, 0)$　　B. $(0, 1)$　　C. $(1, 2)$　　D. $(2, +\infty)$

22. 方程 $x-\sin x-1=0$ 在下列(　　)项区间内至少有一个实根。

A. $(-\infty, 0)$　　B. $(0, \pi)$　　C. $(\pi, 4)$　　D. $(4, +\infty)$

23. 函数 $y=x+x|x|$ 在 $x=0$ 处为(　　)。

A. 连续且可导　　B. 连续，不可导

C. 不连续　　D. 上述 A、B、C 均不对

24. 设 $f(x)$的一个原函数为 $\cos x$，则 $f'(x)$为(　　)。

A. $\sin x$　　B. $-\cos x$　　C. $-\sin x$　　D. $\cos x$

25. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $y'(0)$的值等于(　　)。

A. $\dfrac{3}{4}\pi$　　B. $\dfrac{\pi}{2}$　　C. π　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

26. 若 $f'(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则$\dfrac{d[f(\sqrt{x})]}{dx}$为(　　)。

A. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$　　B. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2x}$　　C. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　　D. $\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x}}$

27. 设有函数 $y=f(x)$，由$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f'(x)}$可导出$\dfrac{d^2x}{dy^2}$为(　　)。

A. $\dfrac{1}{f''(x)}$　　B. $\dfrac{1}{[f'(x)]^2}$　　C. $\dfrac{-f''(x)}{[f'(x)]^2}$　　D. $\dfrac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$

28. 设 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+k\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{1}{4}f'(x_0)$，则 k 为(　　)。

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

29. 若函数 $f(x)$具有连续的一阶导数，且 $f'(1)=-4$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{d[f(\cos\sqrt{x})]}{dx}$的值等于(　　)。

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

30. 曲线 L：$\begin{cases}x=2\sin t\\ y=\cos^2 t\end{cases}$，在与参数 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应的点 p_0 处的切线斜率是(　　)。

A. $-\sqrt{2}/2$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $-2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

31. 设抛物体运动的轨迹方程为 $\begin{cases}x=6t+1\\ y=1+18t-5t^2\end{cases}$，则抛物体在 $t=1$ 时刻的运动速度大小为(　　)。

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

32. $y=f(x)$ 的参数方程为：$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，$f''(t)$ 存在且不为零，则 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 为(　　)。

A. $\frac{-1}{f''(t)}$　　B. $\frac{-1}{[f''(t)]^2}$　　C. $\frac{1}{f''(t)}$　　D. $\frac{1}{[f''(t)]^2}$

33. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $y=f(e^{-x})$，则 dy 为(　　)。

A. $f'(e^{-x})dx$　　B. $f'(e^{-x})e^{-x}dx$

C. $-f'(e^{-x})dx$　　D. $-f'(e^{-x})e^{-x}dx$

34. 下列命题中，正确的是(　　)。

A. 若在区间 (a, b) 内有 $f(x)>g(x)$，则 $f'(x)>g'(x)$，其中 $x\in(a, b)$

B. 若在区间 (a, b) 内有 $f'(x)>g'(x)$，则 $f(x)>g(x)$，其中 $x\in(a, b)$

C. 若在区间 (a, b) 内有 $f'(x)>g'(x)$，且 $f(a)=g(a)$，则 $f(x)>g(x)$，其中 $x\in(a, b)$

D. 若在区间 (a, b) 内 $f'(x)$ 单调，则 $f(x)$ 在 (a, b) 内也单调

35. 函数 $f(x)=x^2-\ln x^2$ 的单调减区间为(　　)。

A. $(0, 1)$　　B. $(-\infty, -1)$ 及 $(0, 1]$

C. $[1, +\infty)$　　D. $[-1, 0)$ 及 $[1, +\infty)$

36. 曲线 $y=\frac{x}{1+x^2}$ 在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 内的单调情况是(　　)。

A. 单调增向上凹　　B. 单调减向上凹

C. 单调增向下凹　　D. 单调减向下凹

37. 若函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值，则 a 的值是(　　)。

A. -2　　B. 2　　C. $-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

38. 函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$ 的极值点为(　　)。

A. $x_1=0$，$x_2=3$　　B. $x_1=0$，$x_2=2$

C. $x_1=2$，$x_2=3$　　D. $x_1=0$，$x_2=2$，$x_3=3$

39. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，则(　　)。

A. $f'(x_0)=0$　　B. $f''(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$　　D. $f'(x_0)=0$ 或不存在

40. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+m$（m 为常数）在 $[-2, 2]$ 上有最大值 4，则该函数在