

“十三五”国家重点出版物出版规划项目



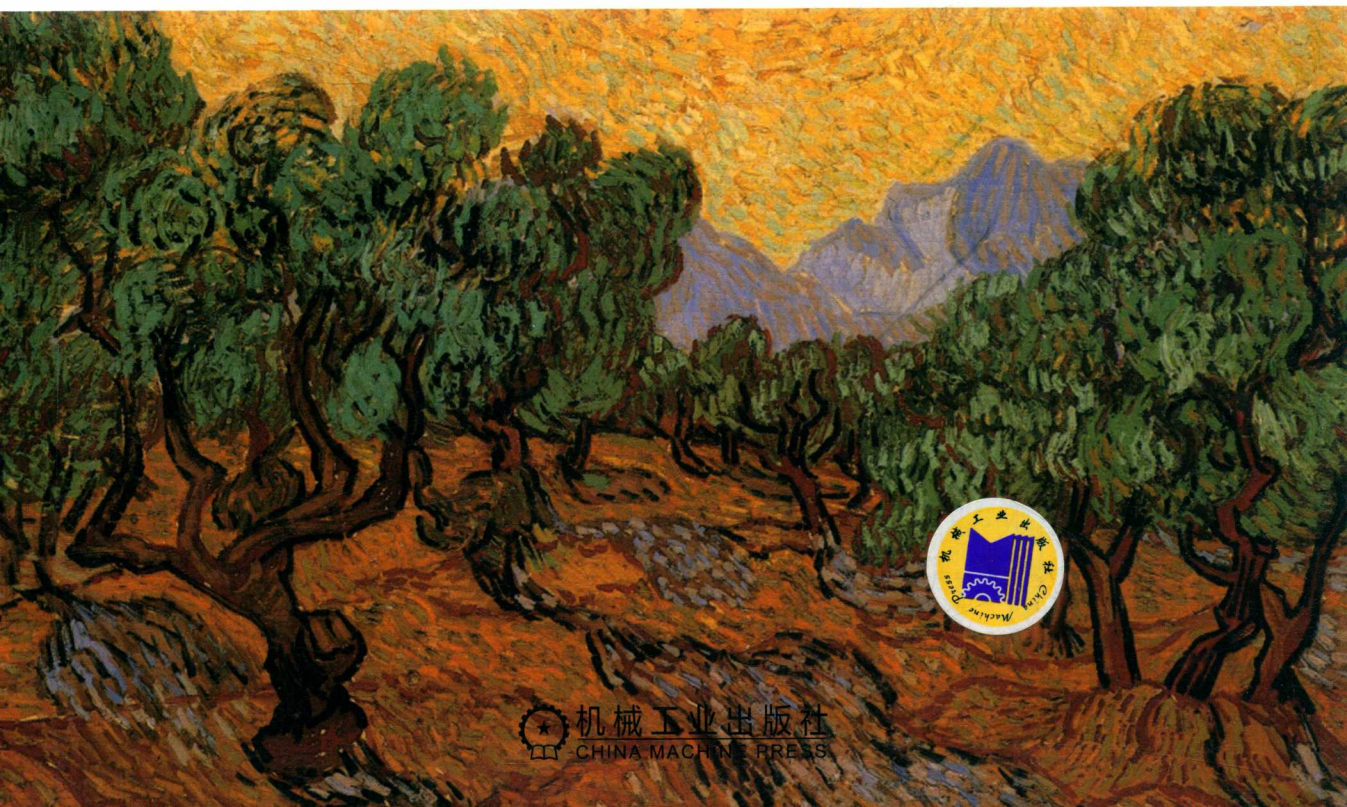
世界名校名家基础教育系列

Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

概率论与数理统计 第3版

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

范玉妹 汪飞星 王萍 李娜 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

021
288-3
“十三五”国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列
Textbooks of Basic Disciplines from World's Top Universities and Experts

普通高等



概率论与数理统计

第 3 版

范玉妹 汪飞星 王 萍 李 娜 编

机械工业出版社

本书是根据高等院校工科各专业的《概率论与数理统计课程基本要求》编写的。本书共十章, 主要包括随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、极限定理、数理统计基本概念、参数估计、假设检验、回归分析及方差分析简介、数学软件的应用。根据学生学习的认知规律, 本书采用每章以知识结构图引入, 以综合例题选讲结束, 注重提高学生的学习兴趣和应用能力。

本书内容丰富, 阐述简明易懂, 注重理论联系实际, 可作为高等院校工科各专业概率论与数理统计课程的教材, 建议学时数为 36 ~ 54 学时; 同时也可作为教学参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计/范玉妹等编. —3 版. —北京: 机械工业出版社, 2017. 8

(世界名校名家基础教育系列)

“十三五”国家重点出版物出版规划项目

ISBN 978-7-111-57725-6

I. ①概… II. ①范… III. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 196571 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 郑 玫 责任编辑: 郑 玫 陈崇昱

责任校对: 肖 琳 封面设计: 鞠 杨

责任印制: 李 昂

三河市宏达印刷有限公司印刷

2017 年 9 月第 3 版第 1 次印刷

190mm × 215mm · 14.5 印张 · 357 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-57725-6

定价: 45.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88379833 机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: 010-88379649 机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网: www.golden-book.com

第3版前言

本书第2版于2012年4月出版后，已经在教学中使用了5年。根据教学改革的需要和使用本书读者和同行们所提出的宝贵意见，特别是各行各业对统计知识日益增长的需求，我们对本书的部分内容做了适当的修订。

这次修订与调整，我们修正了在第2版中不当之处和印刷中错误，并致力于教材质量的提高。考虑到各行各业对统计知识的需求有所不同，本书主要在第2版的第九章回归分析中增加了单因素方差分析的教学内容，并补充和增加了第九章的习题。对第十章数学软件的应用也做了部分扩充。

在本书出版之际，谨向关心本书并提出过宝贵意见的同仁深表谢意。本书最后所附的参考文献仅是主要参考文献，在此要向列入和未列入参考文献的作者们深表谢意。

由于编者水平有限，书中不妥之处敬请读者批评指正。

编者
2017年1月

第 2 版前言

本书第 1 版于 2007 年 8 月出版后，经过 5 年的教学实践，我们再次根据在教学中积累的经验，并汲取使用本书的读者、同行们所提出的宝贵意见，对本书的内容做了适当的修订与调整。

这次我们对本书第 1 版主要做了如下五方面的修订与调整：

第一，调整补充各章中体现课程内容的例题及相关的难易程度；

第二，调整补充各章中的习题，将其按教学内容及难易程度分为 A、B 两类；

第三，修订补充统计学中的部分教学内容；

第四，增加了泊松分布表；

第五，修正了第 1 版中的所有印刷错误。

在本书第 2 版出版之际，谨向关心本书和对本书第 1 版提出过宝贵意见的同志深表谢意。本书最后所附的参考文献仅是主要参考文献，在此也要向列入和未列入参考文献的作者们表示感谢。

由于编者水平有限，书中不妥之处敬请读者批评指正。

编 者

第1版前言

随机现象的普遍性使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用,从而使概率论与数理统计课程成为高等院校理科、工科和经管专业学生的一门重要的、必修的基础数学课程.该课程不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础,而且对培养学生的综合能力,提高学生的数学素养以及整体的素质,并且为在未来的学习工作中提高科研能力和创新能力都具有重要的作用.

概率论与数理统计课程的主要内容包括概率论和数理统计两大部分,概率论是数理统计的基础,数理统计是概率论的应用.本书是以这两大部分为主体编写的.

在概率论部分内容的阐述中侧重以下三个方面:

(1) 从集合入手引入随机试验、样本空间、随机事件等概念及其运算;完整介绍概率的三个定义(统计定义、公理化定义和古典定义).

(2) 以古典概型为核心引出条件概型、全概率公式与贝叶斯公式;阐述无条件概率、条件概率及乘法定理之间的关系.

(3) 从函数概念入手引入随机变量的概念;完整阐述离散型随机变量、连续型随机变量的概念、分布及相关的数字特征.

在数理统计部分内容的阐述中侧重如下三个方面:

(1) 简单介绍抽样分布,引出几个重要的统计量,为统计推断作基础.

(2) 完整阐述参数估计的基本思想、基本理论与基本方法,一维随机变量的参数估计;简略阐述二维随机变量的参数估计.

(3) 完整阐述假设检验的基本思想、基本理论与基本方法,一维随机变量的假设检验;简略阐述二维随机变量的假设检验.

学习数学的目的之一是应用数学技术去解决其他学科以及生产、科研、生活实际中的问题.结合概率论与数理统计的内容,本书还介绍了数学软件 MATLAB 及 SPSS 软件的使用方法,使学生在掌握知识的同时,学会使用数学技术及现代计算工具,让计算机走进教学.

在对上述内容的阐述中始终围绕“加强基础,强调应用”八个字,着重培养学生分析问题与解

决问题的能力、熟练运用基本概型进行计算的能力，适当训练逻辑思维与推理能力。本书的每章内容以知识结构图引出，以例题选讲结束，符合学生学习的认知规律，使学生在学的过程中能迅速地构建成自身的学习心理结构。本书对于较复杂的定理及公式的推导则予以省略。

本教材由范玉妹编写绪论和第一、二、三、六章，王萍编写第四、五章，汪飞星编写第七、八、九章，李娜编写第十章，范玉妹负责全书的统稿工作。

在本书的编写过程中，北京航空航天大学李心灿教授给予了热情的关心和真诚的帮助，北京理工大学杨德保教授认真审阅了书稿，提出了许多中肯的修改意见，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平所限，错漏之处在所难免，望读者不吝指正。

编 者

目 录

第3版前言	
第2版前言	
第1版前言	
绪论	1
第一节 概率论与数理统计发展史简介	1
第二节 概率论与数理统计知识结构图 与研究对象	5
第1章 随机事件与概率	8
第一节 随机试验与随机事件	9
第二节 随机事件的概率	13
第三节 古典概型(等可能概型)	17
第四节 条件概率及事件的独立性	23
第五节 综合例题选讲	37
习题一	44
第2章 一维随机变量及其分布	47
第一节 随机变量	48
第二节 离散型随机变量及其分布	49
第三节 随机变量的分布函数	56
第四节 连续型随机变量及其分布	60
第五节 随机变量函数的分布	70
第六节 综合例题选讲	75
习题二	83
第3章 多维随机变量及其分布	86
第一节 二维随机变量及其联合分布 函数	87
第二节 边缘分布及条件分布	93
第三节 相互独立的随机变量	100
第四节 两个随机变量函数分布	104
第五节 综合例题选讲	112
习题三	120
第4章 随机变量的数字特征	123
第一节 随机变量的数学期望	124
第二节 随机变量的方差与矩	133
第三节 协方差与相关系数	139
第四节 综合例题选讲	144
习题四	154
第5章 极限定理	157
第一节 大数定律	158
第二节 中心极限定理	161
第三节 综合例题选讲	166
习题五	174
第6章 数理统计基本概念	175
第一节 总体与随机样本	176
第二节 统计量及其分布	179
第三节 常用的重要统计量及其 分布	186
第四节 综合例题选讲	194
习题六	200

第 7 章 参数估计	201	第五节 综合例题选讲	239
第一节 矩估计法	202	习题八	244
第二节 极大似然估计法	204	第 9 章 回归分析及方差分析简介	246
第三节 点估计的优良性	208	第一节 一元线性回归	247
第四节 区间估计的概念	210	第二节 多元线性回归模型	253
第五节 正态总体均值与方差的区间 估计	211	第三节 单因素方差分析	267
第六节 (0-1) 分布参数的区间 估计	216	习题九	276
第七节 综合例题选讲	217	第 10 章 数学软件的应用	278
习题七	225	第一节 MATLAB 在概率统计中的 应用	278
第 8 章 假设检验	228	第二节 SPSS 软件在概率统计中的 应用	298
第一节 假设检验的基本概念	228	习题参考答案	304
第二节 单个正态总体参数的假设 检验	232	附录	317
第三节 两个正态总体参数的假设 检验	236	附录 A 排列组合与二项式定理	317
第四节 分布拟合检验简介	238	附录 B 附表	319
		参考文献	338

数学既和几乎所有的人类活动有关，又对每一个真正感兴趣的人有益。

——R. C. 巴克

第一节 概率论与数理统计发展史简介

概率论最早的萌芽之作应属 1563 年意大利数学怪杰卡尔丹 (G. Cardano, 1501—1576) 撰写的《游戏机遇的学说》，在这本书中卡尔丹讨论了关于两人赌博中断后如何分赌本的问题，且提出了“大数定律”等基本概率理论的原始的模型。如何分赌本问题不仅引起了有着 20 多年骰子赌博经验的卡尔丹的兴趣，也引起了 16 世纪意大利数学家帕乔利 (L. Pacioli, 1445—1517)、塔塔利亚 (N. Tartaglia, 1499—1557) 等学者的兴趣，他们也曾讨论过这类问题。到 17 世纪，法国著名的数学家帕斯卡 (B. Pascal, 1623—1662) 和费马 (P. Fermat, 1601—1665) 也曾多次通信讨论这一概率论的始祖问题，并且在通信讨论中首次给出了这类问题的正确答案。费马与帕斯卡通信讨论的问题被数学家惠更斯 (C. Huygens, 1629—1695) 发现后，他对这种问题进行了深入研究，1657 年惠更斯的名著《论赌博中的计算》一书出版，此书是概率论的第一部成型的著作，在书中提出了数学期望、概率的加法定理与概率的乘法定理等基本概念。

使概率论成为一个独立的数学分支是瑞士数学家雅各布·贝努利 (Jakob Bernoulli, 1655—1705)，他证明了掷 n 颗骰子所得总数为 m 这种情况的次数正好为

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$

展开式中 x^m 这一项的系数, 这不仅是概率论中的一个妙解, 而且还开创了母函数的先河. 1713 年出版了雅各布·贝努利的遗作《猜度术》, 建立了概率论中的第一个极限定理, 现称之为贝努利大数定律. 这一大数定律指出, 概率是相对频率的数学抽象, 贝努利的这一定理在概率的发展史上起到了理论奠基的作用. 1812 年, 拉普拉斯的名著《概率的分析理论》出版, 书中系统地总结了前人关于概率的研究成果, 明确了概率的古典定义, 在概率论中引入分析方法, 把此前各数学家关于概率的零星结果系统化, 概率论发展到一个新的阶段. 1814 年第 2 版的书名换成《概率的哲学导论》, 在该书中关于概率的定义拉普拉斯给出了非常精辟的论述, 还给出了概率的加法与乘法等运算定律.

1777 年, 法国数学家蒲丰 (Buffon Georges Louis Leclerc, 1707—1788) 提出几何概率的概念, 其典型模型是: 长 l 的同质均匀针随机地投向画有最近两平行线相距为 $a > l$ 的许多平行线的平面, 求针与直线相交的概率. 这里“随机”是指针的中心的落点与针的方向都是等概率的, 而且中心落点与针的方向无关. 其解得的结果为: 针与直线相交的概率 P 为 $P = 2l/(\pi a)$. 这是数学史上古典概率中几何概率的一个精彩实例. 由于 $\pi = 2l/(Pa)$, 只要求得 P , 则可求出 π 的值. 1901 年意大利的拉泽里尼 (Lazzerrini) 投针 3408 次, 他统计出与平行线相交的次数 m , $P \approx m/3408$, 于是求得 π 的近似值, 他求出的 π 精确到 6 位小数. 1812 年, 在《概率的分析理论》中拉普拉斯推广了蒲丰的模型: 两组正交等距平行线, 一组距离为 a , 另一组距离为 b , 针长为 $l < \min\{a, b\}$, 则针与任一直线相交的概率为 $P = 2l(a+b)/(\pi ab)$, 当 $b \rightarrow +\infty$ 时 (或 $a \rightarrow +\infty$), 即为蒲丰的结果.

1733 年棣莫弗, 1809 年高斯分别独立地引入正态分布. 1837 年, 法国数学家泊松 (Simeon-Denis Poisson, 1781—1840) 给出泊松大数定律. 泊松是巴黎综合工程学校教授, 他在 1837 年发表的著名论文《关于判断的概率之研究》中还提出了泊松分布, 他的主要工作是数学物理.

19 世纪后期, 概率论的主要成就就是中心极限定理, 主要人物是俄国的切比雪夫, 他于 1866 年建立的独立随机变量的大数定律, 使贝努利和泊松大数定律成为其特例, 他还把棣莫弗与拉普拉斯的极限定理推广成一般的中心极限定理.

1899年,法国科学家贝特朗(J. Bertrand)提出了针对古典概率中的含糊与矛盾的所谓“贝特朗悖论”:在半径为 r 的圆内随机地选择弦,求弦长超过圆内接正三角形的边长之概率.在求解的过程中由于对“任意选择”的不同理解,造成“一题多解”,出现了不唯一的答案.拉普拉斯在《概率的分析理论》与《概率的哲学导论》中关于古典概率的含糊概念陷入严重危机之中.为了克服古典概率的缺点,人们开始从创建概率的公理系统入手来改造古典概率,例如,俄国数学家伯恩斯坦(1880—1968),奥地利数学家冯·米西斯(1883—1953)等提出了一些公理作为概率论的源头命题,但都不够完善.1905年法国数学家波莱尔(1871—1956)用他创立的测度论语言来表达概率论,为克服古典概率的弱点打开了大门.波莱尔是法国数学家班勒卫的学生,他把康托尔的集合论与古典分析相结合,对实变函数论有重要的贡献.

从20世纪20年代起,前苏联的大数学家柯尔莫哥洛夫开始从测度论的途径来改造概率论.1933年他以德文出版了经典名著《概率论基础》,他作为莫斯科函数论学派领袖鲁金(1883—1950)的学生,有雄厚的数学实力运用测度来研究概率,他在这本名著中建立了柯尔莫哥洛夫公理化概率论.1934年柯尔莫哥洛夫的学生辛钦(1894—1959)提出“平稳过程”理论,所谓“平稳过程”理论是指随机现象中其统计性质不随时间变化的随机过程.1942年,日本数学家伊藤清引进了随机积分与随机微分方程,为随机分析的建立奠定了基础.特别值得一提的是柯尔莫哥洛夫是20世纪最伟大的数学家之一,也是20世纪最有影响的少数几个数学家之一.他所建立的概率论的公理化体系,奠定了概率论的严格的理论基础,也沟通了概率论与现代数学中其他分支之间的联系.他的思想使概率论成为分析数学中一门广阔而高度发展的分支.

近代统计学的发展起源于20世纪初,它是在概率论的基础上发展起来的,但统计性质的工作可以追溯到远古的“结绳记事”和《二十四史》中大量的关于我国人口、钱粮、水文、天文、地震等资料的记录.西方则把收集和整理国情资料的活动称为统计,统计一词(Statistics)正是由国家(State)一词演化而来的.

1662年,英国统计学家J. 格兰特组织调查伦敦的人口死亡率,并发表专著《从自然和政治方面观察死亡统计表》,格兰特还对保险

统计、经济统计进行了数学研究，称其学问为“政治算术”。他发现人口出生率与死亡率相对稳定，提出了“大数恒静定律”，之后统计学的数学性质逐渐加重。

1763年，英国统计学家贝叶斯（T. Bayes）发表了《论机会学说问题的求解》，给出了“贝叶斯定理”，从结果去对原因进行后验概率的计算，可视为最早的数学化的统计推断。

19世纪初，高斯和勒让德建立“最小二乘法”，且用其分析天文观测的误差，成为数理统计之中的重要方法。19世纪中叶，比利时统计学家A·凯特勒和英国生物学家B·高尔顿在数理统计方面的工作对现代数理统计的发展影响甚大。凯特勒把统计方法应用于天文、数学、气象、物理、生物和社会学，且强调了正态分布的用途，他曾长期进行比利时国力调查，且组织国际统计工作，使数理统计方法被方方面面的科学技术领域所接受和重视。高尔顿于1889年出版数理统计著作《自然的遗传》，引入回归分析方法，他给出回归直线和相关系数的重要概念。在同一时期，爱尔兰经济学家E. Y. 埃奇沃思引入方差概念。

从19世纪末到第二次世界大战结束，数理统计得到蓬勃发展并日臻成熟。这一时期，英国数学家K·皮尔逊用数理统计的方法得出生物统计学和社会统计学的基本法则，进一步发展了回归分析和相关的理论，他于1900年提出检验拟合程度的 χ^2 统计量和 χ^2 分布，建立了 χ^2 检验法。1908年，英国科学家W. S. 戈塞特导出大统计量及其精确的分布，建立了 t 检验法。戈塞特是皮尔逊的学生，所以戈塞特发表 t 分布时以“学生”为笔名，故 t 分布也称为“学生分布”。 χ^2 分布讨论的是总体概念与群体现象， t 分布则讨论小样本理论与随机现象。

作为一门独立的学科，现代数理统计的奠基人是英国数学家和生物学家费希尔（Fisher Ronald Aylmer, 1890—1962），他生于伦敦，卒于澳大利亚，毕业于剑桥大学，教过中学，长期在农业试验站搞生物实验，先后任伦敦大学和剑桥大学教授，1929年当选皇家学会会员。1922年出版了他的现代统计的基础性著作《理论统计的数学基础》，对统计中的多元分析、相关系数、样本分布及其在生物遗传与优生方面的应用进行了系统深入的阐述。他的主要贡献在估计理论、假设检验、实验设计和方差分析等方面。他所领导的伦敦大学

数理统计学派在 20 世纪 30 年代到 40 年代, 在世界数理统计界占主导地位.

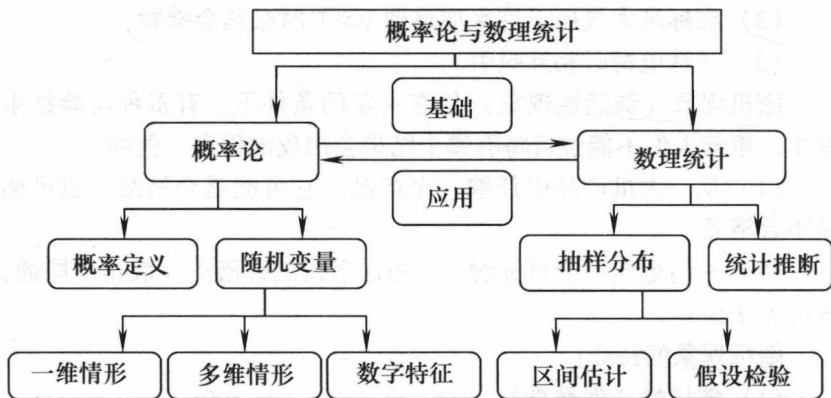
1940 年, 瑞典数学家克拉默 (H. Cramer) 发表了《统计学的数学方法》, 运用测度论方法总结数理统计的成果, 使现代数理统计趋于成熟.

第二次世界大战期间, 美籍罗马尼亚数学家瓦尔德 (A. Wald, 1902—1950) 为解决军方提出的军需验收的实际问题提出“序贯抽样”方法. 1947 年, 他的专著《序贯分析》出版, 使序贯分析成为数理统计的一个新的分支. 瓦尔德还用博弈的观点看待数理统计, 定义统计推断的风险函数, 于 1950 年出版他的名著《统计决策函数》一书, 同年因飞机失事身亡.

与现代数理统计有密切关系的一门重要学科是“博弈论”, 或称“对策论”. 瓦尔德用与大自然对策的观点研究数理统计, 使各种统计问题统一起来, 促进了数理统计的发展.

第二节 概率论与数理统计知识结构图与研究对象

一、知识结构图



二、研究对象

在我们所生活的世界中充满了不确定性. 从扔硬币、掷骰子和玩扑克等简单的机会游戏, 到复杂的社会现象; 从婴儿的诞生, 到

世间万物的繁衍生息；从流星坠落，到大自然的千变万化，我们无时无刻不面临着不确定性和随机性。如同物理学中基本粒子的运动、生物学中遗传因子和染色体的游动、以及处于紧张社会中的人们行为一样，自然界中的不确定性是固有的。这些与其说是基于决定论的法则，不如说是基于随机论法则的不定性现象，这些已经成为自然科学、生物科学和社会科学理论发展的必要基础。

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，他们把随机性看作破坏生活规律、超越了人们理解能力范围的东西。他们没有认识到有可能去研究随机性，或者是去测量不确定性。将不确定性数量化，来尝试回答这些问题是直到 20 世纪初叶才开始的。还不能说这个努力已经十分成功了，但就是那些已得到的成果，已经给人类活动的一切领域带来了一场革命。这场革命为研究新的设想，发展自然科学知识，繁荣人类生活开拓了道路。而且也改变了我们的思维方式，使我们能大胆探索自然的奥秘。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科，那么什么是随机现象？事实上，在自然界存在着两类现象，一类是确定性现象，另一类是随机性现象。确定性现象是在一定的条件下必然发生某种结果的现象。例如：

- (1) 重物在高处必然下落；
- (2) 在标准大气压下纯水加热到 100°C 时必然会沸腾；
- (3) 异性电荷必相互吸引。

随机现象（偶然性现象）是在一定的条件下，有多种可能结果发生，事前人们不能预言将有哪个结果会出现的现象。例如：

- (1) 从一大批产品中任取一个产品，它可能是合格品，也可能是不合格品；
- (2) 一门炮向一个目标射击，每次射击的弹落点一般是不同的，事前无法预料。

随机现象的特征：

- (1) 随机性（偶然性）；
- (2) 在大量试验的条件下其结果的发生又具有规律性。

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面，这种必然性表现在大量重复试验或观察中呈现出的固有规律性，即随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分。通俗地讲，概率论与数理统计的任务就是从大量的偶然现象中去找出它的一定规律性，它的研究对象就是随机现象的统计规律性。

由于随机现象的普遍性，使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用。近年来，一方面它为社会科学、科学技术、工农业生产等的现代化作出了重要的贡献；另一方面，广泛的应用也促进概率论与数理统计有了极大的发展。

亲量圭尺，躬察仪漏，目尽毫厘，心穷筹策。

——祖冲之

由于概率论在集合论的基础上立足，所以本章利用集合及其运算对概率论所涉及的概念，如样本空间、随机事件、和事件、积事件等作出描述；在频率的基础上定义出集合函数——概率，用概率来表示事件的可能性；然后根据基本事件的概率特征对随机试验分类，并介绍最简单的一类概型——古典概型；最后给出求解古典概型的几个有力的工具：条件概率公式、乘法原理、全概率公式和贝叶斯公式等。

知识结构图

