数学建模简明教程

柏宏斌　兰恒友　陈德勤◎主编

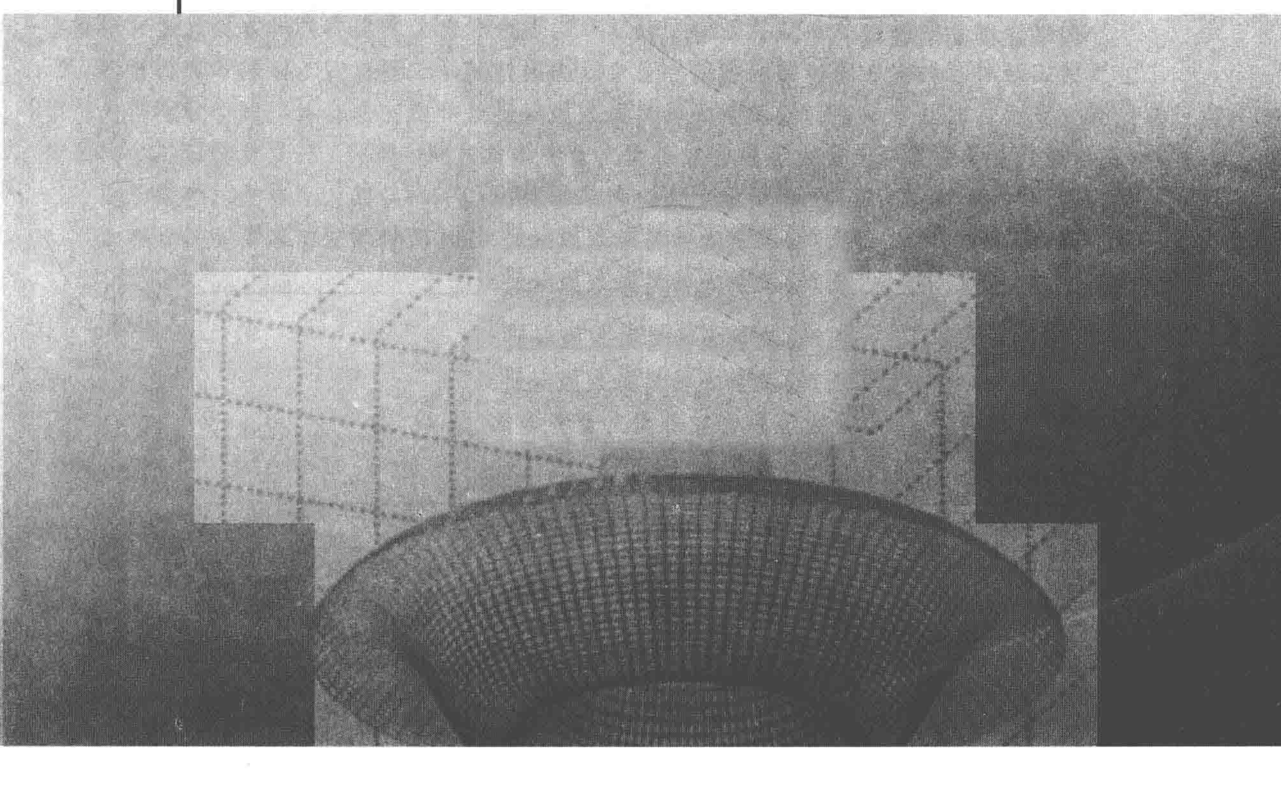
SHUXUE JIANMO

JIANMING JIAOCHENG

西南交通大学出版社

数学建模简明教程

柏宏斌 兰恒友 陈德勤○主编



西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

数学建模简明教程 / 柏宏斌，兰恒友，陈德勤主编.
—成都：西南交通大学出版社，2017.2
ISBN 978-7-5643-5067-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①柏… ②兰… ③陈… Ⅲ. ①数学模型 – 高等学校 – 教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 239767 号

数学建模简明教程
柏宏斌　兰恒友　陈德勤　主编

责任编辑	张宝华
特邀编辑	兰　凯
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http://www.xnjdcbs.com
印　　刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印　　张	7.75
字　　数	192 千
版　　次	2017 年 2 月第 1 版
印　　次	2017 年 2 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-5067-3
定　　价	18.00 元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

前 言

通过对理工科及文理兼收的文科大学生开设“数学建模”素质公选课程，可以让学生了解如何将实际问题抽象成数学应用问题，如何把自然、经济、社会等领域中的实际问题按照既定的目标归结为数学形式，并结合计算机来求解，进而提高学生运用数学思想和方法分析问题和解决问题的能力，培养学生的综合素质．

李大潜院士说：“数学建模的教学及竞赛是实施素质教育的有效途径．”《数学建模简明教程》通过介绍数学建模的重要性、数学建模的含义和数学建模的特点，以及大学生数学建模竞赛和建模培训对大学生能力的培养，可以让学生了解数学建模，同时也让学生认识到数学建模的精神和对素质培养的作用；通过对部分数学建模的初等模型和经典模型及建模常用软件“Matlab”和“SPSS”的介绍，可以让学生掌握数学建模的基础知识和方法；通过对数学建模论文格式要求和参赛优秀论文的介绍，可以让学生了解数学建模的整个过程和环节．

本书的编写得到了四川理工学院教务处和数学建模教练组的大力支持和帮助，四川理工学院大学生数学建模协会在文档和数据整理方面做了大量工作，指导老师刘自山老师及其所带领的参赛同学黄景伟、何鹏、刘洁对参赛论文简述方面做了大量工作，这里一并表示感谢．

由于编者水平有限，错误或不当之处，敬请广大读者批评指正．

如有建议和要求请发邮件到 hbbai@suse.edu.cn．

编 者

2016 年 10 月

目　录

前　言 …… 2

第一章　数学建模概述 …… 1

第一节　数学模型方法的重要性 …… 1

第二节　数学模型及数学建模的含义和特点 …… 2

第三节　大学生数学建模竞赛以及数学建模教学与竞赛对大学生能力的培养 …… 4

第二章　初等数学模型 …… 8

第一节　建立数学模型的基本方法和步骤 …… 8

第二节　双层玻璃窗导热模型 …… 10

第三节　市场经济中的蛛网模型 …… 12

第三章　经典数学模型 …… 15

第一节　数据处理 …… 15

第二节　规划类问题 …… 28

第三节　最优化算法 …… 48

第四章　软件介绍 …… 66

第一节　Matlab 简介 …… 66

第二节　Lingo 软件 …… 76

第三节　SPSS 软件使用简介 …… 84

第五章　论文格式规范及优秀参赛论文简述 …… 87

第一节　数学建模竞赛简介 …… 87

第二节　论文格式规范 …… 87

第三节　优秀论文 …… 89

参考文献 …… 118

第一章　数学建模概述

第一节　数学模型方法的重要性

科学数学化就是把在实践中提出的问题，利用数学理论和计算方法给出正确的数学描述，再运用数学方法解决自然科学、工程技术、经济科学、军事科学和管理科学中的实际问题. 多数人认为其工作程序是：

实际问题—数学化—数学模型—检验—应用

可见，数学模型是用数学方法解决实际问题的重要环节，从实际问题中提炼数学模型就要用到数学模型方法.

数学模型方法简称MM方法，它是将研究的某种事物系统采用数学形式化语言把该系统的特征和数量关系，抽象出一种数学结构的方法，这种数学结构称为数学模型. 一般地，一个实际问题系统的数学模型就是抽象的数学表达式，如代数方程、微分方程、差分方程、积分方程、逻辑关系式，甚至是一个计算机的程序等. 而由这种表达式算得某些变量的变化规律，与实际问题系统中相应特征的变化规律相符合. 一个实际问题系统的数学模型，就是对其中某些特征的变化规律作出最精炼的概括.

目前，数学模型方法已经得到广泛的应用，成为探索客观规律不可缺少的认识手段，并成为理论思维的有效形式，它在科学研究中发挥着愈来愈重要的作用. 其作用可概括为以下三个方面：

第一，数学模型方法同其他数学方法一样为科学研究提供了简洁、精确的形式化语言. 利用该方法从实际事物系统中抽象出数学模型，就是用数学符号表示复杂现象的内在联系，这一套数学符号称为形式化语言. 由于采用了数学形式化语言，所以对问题的陈述、推理、计算就能够大大简化并加速思维进程，从而揭示出事物的内在联系和运动规律，它具有明显的简洁性和精确性. 因此，自然科学、技术科学乃至社会科学的一些定律和原理都尽量表示成简明的数学公式，即数学模型. 如果不用形式化语言而用自然语言，不仅无法表达事物的复杂数量关系，就连最简单的数量关系也难以表达清楚.

第二，数学模型方法为科学研究提供抽象思维能力. 运用数学模型方法解决实际问题，研究者必须对事物系统进行具体分析，并善于“去粗取精”“化繁为简”地进行一系列抽象，从而得到一个既能反映问题本质特征，同时又是理想化、简单化的数学模型. 提炼模型的操作过程实质上是一个科学抽象过程，并由此来反映这种方法所独具的抽象能力. 实践使人们认识到，数学模型方法表现出一种抽象思维力量，而熟练使用模型方法则要求人们必须具有很强的抽象能力，必须精通数学抽象分析方法，如果失掉这种抽象认识手段，科学研究将会走进死胡同.

第三，数学模型方法有着巨大的科学预见作用. 利用模型方法得到数学模型后，可以在

数学模型上展开数学推导、演算和分析，从而对研究对象作出正确的理论概括．由此得到的理论成果，便于作出科学预见，进而把握超出感性经验以外的客观世界．科学史上不少重大发现都是通过数学方法与专业理论相结合才提出的．如电磁波的发现，首先是从英国物理学家麦克斯韦抽象出的数学模型——一组偏微分方程组中推导出来的，后来经德国物理学家赫兹通过实验所证实．

正因为数学思考方式是如此的重要，才使得数学通过数学建模过程能对事实上非常混乱的现象形成概念性和理想化的东西，也使数学建模方法在各种研究方法，特别是与电子计算机有关的研究方法中占据主导地位．数学建模以及与之相伴随的计算正成为工程设计中的关键工具，因而了解和在一定程度上掌握并应用数学建模的思想和方法应当成为当代大学生必备的素质．对于绝大多数大学生来说，这种素质的初步获得是通过高等数学等课程的学习和练习得到的．

第二节　数学模型及数学建模的含义和特点

一、数学模型及数学建模的含义

人们在观察、分析和研究现实对象时常常使用模型，如展览馆里的飞机模型、水坝模型．实际上，照片、玩具、地图、电路图等都是模型，它们能概括、集中地反映现实对象的某些特征，从而帮助人们迅速、有效地了解并掌握那个对象．数学模型不过是更抽象些的模型．

简单地说：数学模型就是对实际问题的一种数学表述．

具体一点说：数学模型是关于部分现实世界，为了某种目的而作出的一个抽象的简化的数学结构．

更确切地说：数学模型就是对一个特定的对象，为了一个特定目标，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设，再运用适当的数学工具得到的一个数学结构．数学结构可以是数学公式、算法、表格、图示等．

当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时，人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上，用数学的符号和语言，把它表述为数学式子，也就是数学模型，然后用通过计算得到的模型结果来解释实际问题，并接受实践的检验．这个建立数学模型的全过程就称为数学建模．

数学建模是一种重要的数学思考方法，是运用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画实际问题的数学模型，再利用计算机求解“解决”实际问题的一种强有力的数学手段；是对现实世界的一特定现象，为了某特定目的，根据特有的内在规律，作出一些重要的简化和假设，再运用适当的数学工具得到一个数学结构，并用它来解释特定现象的现实性态，预测对象的未来状况，提供处理对象的优化决策和控制，设计满足某种需要的产品等．数学建模是使用数学模型来解决实际问题，并将各种知识综合运用于实际问题的解决中，它是培养和提高学生应用所学知识分析问题和解决问题的能力的必备手段之一．简单地说：就是系统的某种特征的本质的数学表达式（或者用数学术语对部分现实世界的描述），即用数学式

子（如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等）来描述（表述、模拟）所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律.

二、数学模型及数学建模的特点

我们已经看到建模是利用数学工具解决实际问题的重要手段. 数学模型有许多优点，但也有缺点. 建模需要相当丰富的知识、经验和各方面的能力，同时应注意掌握分寸. 下面给出了数学模型及数学建模的若干特点，以期学生在学习过程中逐步领会.

（1）模型的逼真性和可行性.

一般来说，人们总是希望模型尽可能地逼近研究对象，但是一个非常逼真的模型在数学上常常是难以处理的，因而不容易达到通过建模对现实对象进行分析、预报、决策或者控制的目的，即实用上不可行. 另一方面，越逼真的模型常常越复杂，即使数学上能处理，这样的模型应用时所需要的“费用”也相当高，而高“费用”不一定与复杂模型取得的“效益”相匹配. 所以建模时往往需要在模型的逼真性与可行性以及“费用”与“效益”之间作出评判和抉择.

（2）模型的渐进性.

稍微复杂一些的实际问题的建模不可能一次成功，通常要经过其前面所描述的建模过程的反复迭代，包括由简到繁，也包括删繁就简，以期获得越来越满意的模型. 在科学发展过程中，随着人们认识和实践能力的提高，各门学科中的数学模型也存在着一个不断完善或者推陈出新的过程. 从 19 世纪力学、热学和电学等许多学科中由牛顿力学建立的模型，到 20 世纪爱因斯坦相对论模型的建立，就体现了模型渐进性这一特点.

（3）模型的强健性.

模型的结构和参数常常是由对象的信息如观测数据确定的，而观测数据是允许有误差的. 一个好的模型应该具有下述意义下的强健性：当观测数据（或其他信息）有微小改变时，模型的结构和参数只能有微小变化，并且一般也要求模型求解的结果有微小变化.

（4）模型的可转移性.

模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到其他领域. 在生态、经济、社会等领域内建模就常常借用物理领域中的模型. 模型的这种性质显示了其应用的广泛性.

（5）模型的非预制性.

虽然人们已经提出了许多应用广泛的模型，但是实际问题是各种各样、变化万千的，因此不可能要求把各种模型作成预制品供你在建模时使用. 模型的这种非预制性使得建模本身常常是事先没有答案的问题（open-end problem），所以在建立新的模型的过程中常常会伴随着新的数学方法或数学概念的产生.

（6）模型的条理性.

从建模的角度考虑问题可以使人们对现实对象的分析更加全面、更加深入、更具条理性，这样即使建立的模型由于种种原因尚未达到实用的程度，对问题的研究也是有利的.

（7）模型的技艺性.

建模的方法与其他一些数学方法如方程解法、规划解法等从根本上讲是不同的，它是无

法归纳出若干条普遍适用的建模准则和技巧的．建模与其说是一门技术，不如说是一种艺术．经验、想象力、洞察力、判断力以及直觉、灵感等在建模过程中所起的作用往往比一些具体的数学知识更大．

第三节　大学生数学建模竞赛以及数学建模教学与竞赛对大学生能力的培养

一、大学生数学建模竞赛

美国大学生数学建模竞赛（MCM/ICM）由美国数学及其应用联合会主办，是唯一的国际性数学建模竞赛，也是世界范围内最具影响力的数学建模竞赛．赛题内容涉及经济、管理、环境、资源、生态、医学、安全、未来科技等众多领域．竞赛要求三人（本科生）为一组，在四天时间内，就指定的问题完成从模型建立、求解、验证到论文撰写的全部工作．美国大学生数学建模竞赛体现了参赛选手研究问题、解决方案的能力以及团队合作精神，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖．

MCM/ICM 是 Mathematical Contest In Modeling 和 Interdisciplinary Contest In Modeling 的缩写，即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”．MCM 始于 1985 年，ICM 始于 2000 年，由 COMAP（the Consortium for Mathematics and Its Application，美国数学及其应用联合会）主办，得到了 SIAM，NSA，INFORMS 等多个组织的赞助．MCM/ICM 着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性．

2015 年，共有来自美国、中国、加拿大、芬兰、英国、澳大利亚等 19 个国家和地区的 9773 支队伍参加 MCM/ICM，其中包括来自哈佛大学、普林斯顿大学、麻省理工学院、清华大学、北京大学、浙江大学、复旦大学、上海交通大学、西安交通大学、哈尔滨工业大学、华北电力大学、西南交通大学、北京邮电大学等国际知名高校学生参与此项赛事角逐．

中国大学生数学建模竞赛创办于 1992 年，每年一届，目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛，也是世界上规模最大的数学建模竞赛．2015 年，来自全国 33 个省（市、自治区）及新加坡和美国的 1326 所院校、28665 个队（其中本科 25646 队、专科 3019 队）、近 86000 名大学生报名参加本项竞赛．2016 年，来自全国 33 个省/市/区（包括我国香港和澳门）及新加坡的 1367 所院校、31199 个队（其中本科 28046 队、专科 3153 队）、共 93000 多名大学生报名参加本项竞赛．

1. 竞赛设置

竞赛宗旨：创新意识　团队精神　重在参与　公平竞争

指导原则：扩大受益面，保证公平性，推动教学改革，提高竞赛质量，扩大国际交流，促进科学研究．

全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一．该竞赛于每年 9 月（一般在上旬某个周末的星期五至下周星期一，共 3 天，72 小时）举行，面向全国大专院校学生，不分专业；但竞赛分本科、专科两组，所有大学生均可参加本科组竞赛，而专科组竞

赛只有专科生（包括高职、高专生）可以参加. 同学可以向本校教务部门咨询，如有必要也可直接与全国竞赛组委会或各省（市、自治区）赛区组委会联系.

2. 社会应用

数学建模的应用对数学建模竞赛起了非常大的促进作用. 国内首家数学建模公司——北京诺亚数学建模科技有限公司已在北京成立，这是已读博士学位的魏永生和另外两位志同道合的同学一起创办的创业项目，这也源于他们熟悉的数学建模领域. 魏永生三人在 2003 年 4 月组建了一个大学生数学建模竞赛团队，该团队当年就获得了国家二等奖，2005 年又荣获了国际数学建模竞赛一等奖，同年 10 月他们注册了数学建模爱好者网站. 本着数学建模走向社会、走向应用的宗旨，他们在 2007 年 6 月正式确立了以数学建模应用为创业方向的团队，开启了创业之路. 同月初，北京诺亚数学建模科技有限公司正式注册，这标志着魏永生团队的创业之路走向正轨. 现在，诺亚数学建模公司正以其专业化的视角不断拓展业务，壮大实力，已涉及铁路交通、公路交通、物流管理等相关领域的数学建模及数学模型解决方案、咨询服务. 魏永生向记者解释说，也许很多人并不了解数学建模究竟有什么用途，对此，他举了个例子：对于一个火车站，若要计算隔多久发一辆车才能既保证把旅客都带走，又能最大限度地节约成本，这些通过数学建模就能找出最优方案. 魏永生介绍说，他们的数学建模团队已有 6 年的历史，彼此配合很默契，也做了数十个大大小小的项目. 他们的创业理念是为直接和潜在客户提供一种前所未有的数学建模优化及数学模型解决方案，真正为客户实现投资收益的最大化、生产成本费用的最小化.

3. 相关意义

数学建模竞赛是国内高校中历史最悠久、举办届数最多的学科竞赛，在组织模式上创造了许多经验，已被其他学科竞赛借鉴，同时也带动了其他大学生学科竞赛的健康发展.

数学建模竞赛具有三个阶段：赛前培训、竞赛阶段、赛后继续阶段. 如 2004 年的"饮酒驾车"赛题，让学生分析、估计司机饮用少量酒后多长时间驾车才符合交通规则，重庆某学校师生与当地交警大队联系，由交警大队安排司机做试验，学校师生进行分析，根据司机肇事时的酒精浓度推测他饮用了多少酒；该成果在交警队得到了应用；该成果获得第九届"挑战杯"全国大学生课外学术科技作品竞赛全国终审决赛获全国奖的"数理类"作品.

现在，高校普遍开设了数学建模课程，并举办了校内竞赛，倡导"一次参赛终身受益"的参赛理念. 近 17 年来直接参加全国竞赛的学生约有 20 万人，至少有 200 万名学生在竞赛的各个层面上得到了培养和锻炼.

数学建模竞赛是开放型竞赛，是大学阶段除毕业设计外难得的一次"真枪实弹"的训练，它要求学生三天内自觉地遵守竞赛纪律，具有诚信意识和自律精神. 竞赛丰富和活跃了广大同学的课外生活，为优秀学生脱颖而出创造了条件.

二、数学建模与竞赛对大学生能力的培养

数学建模竞赛是一项有意义的活动，它对于提高在校大学生的综合素质、培养在校大学生的创新意识和合作精神、促进学校教学建设和教学改革都有着重要的作用. 数学建模竞赛

也是当代大学生素质教育的一种具体形式，竞赛涉及参赛者的德、智、体等各方面的能力水平. 诚信是比赛的基本原则，智力是比赛的动力，体力是比赛的基础. 参加数学建模竞赛是对学生道德修养、创造能力和身体素质的一次全面检验，是学校教学改革成果的综合体现.

数学建模竞赛要求学生在面对一个从未接触过的实际问题时，要运用数学方法和计算机技术加以分析和解决，此时，他们必须开动脑筋，拓宽思路，并充分发挥创造力和想象力. 它对学生创新能力的培养作用早已引起了社会各界的广泛关注.

数学建模竞赛带给参赛学生无数次的惊喜和成功，而成功和喜悦的背后又是多少局外人难以想象的艰辛，是竞赛磨炼了他们的意志，丰富了他们的人生阅历. 竞赛锤炼了他们的创新与合作的心态，这种心态又是他们成功的基石，因为他们胜而不骄，败而不馁.

在这个平台上，参赛学生拥有遇到困难时将“建模”进行到底的勇气，并尽情地展示自我，超越自我，学会了如何将知识与应用融入一体的学习；学会了如何将理论与实践融入一体的思考；学会了创新思维和团结协作意识，收获了成功的喜悦和队友的友谊.

下面从三个方面来讲述数学建模活动与其能力培养的关系.

1. 数学建模与就业、升学、出国间的关系

学习数学建模能够接触到国内外的各种数学软件，如 Matlab、SAS、Lingo 等；能够拓宽解决问题的思路与方法；能够提高解决实际问题的创新能力和动手能力及科研能力；能够体验撰写论文流程；能够锻炼学生抗压耐压能力，因此，学习数学建模特别是参加了国内外的数学建模大赛，至少能让人明白你已基本具备了上述能力.

一个人基本具备了上述这些能力，也就有了实际的工作能力，现在很多单位特别需要有思想，能动手，还能吃苦耐劳的工作者，而在中国的大学生中真正具备这些能力的学生并不多. 学习建模的学生正以他们的博学多才、敢想敢干、坚强意志而深受用人单位青睐，下面以华中农业大学为例做一介绍. 自 2005 年以来，该校学生的数学建模成绩突飞猛进，这也使得只要参加过数学建模的学生都找到了很好的工作. 阿里巴巴、百度、搜狐、华为、腾讯、京东等企业均有他们的学生.

学习数学建模，不仅能够让学生学到很多建模及其数据处理的方法，更能培养学生思考问题和解决问题的良好习惯. 不管是自然科学还是社会科学甚至人文科学等，都需要抽象出问题的背景和所要解决的问题，之后就归结为数学问题了. 数学是任何学科科学研究的基础，一个学生一旦掌握了这种研究问题的方法和意识，他在科学研究中也就很容易取得成功. 作为高校的研究生导师，都非常愿意录取这样的学生. 华中农业大学参加过全国数学建模竞赛的学生中有近一半的进入了清华大学、北京大学、北京师范大学、中国人民大学等“985”高校进行深造；有近三分之一的学生本科毕业后进入了美国、英国、德国、新加坡、澳大利亚等国的著名高校深造，且大部分学生取得了资助. 在华中农业大学参加数学建模的动力就是升学和出国，而很多出国留学机构也都和该校的数学建模基地进行了合作. 该校数学建模团队正努力将数学建模基地打造为出国基地.

2. 企业中的数学建模问题

21 世纪以来，中国经济高速发展，中国与世界发达国家的差距越来越小，而随着经济市场化、全球化步伐的加快，数据信息的海量化和复杂化程度越来越高，这也使得企业在高速

变化的全球经济中面临的竞争和挑战将会很大，但同时机会也会很多. 然而如何科学地进行决策以期获得最大利润才是企业的生存之本，因此，作为一个企业需要在市场竞争分析、消费需求分析、生产优化控制、运输储存、产品开发、资源管理以及人员调配等诸多环节进行系统优化，而这些优化是离不开数学建模的. 随着大数据时代的到来，企业更需要具有大数据处理能力的硬件和软件，而软件就是数学建模及相应的计算方法.

正是数学建模教给了学生如何运用数学知识建立企业生产决策中大数据处理所需要的数学模型，并编写相应的计算方法，而具备这些能力的学生无疑是企业所青睐的. 数学建模人才的培养与社会需求紧密相连，因而具有旺盛的生命力.

企业中的数学建模问题，大致可分为五大类：一是预测预报问题，包括产品销售、交易期望、生产前景等；二是评价与决策，包括实施方案的风险评估、项目的选择、绩效的评价等；三是分类与判别，包括消费群体的分类、产品归属的判别等；四是关联与因果分析，包括产品质量控制、市场营销等；五是优化与控制，包括生产流程控制、产品定价问题、工程预算问题、规划设计问题等.

数学建模问题本身就来自于现实世界，来自于企业，因此数学建模问题解决的好坏对企业的发展起到了至关重要的作用，而掌握了这种技术的人无疑将在企业中发挥重要的作用.

3. 数学建模对科研和工作的影响

数学在生活中无处不在，数学能力的考察并不仅仅是单纯数学知识层面的考察，更多的是数学思维能力和应用能力的考察. 而数学建模的实践就是引导大学生们发现实际生活中的数学规律，学会运用数学方法来解决生活当中的问题，从而使自己的思维能力得到很好的锻炼. 所以说，参加数学建模学到的实际是一种数学技能，一种可以伴随人一生的思维能力. 包括逻辑思维能力、逆向思维能力、创新能力、快速自学能力、文字表达能力以及团队协作能力，等等.

通过数学建模的学习，培养了学生"学数学，用数学"的意识和能力，包括查阅资料的能力、文献综述的能力、模型建立的能力、问题分析的能力、计算编程的能力、科研写作的能力以及超强的自学能力. 而有了这些能力，学生就有了创新和动手的能力，也就有了较高的科研潜能和素质，同时也具备了较强的工作能力. 科研工作也需要一个具有肯吃苦、善思考、勤动手、能反思等素质的人来担当，而数学建模就是为了培养学生的这些素质，因此，学习数学建模就是培养了我国的工作能手和科研骨干.

第二章　初等数学模型

第一节　建立数学模型的基本方法和步骤

一、数学建模的基本方法

建立数学模型的方法没有一定的模式，模型的优劣主要在于能否反映系统的全部重要特征，即模型的准确性和实用性. 建立模型的方法主要有：主成分分析法、因子分析法、聚类分析法、最小二乘法与多项式拟合法、方差分析逼近理想点排序法、动态加权法、灰色关联分析法、灰色预测法、模糊综合评价、时间序列分析法、蒙特卡罗（MC）仿真模型法、BP神经网络方法、数据包络分析法、多因素方差分析法等. 如何具体应用这些算法，实现问题的求解，需要从问题的本质特征入手，再进行合理分析，进而选取正确的算法.

1. 机理分析

机理分析就是根据对现实对象特性的认识，分析因果关系，从而找出反映其内部机理的规律，所以建立的模型常有明确的物理或现实意义. 主要方法有：

（1）比例分析法：建立变量之间函数关系的最基本、最常用的方法.

（2）代数方法：求离散问题（离散的数据、符号、图形）的主要方法.

（3）逻辑方法：数学理论研究的重要方法. 常用来解决社会学和经济学等领域的实际问题，在决策、对策等学科中得到了广泛应用.

（4）常微分方程：常用来解决两个变量之间的变化规律的问题，关键是建立“瞬时变化率”的表达式.

（5）偏微分方程：常用来解决因变量与两个及两个以上自变量之间的变化规律的问题.

2. 测试分析

测试分析方法就是将研究对象视为一个“黑箱”系统，其内部机理无法直接寻求，只有通过测量系统的输入输出数据，再以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合的最好的模型的方法.

（1）回归分析法：通过函数 $f(x)$ 的一组观测值 (x_i, y_i) ，$i=1,2,\cdots,n$ ，来确定函数的表达式. 由于处理的是静态的独立数据，故称为数理统计方法.

（2）时序分析法：处理的是动态的相关数据，故又称为过程统计方法.

实际运用时，可先用机理分析法建立模型的结构，再用系统测试法确定模型中的参数.

3. 仿真和其他方法

（1）计算机仿真（模拟）：实质上它是一种统计估计方法，等效于抽样试验，主要分为离散系统仿真和连续系统仿真.

（2）因子测试法：在系统上做局部试验，再根据试验结果不断进行分析和修改，进而求得所需的模型结构.

（3）人工现实法：基于对系统过去行为的了解和对未来希望达到的目的，考虑到系统有关因素的可能变化，人为地组成一个系统.

二、数学建模的基本步骤

建模的步骤一般分为模型准备、模型假设、模型建立、模型求解、模型分析、模型检验、模型应用.

（1）模型准备.

要建立数学模型，首先要对问题进行剖析，以抓住问题的本质和主要因素，进而确定问题的关键字，并查阅资料和文献，了解问题的实际背景、相关数据和相关研究进展情况，以获得关键性资料，初步确定研究问题的类型. 数学建模竞赛所处理的问题都是来自于实际生活中的各个领域，没有固定的答案，所以要明确问题中所给出的关键信息，必须把握好解决问题的方向和目的，再仔细分析问题，适当添加关键性信息和数据（权威性），进而为后续的求解模型奠定基础.

（2）模型假设.

根据对象的特征和模型建立的目的，对问题进行必要的、合理的简化，再用精确的语言作出假设，可以说这是建模过程中关键的一步. 一般来说，一个实际问题不经过简化假设是很难翻译成数学问题的，即使可能，也很难求解. 不同的简化假设会得到不同的模型，假设做得不合理或过于简单，均会导致模型失败或部分失败；假设做得过于详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，可能会使你很难甚至无法继续下一步的工作. 通常，做假设的根据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的分析，也可以是两者的综合. 做假设时既需要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济等方面的知识，又需要充分发挥想象力、洞察力和判断力，要善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，舍弃次要因素，尽量将问题线性化、均匀化. 写出假设时，语言要精确，界限要分明，要简明扼要.

（3）模型建立.

根据假设以及事物之间的联系，利用适当的数学工具去刻画各变量之间的关系，建立相应的数学结构，即建立数学模型. 把问题化为数学问题，注意要尽量采取简单的数学工具，因为简单的数学模型往往更能反映事物的本质，而且也容易使更多的人掌握和使用.

（4）模型求解.

利用已知的数学方法求解上一步所得到的数学问题时，往往还要做出进一步的简化或假设，在难以得到解析解时，应当广泛借助计算机技术求解，如 Matlab、Lingo、SPSS 等.

（5）模型分析.

对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时要根据所得结果给出数学上的预报，有时则要给出数学上的最优决策或控制，然而不论哪种情况出现都需要进行误差分析，以及模型对数据的稳定性或灵敏性分析，等等.

（6）模型检验.

分析所得结果的实际意义，再与实际情况进行比较，看看所得结果是否符合实际；如果结果不够理想，应该修改或者补充假设或者重新建模，有些模型需要几次反复才能不断完善.

（7）模型应用.

所建立的模型必须在实际应用中才能产生效益，也只有在应用中才能不断改进和完善. 应用的方式取决于问题的性质和建模的目的.

第二节 双层玻璃窗导热模型

这里运用平壁稳态导热数学模型建立一个双层玻璃窗导热模型，以说明双层玻璃设计的优化问题.

一、模型准备

北方城镇的很多建筑物的窗户是双层玻璃的，即窗户上安装两层玻璃且中间留有一定空隙，两层厚度为 d 的玻璃夹着一层厚度为 l 的空气. 根据常识这样做是为了保暖，是为了减少室内向室外的热量流失. 下面建立一个数学模型来描述热量通过窗户传导的流失过程，并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗（玻璃厚度为 $2d$ ）的热量传导进行对比，以定量分析双层玻璃窗能够减少多少热量损失.

二、模型假设

（1）热量的传播过程只有传导，没有对流. 即假定窗户的密封性能很好，两层玻璃之间的空气是不流动的.

（2）室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变，热传导过程是稳态传热.

（3）玻璃材料均匀，热传导系数是常数.

三、模型构成

在上述假设下的热传导为平壁稳态导热，所以遵从傅里叶基本定律. 厚度为 d 的均匀介质，两侧温度差为 ΔT，则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量为 q，则由傅里叶热传导定律 $\mathrm{d}Q=-\lambda \mathrm{d}A\dfrac{\partial t}{\partial x}$ 得：

$$q=\lambda\frac{\Delta T}{d} \tag{1}$$

其中 λ 为热传导系数. 即双层玻璃窗内层玻璃的外层温度是 T_a，外层玻璃的内层温度是 T_b，玻璃的热传导系数为 λ_1，空气的热传导系数为 λ_2，双层玻璃中空气厚度为 l. 由（1）式知单位时间单位面积的热流密度为：

$$q_1 = \lambda_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = \lambda_2 \frac{T_a - T_b}{l} = \lambda_1 \frac{T_b - T_2}{d} \tag{2}$$

从（2）式中消去 T_a, T_b，可得：

$$q_1 = \frac{\lambda_1 (T_1 - T_2)}{d(s+2)}, \text{ 其中 } s = h\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad h = \frac{l}{d} \tag{3}$$

而对于厚度为 $2d$ 的单层玻璃窗，其热量传导为：

$$q_2 = \lambda_1 \frac{T_1 - T_2}{2d} \tag{4}$$

两者之比为：

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{s+2} \tag{5}$$

显然，$q_1 < q_2$. 为了得到更具体的结果，查得 λ_1 及 λ_2 的值（焦耳/厘米·度），常用玻璃的热传导系数 $\lambda_1 = 4\times10^{-3}\ \mathrm{J/cm\cdot k}$，不流通、干燥空气的热传导系数 $\lambda_2 = 2.5\times10^{-4}\ \mathrm{J/cm\cdot k}$，所以有：

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 16.32$$

在分析双层玻璃窗比单层玻璃窗能减少多少热量损失时，我们做最保守的估计，即取 $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=16$，由（3）、（5）两式可得：

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{8h+1}, \text{ 其中 } h = \frac{l}{d} \tag{6}$$

比值 $\frac{q_1}{q_2}$ 反映了双层玻璃窗在减少热量损失上的功效，它只与 $h=\frac{l}{d}$ 有关. 图 2-1 给出了 $\frac{q_1}{q_2}$ 关于 h 的函数曲线，当 h 增加时，$\frac{q_1}{q_2}$ 迅速下降，而当 h 超过一定值后（比如 $h>4$ 后），$\frac{q_1}{q_2}$ 下降变缓，可见 h 不必选择过大.

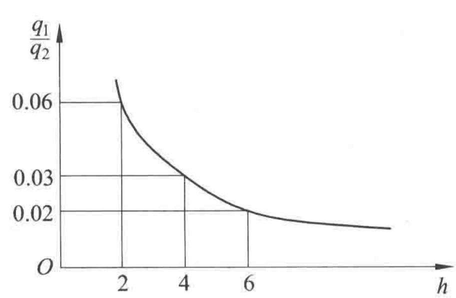


图 2-1 $\frac{q_1}{q_2}$ 关于 h 的函数曲线

四、模型求解及应用

这个模型具有一定的应用价值．制作双层玻璃窗虽然工艺复杂，会增加一些费用，但它减少的热量损失却是相当可观的．通常，建筑规范要求 $h=\frac{l}{d}\approx 4$，即两层玻璃之间的间距是玻璃厚度的 4 倍．按照这个模型，$\frac{q_1}{q_2}\approx 3\%$，即双层窗户比同样多的玻璃材料制成的单层窗户节约热量97%左右．不难发现，有如此高的功效的原因在于两层玻璃之间的空气有极低的热传导系数 λ_2，而这则要求空气是干燥的、不流通的．作为模型假设的这个条件在实际环境下当然不可能完全满足，所以实际上双层窗户的功效会比上述结果差一些．另外，应该注意到，一个房间的热量散失，通过玻璃窗常常只占一小部分，热量还要通过天花板、墙壁、地面等流失．

运用平壁稳态导热数学模型建立一个双层窗导热模型，让我们认识到切实把传热学与数学建模结合起来了．用数学建模的方法解决传热学的问题，虽然实例很简单，但足以说明实际问题．

第三节　市场经济中的蛛网模型

一、蛛网模型介绍

蛛网理论（cobweb theorem），又称蛛网模型，是利用弹性理论来考察价格波动对下一个周期产量产生影响的动态分析，是用于市场均衡状态分析的一种理论模型．蛛网理论是 20 世纪 30 年代出现的一种动态均衡分析方法．

蛛网模型理论是在现实生活中应用较多且较广的动态经济模型，它在一定范围内揭示了市场经济规律，对实践具有一定的指导作用．根据产品需求弹性与供给弹性的不同关系，将波动情况分成三种类型：收敛型蛛网（供给弹性小于需求弹性）、发散型蛛网（供给弹性大于需求弹性）和封闭型蛛网（供给弹性等于需求弹性）．近年来，许多学者对经典的蛛网模型进行了广泛的研究并做了一些改进，建立了更符合实际经济意义的蛛网模型．

二、蛛网模型在西方经济学中的定性分析

蛛网模型考察的是生产周期较长的商品．蛛网模型的基本假设条件是：商品的本期产量 Q_t^S 决定于前一期的价格 P_{t-1}，即供给函数为

$$Q_t^S=f(P_{t-1})$$

商品本期的需求量 Q_t^D 决定于本期的价格 P_t，即需求函数为

$$Q_t^D=g(P_t)$$