

现代数学基础丛书

170

自然边界积分方法 及其应用

余德浩 著



科学出版社

现代数学基础丛书 170

自然边界积分方法及其应用

余德浩 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了自然边界积分方法的数学理论及其应用,总结了作者在这一方向三十余年的研究成果,包括椭圆边值问题的自然边界归化原理、超奇异积分的数值计算、对调和方程边值问题、重调和方程边值问题、平面弹性问题和 Stokes 问题的应用、自然边界元与有限元耦合法,以及基于自然边界归化的无界区域分解算法等内容。

本书可供高校计算数学、计算力学、应用数学专业的师生,从事数值计算的科研人员和工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

自然边界积分方法及其应用/余德浩著. —北京: 科学出版社, 2017.6
(现代数学基础丛书; 170)

ISBN 978-7-03-049629-4

I. ①自… II. ①余… III. ①边界积分法-研究 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 200496 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2017 年 6 月第一次印刷 印张: 32

字数: 650 000

定价: 168.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言,书籍与期刊起着特殊重要的作用.许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍,从中汲取营养,获得教益.

20世纪70年代后期,我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了10余年,而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着.1978年以后,我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会.当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述.据此,科学出版社陆续推出了多套数学丛书,其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出,前者出版约40卷,后者则逾80卷.它们质量甚高,影响颇大,对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者,针对一些重要的数学领域与研究方向,作较系统的介绍.既注意该领域的基础知识,又反映其新发展,力求深入浅出,简明扼要,注重创新.

近年来,数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用,还形成了一些交叉学科.我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持,编辑人员也为其付出了艰辛的劳动.它获得了广大读者的喜爱.我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展,使它越办越好,为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨 乐

2003年8月

前 言

科学与工程计算中的许多问题可以归结为数值求解偏微分方程,有限元法及有限差分法就是数值求解偏微分方程的标准方法. 这些方法通常适于求解有界区域内的偏微分方程问题. 但许多实际计算问题涉及无界区域,而对无界区域问题,仅应用上述方法必然遇到本质性的困难,也就是说,即使付出很大的计算代价,往往也难以获得满意的计算结果. 于是,为了有效地数值求解无界区域上的偏微分方程以及其他一些有奇异性的问题,各类边界积分方程法与人工边界方法便应运而生.

我国已故著名数学家、作者的老师冯康先生(1920—1993)早在20世纪70年代后期,就从“同一物理问题可以有不同的数学形式,它们在理论上等价,但在实践中未必等效”这一著名观点出发,深刻地总结了有限元法对有界区域问题成功的原因,进而探索无界区域问题的更适宜的数学形式及更有效的计算方法. 他于1980年发表了题为“论微分与积分方程以及有限与无限元”的短文,提出了正则边界归化的思想,又在1982年与作者联名在中法有限元会议上发表了论文“椭圆边值问题的正则积分方程及其数值解”,系统论述了这一思想,推导出一系列超奇异的边界积分方程. 该文还应用作者提出的积分核级数展开等方法,实现了这些超奇异积分方程的数值求解. 在随后的1983年国际数学家大会上,冯康院士做了题为“有限元方法与自然边界归化”的45分钟邀请报告^[1-6].

对微分方程边值问题实现边界归化的思想实际上早在19世纪就已出现,但真正应用于数值计算却是从20世纪60年代才开始的. 到20世纪70年代后期,边界积分方程法也被称为边界元方法. 当时国际流行的边界元法包括直接法和间接法两大类. 中国学者首创的自然边界元法则与这些方法完全不同,有很多独特的优点. 它保持了原问题的一些基本特性,又可以与有限元法自然地耦合.

作者从事边界元法研究始于1978年. 那一年国家恢复研究生制度,使作者在大学毕业工作11年后又成为中国科学院的研究生,并有幸师从著名数学家冯康院士攻读硕士及博士学位. 当时国际上刚兴起边界元法研究,基于经典的边界积分方程理论已开始发展直接边界元法和间接边界元法. 冯康先生为作者选定的研究课题则是:提出并发展与西方流行方法完全不同的新的边界元法. 作者的硕士论文与博士论文都是关于这一课题的^[7,8]. 我们的新方法后来被冯康先生定名为自然边界元方法.

在这些工作的基础上,作者发表了一系列论文^[9-21],于1989年独立获得了中国科学院自然科学一等奖,并于1993年在科学出版社出版了专著《自然边界元方

法的数学理论》^[22]。该书的主要内容取自我 1984 年的博士学位论文,但因此后我相继到美国和德国访问工作,该书推迟到我回国后才完成并出版。1991 年冯康先生亲自为该书定名并向科学出版社推荐出版。他在推荐信中写道:“该书系统介绍了由我国学者首创并发展的、有许多独特优点的一种新型边界元方法,完全不同于国内外现有的同类书籍,是一本具有国际领先水平的、极有特色并反映我国学者研究成果的学术专著,很有出版价值。”冯康先生不幸于 1993 年 8 月去世。让作者感到欣慰的是,在冯先生去世前几个月,该专著出版了。当我把该书的精装本送到他手里时,能感觉到他异常兴奋的心情。

在冯康先生的影响下,清华大学韩厚德教授在相关方向也做了大量的研究工作,并获得了国家教委和北京市的多项奖励^[23-28]。由于我们的研究方向接近,且在这些研究方向都做出了一系列有意义的研究成果,作者与韩教授一起联合申报了国家科技奖励。2008 年我们的研究成果“人工边界方法与偏微分方程数值解”获得了国家自然科学奖二等奖。

美国著名学者 J.B. Keller 等自 1989 年起也致力于这一方向的研究,他们称这一方法为准确的人工边界条件法,或 Dirichlet to Neumann 方法,即 DtN 法。尽管他们强调 DtN 法是他们“在西方独立发展的”,但还是在公开论著中承认了该方法“类似于”中国学者更早提出的“自然边界元与有限元耦合法”。当然,正是由于他们的参与和推动,以及国内外众多计算数学和科学工程计算专家的大量后继工作,该方法获得了更迅速的发展和更广泛的应用。大量的研究成果已经说明,自然边界积分方法不仅有重要的理论意义,也有非常广阔的应用前景^[29-38]。

本书的第一版是在 1993 年由科学出版社出版的。由于颇受读者欢迎,两三年间即告售罄。随后科学出版社要求作者将该书译为英文,并和国际著名出版社 Kluwer Academic Publishers 合作于 2002 年出版了英文版专著 *The Natural Boundary Integral Method and Its Applications*^[39]。又因供不应求,科学出版社于 2006 年又重印一次,但很快也告售罄。正是由于科学出版社认为该书有较高学术价值,且至今仍有读者需求,才鼓励作者对原书做修订,使本书新版得以问世。与 1993 年版《自然边界元方法的数学理论》相比,本版增加了第 7 章,并在第 2 章中增加了部分内容,又补充了很多参考文献,包括作者及学生们近年发表的相关论文^[40-102]。为了与英文版的书名相一致,本版将书名改为《自然边界积分方法及其应用》。

本书是作者数十年研究成果的系统总结。有感于数十年来提出并发展自然边界元及相关计算方法,特别是该方法具有化繁为简、化无界为有限、保持原问题基本特征等独特优点,作者曾以“研究杂感”为题赋得七绝二首,今录于此作为本序言的结尾。

其一为:

化整为零简驭繁,裁弯取直裂单元。

人工边界自然妙, 返朴归真索本源.

其二为:

分解合成简或繁, 研究探索几多番.

欲知界外无穷事, 先解域中有限元.

这两首诗或许可帮助读者理解自然边界积分方法及其与有限元的耦合算法和区域分解算法的真谛.

作者感谢中国科学院对国家自然科学奖获得者给予的后续研究经费支持, 使本书有足够的出版经费保证. 感谢厦门大学在我退休后又聘我三年, 使我得以在非常优美的环境和适宜的气候条件下完成本书的部分工作. 也再次感谢科学出版社诸位同仁为本书再版所付出的辛勤劳动.

余德浩

2014 年 9 月于北京

2002年英文版前言译文

边界积分方程法即边界元方法作为求解偏微分方程的一类重要数值方法,近二十年来得到了迅速发展,并在科学和工程计算的许多领域获得了广泛应用.迄今已有大量关于这类方法及其应用的论文.本书介绍了由中国数学家首先提出并发展的自然边界积分法,也即自然边界元方法.该方法完全不同于国际上流行的经典边界元方法,有许多独特的优点.早在20世纪70年代后期,我的博士生导师冯康教授就已提出了自然边界归化的思想,当时曾称之为正则边界归化.正是他的开创性工作和直接指导将我带进了这一研究领域,并鼓励我系统发展了这一方法.现在自然边界积分法已得到国内外同行的广泛关注,成为边界积分法新的重要分支.这里自然应该强调冯康教授对此做出的重要贡献.

本书是为学习或从事计算数学、计算力学、应用数学或其他相关领域工作的研究生、大学高年级学生、大学教师及科学工作者编写的.此外,也可供对应用边界元方法感兴趣的工程技术人员参考.本书共分七章.第一章概述自然边界积分法,包括自然边界归化的基本思想、超奇异积分的数值计算,以及自然边界积分法的误差估计.第二至第五章分别讨论调和边值问题、重调和边值问题、平面弹性问题和 Stokes 问题的自然边界归化和自然边界积分法,包括解的复变函数表示、若干典型区域上的自然积分方程和 Poisson 积分公式、自然积分算子的性质,以及自然积分方程的数值解法.第六章阐述自然边界元和有限元的耦合,以及无穷远边界条件的近似.第七章介绍基于自然边界归化的区域分解算法.

本书系统总结了本人二十余年来关于自然边界积分法的研究成果,包括已发表的一系列论文和若干未发表的结果.其中许多内容1988年后曾在中国科学院研究生院及其他一些大学讲授.本书不追求完备,因此关于流行的经典边界元法及其应用的许多内容仅在1.2节一带而过,读者可以从其他书籍中读到相关内容.

本书中文版《自然边界元方法的数学理论》于1993年由科学出版社首次在北京出版,至今已过去八年了.在那年春天,我的导师、中国科学院冯康院士还健在.当我把刚收到的崭新的精装本送到他手里时,他非常高兴和激动.自然边界归化和自然边界积分法正是他亲手开创的研究方向,我的书也正是他创造性思想的发展和实现.为了该书的成功出版,他和我的另一位老师、中国科学院石钟慈院士都推荐我申请科学出版基金.他们在推荐信中写道:“本书完全不同于现有的其他同类书籍.这是一本具有国际先进水平的极具特色的学术专著,反映了中国数学家在该方向的研究成果……该书的学术思想是全新的.其内容包括了作者十余年来在该方

向的研究成果, 有很大的出版价值。”得益于他们的支持, 我的书被科学出版社这一中国最权威的学术出版机构列入“纯粹数学与应用数学专著”丛书出版了。

该书出版后深受海内外华人读者欢迎, 随后也引起一些并不懂中文的外国数学家的兴趣。来信向我索要该书的包括德国的 W.L. Wendland 教授, 日本的 H. Fujita 教授, T. Ushijima 教授和 K. Onishi 教授, 以及其他一些外国学者。H. Fujita 教授曾任日本数学会会长, 他在 1996 年 10 月 11 日的来信中对我的书说了如下一些赞美之词: “尽管我需要加一点想象才能阅读中文数学论著, 我还是能够读懂并欣赏你的书。确实, 你的书同时包含了关于基础分析和应用分析的重要课题的基本的及高级的事实和结果。带着对你的老师和我朋友冯康教授的怀念, 我重温了对你们学派的思想和方法的尊敬。这是我看你的书的第一印象……我特别高兴地发现, 我能通过你们的 ‘K’ 算子即我们的 ‘S’ 算子, 共享对边值问题应用算子理论方法的兴趣, 这是位势理论的现代版本。”当然, 绝大多数外国朋友即使利用他们的想象也读不了我的中文书。因此我相信, 确实需要将该书由中文译成英文。事实上, 自该书以中文出版以来, 该书责任编辑、科学出版社的林鹏先生就曾多次要求我翻译该书, 并为出版其英文版而努力。只是因为我当时忙于其他工作, 这一英文版才推迟到今天问世。

此外, 自 1993 年以来, 自然边界积分法已有了一些新的发展和应用, 其理论上及实践中的重要性也已被越来越多的相关领域的科学家所认识。特别是近年来在有限元和边界元方法的研究中, 发展耦合法及区域分解算法已形成主要趋势, 从而使自然边界归化的优越性愈加显著。耦合法的许多理论分析基于自然边界归化。自然边界积分算子, 即 Dirichlet-Neumann 算子, 或 Steklov-Poincaré 算子, 在区域分解算法中也起着关键作用。

冯康教授对自然边界归化和自然边界积分法的创始、发展和应用做出了重大贡献。我们可以在 1982 年中法有限元会议上他与余德浩联名的主题报告中, 以及在 1983 年国际数学家大会的邀请报告中, 发现他的原创性思想。尽管此后十年他的学术兴趣转向提出和发展 Hamilton 系统的辛几何算法, 但他仍多次强调自然边界归化的优越性。他曾在 1991 年说: “自然边界归化和区域上的变分原理完全相容, 边界有限元也与区域有限元完全相容。因此得到区域有限元加上边界元的求解方法高度灵活, 并且因区域和边界间自然而相容的耦合适用于大规模问题。事实上, 这正是现今因为与并行计算相关而迅猛发展的所谓区域分解算法的先驱性贡献。”^[1] 在 1993 年他又写道 “求解边值问题的标准技术是有限元方法, 然而对包含无界及/或断裂子区域、凹角、交界面等的复杂问题, 计算代价可能很大。可以设想与边界元耦合的完整的有限元体系。有许多不同的边界归化途径。最好的途径看来是自然边界归化: 利用第一类 Green 函数得到带 Hadamard 有限部分的超奇异积分的人工边界条件, 以删除引起麻烦的子区域。其实际好处是: 首先, 边界归化保持变分泛函

不变, 从而边界元和剩下的良态区域上的有限元的耦合是直接而自然的; 其次, 超奇异性实际上改善了稳定性, 并更利于有效求解. 自然边界归化能直接应用于区域分解和删除, 也能间接应用于预条件问题.”^[1]

在冯康教授上述论断的指导下, 作者提出并发展了基于自然边界归化的新的区域分解算法^[103-115], 这些方法完全不同于标准的有界区域上的区域分解算法, 特别适用于无界区域. 这些新的结果作为自然边界积分算子理论的发展和应用, 已被写进本书. 这就是本英文版增加的第七章: “基于自然边界归化的区域分解算法”, 其内容取自作者近年发表的相关论文. 本书的书名也因此改为《自然边界积分方法及其应用》. 此外, 在第二章中还增加了一节, 题为“关于一般单连通区域的一个定理”, 内容则取自作者与冯康先生联名于 1994 年发表的一篇论文^[116].

本书仅讨论二维问题. 实际上, 发展三维问题的自然边界归化理论是更有意义但也更困难的工作. 此外, 也需要发展 Helmholtz 方程、各向异性问题、抛物型方程、应用椭圆人工边界的自然边界归化和区域分解算法, 以及自适应计算方法等. 然而, 尽管在这些方向已得到许多结果, 但相关内容尚未写进本书. 有兴趣的读者可以看我们近期的一些论文^[117-159].

冯康教授已于 1993 年 8 月 17 日不幸去世了, 享年 73 岁. 他再也不能阅读本书的英文版. 但我相信, 若他仍然在世, 他会为本英文版的出版, 以及自然边界归化得到越来越多的发展和应用而非常高兴, 因为其中的许多成果都是以他的创造性思想为基础的. 本英文版正是我对冯康先生深切怀念的最好表达.

科学出版社科学出版中心的林鹏主任对本书英文版始终给予非常密切的关注. 科学出版社的刘嘉善先生、计算数学研究所的葛向阳先生, 以及 Kluwer 学术出版社的编辑们都为本英文版付出了辛勤劳动. 我谨在此向他们致以深切感谢. 我也愿感谢我的儿子、美国加州理工学院的博士生余歆炜, 是他在北京大学学习时为我的书稿以 LaTeX 输入了全部数学公式.

余德浩

2001 年 3 月于北京

1993 年版前言

边界元方法作为一种重要的数值计算方法近 20 年来得到了迅速发展,并在科学和工程计算的众多领域获得了广泛应用.国内外已有关于边界元方法及其应用的大量文献问世.本书介绍的自然边界元方法则是与国际流行的边界元方法完全不同的、有许多独特优点的一种新型边界元方法.这一方法是由我国学者首创并发展的.早在 70 年代中期,作者的导师冯康教授就已明确提出了自然边界归化的思想,当时这类边界归化被称为正则边界归化.作者正是基于他的开创性的工作及在他的直接指导下开始从事这一方向的研究并系统地发展了这一方法的.现在自然边界元方法已成为边界元方法的一个新的分支,引起了国内外同行广泛的关注和兴趣,这里自然应强调冯康教授对此作出的重要贡献.

本书的读者对象主要是学习或从事计算数学、计算力学、应用数学及其他相关专业工作的研究生、大学高年级学生、大学教师及科学工作者,也可供对应用边界元方法感兴趣的工程技术人员参考.全书共分六章.第一章概述自然边界归化的一般原理、强奇异积分的数值计算方法以及自然边界元方法的收敛性与误差估计.第二章至第五章分别讨论了调和方程边值问题、重调和方程边值问题、平面弹性问题及 Stokes 问题的自然边界归化和自然边界元方法,包括解的复变函数表示、典型域上的自然积分方程和 Poisson 积分公式、自然积分算子的性质、自然积分方程的数值解法等内容.第六章介绍了自然边界元与有限元耦合法,以及无穷远边界条件的近似.

本书系统总结了作者本人十余年来研究自然边界元方法所取得的一系列已发表的以及许多从未发表过的成果.书中的部分内容近年来也曾在中国科学院研究生院及其他一些高等院校讲授过.由于迄今为止,自然边界归化仅有关于二维问题的结果,故本书也仅限于讨论二维区域上的自然边界元方法.本书并不追求完备,因此对国际流行的一般的边界元方法及其应用方面的许多内容,只在第一章中一带而过,并不作详述.读者完全可以从其他书籍中读到那些内容.

本书的撰写从一开始就得到我国计算数学界冯康、周毓麟、石钟慈三位学部委员以及林群、韩厚德等教授的关心和鼓励.早在 1984 年夏包括上述 5 位教授在内的博士学位论文答辩委员会就已建议作者将有关成果写成专著出版,并认为这“将是一件很有价值的工作”.也正是根据冯康教授的建议,本书的书名由原定的“正则边界元方法的数学理论”改为“自然边界元方法的数学理论”,因为“自然边界元方法”这一术语更能反映这一方法的本质特性,从而冯康教授为这一方法也为本

书确定了一个更为恰当的名称. 清华大学韩厚德教授曾仔细审阅了本书初稿, 并提出了许多富有建设性的意见. 作者谨在此向他们表示衷心的感谢.

作者的研究工作及本书的出版得到国家自然科学基金、中国科学院数学特别支持费和中国科学院科学出版基金的支持. 科学出版社第一编辑室对本书的撰写始终给予殷切关注并为本书的出版付出了辛勤劳动, 谨此深表谢忱.

余德浩

1992 年 3 月于北京

目 录

第 1 章	自然边界元方法的一般原理	1
1.1	引言	1
1.2	边界归化与边界元方法	3
1.2.1	间接边界归化	3
1.2.2	直接边界归化	10
1.2.3	边界积分方程的数值解法	11
1.3	自然边界归化的基本思想	13
1.3.1	椭圆边值问题的自然边界归化	14
1.3.2	Neumann 问题的等价变分问题	19
1.3.3	自然积分算子的表达式	21
1.4	超奇异积分的数值计算	24
1.4.1	积分核级数展开法	24
1.4.2	奇异部分分离算法	27
1.4.3	有限部分积分的近似求积公式	34
1.4.4	正则化方法及间接算法	41
1.5	自然边界元解的收敛性与误差估计	43
1.5.1	近似变分问题及其解的收敛性	44
1.5.2	边界上的误差估计	47
1.5.3	区域内的误差估计	53
1.6	关于 Poisson 积分公式的计算	55
1.6.1	利用特解求近边界点的解函数值	55
1.6.2	误差估计	58
第 2 章	调和方程边值问题	60
2.1	引言	60
2.2	解的复变函数表示	61
2.2.1	定理及其证明	61
2.2.2	简单应用实例	62
2.3	自然边界归化原理	65
2.3.1	区域上的变分问题	66
2.3.2	自然边界归化及边界上的变分问题	68

2.4	典型域上的自然积分方程及 Poisson 积分公式	72
2.4.1	Ω 为上半平面	72
2.4.2	Ω 为圆内区域	77
2.4.3	Ω 为圆外区域	82
2.4.4	几个简单例子	82
2.5	一般单连通域上的自然边界归化	87
2.5.1	保角映射与自然边界归化	87
2.5.2	对角形域、扇形域与矩形域的应用	89
2.6	自然积分算子及其逆算子	91
2.6.1	上半平面自然积分算子	92
2.6.2	圆内 (外) 区域自然积分算子	94
2.6.3	关于一般单连通域的一个定理	98
2.7	自然积分方程的直接研究	104
2.7.1	上半平面自然积分方程	104
2.7.2	圆内 (外) 区域自然积分方程	105
2.8	自然积分方程的数值解法	108
2.8.1	刚度矩阵系数的计算公式	109
2.8.2	刚度矩阵的条件数	117
2.8.3	自然边界元解的误差估计	120
2.8.4	数值例子	121
2.9	断裂及凹角扇形域上自然积分方程的数值解	127
2.9.1	自然积分方程及其边界元解	127
2.9.2	近似解的误差估计	129
2.9.3	解的奇异性分析	131
2.9.4	数值例子	132
第 3 章	重调和方程边值问题	136
3.1	引言	136
3.2	解的复变函数表示	138
3.2.1	定理及其证明	139
3.2.2	简单应用实例	140
3.3	自然边界归化原理	143
3.3.1	区域上的变分问题	143
3.3.2	自然边界归化及边界上的变分问题	148
3.4	典型域上的自然积分方程及 Poisson 积分公式	153
3.4.1	Ω 为上半平面	153

3.4.2	Ω 为圆内区域	158
3.4.3	Ω 为圆外区域	167
3.4.4	几个简单例子	175
3.5	自然积分算子及其逆算子	179
3.5.1	上半平面自然积分算子	180
3.5.2	圆内区域自然积分算子	181
3.5.3	圆外区域自然积分算子	184
3.6	自然积分方程的直接研究	185
3.6.1	上半平面自然积分方程	185
3.6.2	圆内区域自然积分方程	187
3.6.3	圆外区域自然积分方程	193
3.7	自然积分方程的数值解法	199
3.7.1	刚度矩阵系数的计算公式	200
3.7.2	自然边界元解的误差估计	205
3.7.3	数值例子	207
3.8	多重调和方程边值问题	211
3.8.1	解的复变函数表示	211
3.8.2	自然边界归化原理	213
3.8.3	关于上半平面的若干结果	215
第 4 章	平面弹性问题	219
4.1	引言	219
4.2	解的复变函数表示	222
4.2.1	定理及其证明	222
4.2.2	简单应用实例	226
4.3	自然边界归化原理	230
4.3.1	区域上的变分问题	230
4.3.2	自然边界归化及边界上的变分问题	233
4.4	典型域上的自然积分方程及 Poisson 积分公式	236
4.4.1	Ω 为上半平面	236
4.4.2	Ω 为圆内区域	241
4.4.3	Ω 为圆外区域	253
4.4.4	几个简单例子	260
4.5	自然积分算子及其逆算子	264
4.5.1	上半平面自然积分算子	264
4.5.2	圆内区域自然积分算子	266

4.5.3	圆外区域自然积分算子	275
4.6	自然积分方程的直接研究	276
4.6.1	上半平面自然积分方程	277
4.6.2	圆内区域自然积分方程	278
4.6.3	圆外区域自然积分方程	292
4.7	自然积分方程的数值解法	294
4.7.1	刚度矩阵系数的计算公式	295
4.7.2	自然边界元解的误差估计	299
4.7.3	数值例子	301
第 5 章	Stokes 问题	304
5.1	引言	304
5.2	解的复变函数表示	305
5.2.1	定理及其证明	305
5.2.2	简单应用实例	309
5.3	自然边界归化原理	312
5.3.1	Green 公式	313
5.3.2	自然边界归化及等价变分问题	315
5.4	典型域上的自然积分方程及 Poisson 积分公式	318
5.4.1	Ω 为上半平面	318
5.4.2	Ω 为圆外区域	322
5.4.3	Ω 为圆内区域	329
5.4.4	几个简单例子	332
5.5	自然积分算子及其逆算子	337
5.5.1	上半平面自然积分算子	337
5.5.2	圆外区域自然积分算子	339
5.5.3	圆内区域自然积分算子	344
5.6	自然积分方程的直接研究	350
5.6.1	上半平面自然积分方程	351
5.6.2	圆外区域自然积分方程	352
5.6.3	圆内区域自然积分方程	359
5.7	自然积分方程的数值解法	370
5.7.1	刚度矩阵系数的计算公式	371
5.7.2	自然边界元解的误差估计	374
5.7.3	数值例子	376
第 6 章	自然边界元与有限元耦合法	377
6.1	引言	377

6.2	耦合法解调和方程边值问题	378
6.2.1	断裂区域问题	378
6.2.2	无界区域问题	386
6.2.3	数值例子	389
6.3	耦合法解重调和方程边值问题	392
6.3.1	耦合法原理	392
6.3.2	收敛性与误差估计	394
6.4	耦合法解平面弹性问题	397
6.4.1	耦合法原理	397
6.4.2	收敛性与误差估计	398
6.5	耦合法解 Stokes 问题	400
6.5.1	耦合法原理	400
6.5.2	收敛性与误差估计	403
6.6	无穷远边界条件的近似	405
6.6.1	积分边界条件的近似	405
6.6.2	误差估计	409
第 7 章	基于自然边界归化的区域分解算法	417
7.1	引言	417
7.2	基于自然边界归化的重叠型区域分解算法	418
7.2.1	Schwarz 交替法及其收敛性	419
7.2.2	收敛速度分析	423
7.2.3	若干例子	426
7.3	基于自然边界归化的非重叠型区域分解算法	428
7.3.1	Dirichlet-Neumann 交替法及其收敛性	428
7.3.2	离散化及其收敛性	435
7.3.3	数值例子	440
7.3.4	对平面弹性问题的应用	445
7.4	Steklov-Poincaré 算子及其逆算子	452
7.4.1	二阶椭圆边值问题	452
7.4.2	重调和边值问题	455
7.4.3	平面弹性问题	458
7.4.4	Stokes 问题	460
7.4.5	预条件 Steklov-Poincaré 算子	462
参考文献		463
索引		481