

塑性力学

宋卫东 编著



科学出版社

塑性力学

宋卫东 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书共八章,内容涵盖了塑性力学的基本假设、相关物理概念和基础理论,以及利用这些理论对工程实践中典型问题的解答方法。每章之后有必要的附录与合适的习题,以方便读者掌握相关的知识背景,加深对内容的理解,训练解决实际问题的能力。本书由浅入深,难度梯度适中,理论结合实际,旨在使读者在循序渐进的阅读过程中建立起塑性力学的基本知识架构,能够解决一些实际工程问题,并拥有继续深入研究塑性力学问题的能力。

本书可供力学、航空航天、机械、土木工程以及相关专业的低年级本科生学习和参考,也可供相关方向的科学技术人员以及对塑性力学的基础知识和简单工程感兴趣的读者阅读和使用。

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学/宋卫东编著. —北京:科学出版社,2017.5

ISBN 978-7-03-052337-2

I. ①塑… II. ①宋… III. ①塑性力学 IV. ①O344

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 054095 号

责任编辑:刘信力/责任校对:彭涛

责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年5月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年5月第一次印刷 印张:15 1/2

字数:304 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 塑性力学的任务	1
1.2 塑性力学对工程实践的意义	2
1.3 塑性力学的发展简史	3
1.4 基本假设	5
1.5 常用的基本模型及应用	6
习题	12
第 2 章 应力和应变分析	13
2.1 应力张量及其不变量	13
2.2 偏应力张量及其不变量	16
2.3 应力空间、 π 平面和 Lode 参数	24
2.4 应变偏量和等效应变	28
2.5 应变率及应变增量	30
附录 2.1 爱因斯坦求和约定	32
习题	33
第 3 章 屈服条件 卸载准则	35
3.1 简单拉伸屈服基本概念	35
3.2 复杂应力状态下的屈服条件 屈服面	39
3.3 常用的屈服条件	43
3.3.1 Tresca 条件	43
3.3.2 Mises 条件	46
3.3.3 两种屈服条件的比较	48
3.3.4 双剪力屈服条件 (最大偏应力屈服条件)	48
3.4 后继屈服面 后继屈服条件	53
3.5 加载方式 加、卸载准则	55
3.5.1 加载方式	55
3.5.2 加、卸载准则	56
3.6 几种简化硬化模型	62
3.6.1 单一曲线假设	62
3.6.2 等向硬化模型	63

3.6.3	随动硬化模型	64
3.6.4	组合硬化模型	66
3.7	Drucker 公设和 Il'yushin 公设	67
3.7.1	稳定材料和不稳定材料	68
3.7.2	Drucker 公设	68
3.7.3	屈服面的外凸性	70
3.7.4	Il'yushin 公设	72
附录 3.1	材料力学中的四种强度准则	73
附录 3.2	等相硬化函数的实验确定方法	74
附录 3.3	薄壁物体受内压和扭转的材料力学结果	75
	习题	77
第 4 章	塑性本构关系	79
4.1	广义 Hooke 定律	79
4.2	增量理论	81
4.2.1	两种流动法则	82
4.2.2	理想刚塑性材料的增量型本构方程	84
4.2.3	理想弹塑性材料的增量型本构方程	84
4.2.4	弹塑性硬化材料的增量型本构方程	86
4.2.5	增量型本构方程的矩阵形式	90
4.3	增量理论基本方程	94
4.4	全量理论	95
4.4.1	Il'yushin 全量理论	95
4.4.2	全量型本构方程的矩阵形式	99
4.5	全量理论的基本方程	100
4.6	全量理论和增量理论的比较	101
4.7	卸载定律	104
4.8	塑性势理论	106
4.8.1	与 Mises 条件相关联的流动法则	107
4.8.2	与 Tresca 条件相关联的流动法则	108
附录 4.1	强塑性本构张量形式	111
附录 4.2	强性体的形变势能	112
	习题	113
第 5 章	弹塑性弯曲和扭转问题	115
5.1	梁的弯曲问题	115
5.1.1	梁的纯弯曲	115

5.1.2	梁的横向弯曲	122
5.1.3	梁的弹塑性挠度	124
5.2	压杆的塑性失稳	126
5.3	杆的扭转问题	130
5.3.1	圆杆的弹塑性扭转	130
5.3.2	非圆截面杆的塑性极限扭矩	135
附录 5.1	应变协调方程	144
附录 5.2	圆柱体的扭转	145
	习题	147
第 6 章	球对称和轴对称的弹塑性问题	148
6.1	理想弹塑性材料的厚壁球壳	148
6.2	棒材的拉拔加工	153
6.3	受到内压的厚壁圆筒	155
6.3.1	理想弹塑性材料的厚壁圆筒	155
6.3.2	硬化材料的厚壁圆筒	162
6.4	旋转圆盘	164
6.5	圆板的轴对称弯曲	168
附录 6.1	对称问题的弹性力学解答	174
	习题	179
第 7 章	理想刚塑性体的平面应变问题	181
7.1	塑性平面应变问题的基本方程	181
7.2	滑移线及其性质	185
7.3	简单的滑移线场	193
7.4	边界条件与速度场	198
7.4.1	边界条件	198
7.4.2	速度场	200
7.5	应力和速度的间断面	202
7.6	关于解的性质的讨论	204
7.7	应用滑移线场求解极限载荷	206
7.7.1	顶部削平的楔形体	206
7.7.2	单边受压力的楔形体	209
7.7.3	两侧带切口的板条的拉伸	211
7.8	板条的拉制	217
7.9	滑移线场的数值解法	219
	习题	221

第 8 章 极限分析	224
8.1 极限状态与极限分析	224
8.2 虚功率原理 静力场和机动场	228
8.3 极限载荷的上下限定理	229
8.3.1 静力许可载荷因子和动力许可载荷因子	229
8.3.2 极限分析定理 (界限定理)	230
8.4 梁和刚架的极限分析	231
8.5 静力法和机动法	232
习题	238
参考文献	240

第 1 章 绪 论

1.1 塑性力学的任务

材料受到外力时会产生变形，如果在撤除使其产生变形的的外力后，材料的变形消失且能完全恢复到原来的形状，就称这种变形为**弹性变形**，弹性力学研究的范围就是弹性变形。但是，当应力超过一定的极限后，即使外力撤去，材料内部的变形也不能完全恢复，其中有一部分变形会被保留下来，被保留下来的永久变形我们称之为**塑性变形**。对于材料而言，产生塑性变形的能力就是材料的塑性性能，大多数的材料同时具有弹性和塑性性质。

和弹性力学一样，塑性力学也是固体力学的一个重要分支。塑性力学以弹性力学为基础，学习塑性力学前，首先要具备一些弹性力学知识。弹性力学研究的是弹性物体在外力作用下的应力、应变和位移分布以及与之相关的理论和方法。相应地，塑性力学则研究物体产生塑性变形时，应力与变形之间的关系。

弹性力学中的一些基本假设以及应力、应变的分析等概念都会继续应用在塑性力学中，但是需要注意的是塑性力学问题比弹性力学复杂得多，如：

(1) 应力与应变之间的关系是非线性的，其比例系数不仅与材料有关而且与塑性应变有关。

(2) 由于塑性变形的出现，应力与应变之间不再是一一对应的关系，而是与载荷的加载历史有关。

(3) 变形体可分为弹性区与塑性区，在弹性区，加载与卸载都服从广义 Hooke 定律。但在塑性区，加载服从塑性规律而卸载过程中则服从弹性的 Hooke 定律。换言之，材料的弹性性质不受塑性变形的影响。

(4) 弹性区和塑性区往往共存，需要决定这两个区域的交界面，并满足这里的力的和变形的连续条件等，这些都是塑性力学里需要解决的问题。

塑性力学所研究的问题大致可以分为两个方面：

(1) 由实验，建理论：以实验观察结果为基础，建立塑性状态下变形的基本规律，即本构关系，以及有关的基本理论；

(2) 用理论，解实际：应用这些塑性关系和理论求解具体问题，即求物体在载荷等外来因素作用下应力和变形的分布，包括研究在加载过程中的每一时刻，物体内各处的应力及变形，以及确定物体内已进入塑性状态的范围（即屈服条件）等。

1.2 塑性力学对工程实践的意义

塑性力学源于生产实践，而又直接为生产实践服务。因此，它对工程实践有很大的意义。这里用一个简单的三杆桁架极限设计问题作为实例来说明。

图 1.1 为一简单的三杆对称桁架，各杆截面积相同，均由软钢制成，材料的屈服极限 $\sigma_s = 265\text{MPa}$ ，桁架的工作载荷为 100000N ，如安全系数取 3，试确定杆的截面积 A 。

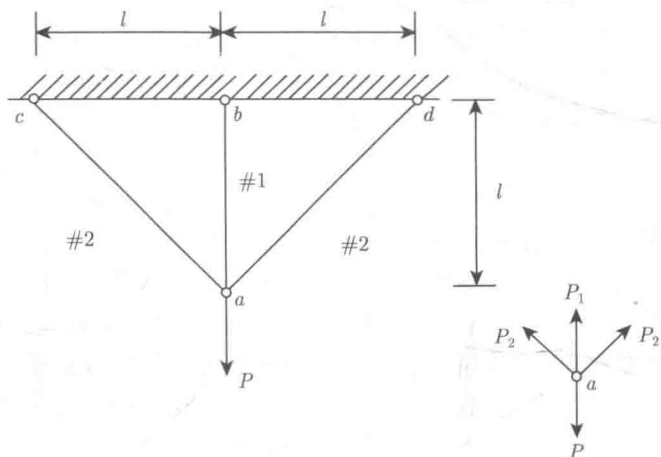


图 1.1 三杆桁架问题

这是一个具有一次超静定的桁架，在各杆都保持弹性的情况下，不难证明，各杆的内力为

$$P_1 = \frac{2P}{2 + \sqrt{2}}$$

$$P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}$$

桁架的工作载荷为 100000N ，安全系数为 3，则设计载荷 $P = 300000\text{N}$ ，所以

$$P_1 = \frac{2 \times 300000}{2 + \sqrt{2}} = 175700\text{N}$$

$$P_2 = 87900\text{N}$$

若按弹性状态设计，以桁架最大受力部分的应力达到屈服极限时为桁架的破坏，即当 $P_1 = A\sigma_s$ 时为桁架的破坏，则杆截面积应取

$$A = \frac{P_1}{\sigma_s} = \frac{175700\text{N}}{265\text{MPa}} = 663\text{mm}^2$$

事实上, 这时两根#2 杆的应力才达到屈服应力的 $1/2$ 。而软钢是一种延性材料, 它能发生相当大的变形却不丧失强度。所以, 在#1 杆可继续发生相当大的变形而不丧失其强度的情况下, #2 杆可继续承受较大的载荷, 从而可进一步提高桁架的承载能力。只有当#2 杆也达到屈服极限时, 桁架的承载力才达到极限值 (此处假定不计硬化作用, 认为材料是理想塑性的。关于理想塑性体, 详见 1.5 节的说明)。这时, $P_1 = P_2 = A\sigma_s$ 。根据节点 a 的平衡条件应有

$$P_1 + \sqrt{2}P_2 = P$$

即

$$A\sigma_s (1 + \sqrt{2}) = P$$

若按塑性极限状态设计, 杆的截面积应取

$$A = \frac{P}{\sigma_s (1 + \sqrt{2})} = \frac{300000\text{N}}{265(1 + \sqrt{2})\text{MPa}} = 469\text{mm}^2$$

由此可见, 如果采用塑性设计, 截面积就能节省约 30%, 即材料可节省近 30%。

这是一个常见的桁架极限设计的例子, 它很好地说明了塑性力学在工程中的重要作用。将塑性力学应用在工程设计中, 可以充分发挥材料的性能, 节约资源的同时提高经济效益。

塑性极限设计只是塑性力学在工程实践中应用的一个方面。事实上, 塑性力学可以应用在工程实践很多方面。例如: ① 金属的压力加工和成型就是利用金属的塑性变形使之成为人们所需要的形状。加工过程中如何使用尽可能小的力, 从而消耗尽可能小的能量, 同时保证金属内部变形均匀而不致产生缺陷, 都是塑性力学需要研究和应用的内容。② 在土力学、岩石力学及地质力学等相关问题中, 塑性力学也有着相当广泛的应用。

随着计算机硬件和系统的不断升级, 运算速度加快, 使得计算弹塑性力学的更加成熟, 更适于运用。这不仅加速了塑性力学本身的发展, 而且为其在工程实践中应用带来了更加广阔的前景。

1.3 塑性力学的发展简史

塑性力学是一门从生产中发展起来的学科, 其研究历史相对来说还比较短。1773 年, de Coulomb 提出了土的屈服条件。一般认为, 塑性力学的第一步是在 19 世纪 70 年代迈出的。Tresca 在 1864 年公布了关于金属冲压和挤压的初步实验报告, 根据这些实验, 他提出最大剪应力屈服准则这一著名论断, 也就是后来所称的 Tresca 条件。此后, Saint-Venant 应用 Tresca 屈服准则对理想塑性圆柱体受扭转或者弯

曲时的弹塑性应力 (1870) 以及受内压作用下完全塑性的圆管中的应力 (1872) 进行了计算。Saint-Venant 还建立了二维塑性流动下应力、应变的五个控制方程。Saint-Venant 提出假设认为, 应力和总的塑性应变不存在一一对应的关系, 在塑性应变的每一个时刻, 最大剪应变速率的方向与最大剪应力方向一致。1871 年, Levy 对 Saint-Venant 的理论进行了推广, 列出了三维情况下的方程式。

此后的 40 年间, 塑性力学的发展是相当缓慢的。直到 20 世纪初, Haar, von Karman(1909) 和 von Mises(1913) 的工作才使塑性力学又获得一些进展。Haar 和 von Karman 想以某些变分原理为出发点, 以获得塑性力学的方程。1913 年, von Mises 明确地提出了新的屈服条件——应力强度不变条件, 后来被称为 Mises 条件。实践证明, 在当时提出的各种屈服准则中, 这一条件对于金属材料能够给出最满意的预测。几年后, H. Hencky 给出了这个条件的物理解释, 即当单位体积的弹性形状变形能达到某一临界值时, 材料会发生屈服。事实上, M. Huber 早在 1904 年就曾提出过这一条件, 因此这一条件又被称为 Huber-Mises-Henck 屈服条件, 简称 Mises 屈服条件。von Mises 还独立地提出了类似于 Levy 的塑性应变增量与应力关系表达式, 后来就称为 Levy-Mises 方程。Mises 的屈服准则及应力应变关系式的发表, 引起了强烈的反响, 也使塑性力学研究得到了重大进展。在 1926 年, Lode 证实了它在一级近似下的准确性。

20 世纪 50 年代初, 两次世界大战在一定程度上促进了塑性力学方面的巨大发展。首先是德国, 后来在苏联, 而后又在英国和美国, 塑性力学和空气动力学同时成为了连续介质力学中发展得最为蓬勃的部分。从 20 世纪 20 年代到 50 年代, 塑性力学在理论和实验两方面都取得了重大进步, 形成了一个能够反映在常温下各向同性金属材料的主要弹性和塑性性质的理论, 并且在相当大的程度上符合观察结果。Prandtl 在 1920 年和 1921 年的研究表明, 二维问题是双曲型问题, 他计算了采用扁平模子压入水平表面和平头楔形体所需的载荷。同时期的 A. L. Nadai 进行了实验测试, 其结果与 Prandtl 的计算结果一致, 但后来的研究表明, Prandtl 的工作在某些方面是有一些缺陷的。1923 年 Hencky 将 Prandtl 的特解推广为更为一般的理论。1924 年, Prandtl 将 Lévy-Mises 理论推广应用到平面应变问题, 既考虑了塑性变形又考虑了弹性变形。1937 年 Nadai 考虑了材料的加工硬化, 建立了大变形情况下的应力应变关系。1943 年, Иль юшин 建立微小弹塑性变形理论。之后随着计算能力的增强, 在科研中这个理论更受欢迎。Prager 和 Hodge(1948) 以及 Greenberg(1949) 建立了塑性增量理论的极限原理。

进入 20 世纪 50 年代, 塑性力学在理论方法和实际应用中都得到了迅速发展。比如, 50 年代出现了塑性势理论, 对满足 Drucker 公设的屈服条件相关联的一般本构关系进行了讨论。И' yushin 提出了五维偏应变矢量空间中的一般弹塑性本构理论, 将应力表示为变形迹内蕴几何学参数的泛函, 它适合于描写复杂加载下的

金属材料的塑性响应特征。20 世纪 60 年代前后, 结构承载能力的研究也有了很大进展。

随着电子计算技术的高速发展, 使用数值算法尤其是有限元法求解复杂弹塑性问题越来越具有可行性。Argyris(1960), Gallagher 和 Padlog(1963), Pope(1966), Zienkiewicz(1967), Oden(1927), Owen 和 Hinton(1980) 等都在这方面做了不少的工作。目前, 大多数的有限元程序都可以对结构的塑性响应进行计算。

总之, 20 世纪发展了强化理论、极限分析理论、本构理论、安定性理论、多种类型的变分原理、极限原理以及位移限界定理等, 基本奠定了塑性力学的理论基础。从此, 塑性力学在很多方面得到了很好的发展。

随着研究的不断深入, 塑性理论逐渐由宏观唯象理论向细观深度发展。1976 年, Batdorf 和 Budiansky 从晶粒滑移的物理概念出发, 提出了一个塑性滑移理论。这种理论假定在屈服面上需要发展一个尖角, 但这一点迄今尚未得到实验验证。

近年来, 随着微纳米材料与结构的出现, 传统塑性力学遇到了前所未有的挑战。研究人员提出了一些新的塑性理论, 如离散位错塑性理论 (discrete gradient plasticity)(Needleman, 2000)、各种应变梯度塑性理论 (strain gradient plasticity), 来尝试解释奇特的微纳米材料力学性能试验结果, 提供更加准确的、合适的力学计算方法。

由弹性力学到塑性力学, 表明了人们对材料力学性质的认识和运用上的一个重要的发展, 提供了更加可靠的计算方法和更加先进的计算工具。作为固体力学的一个独立分支, 塑性力学仍然是一门年轻的学科, 仍有很多需要继续研究和探索的课题。随着生产和科学技术的发展, 塑性力学将会获得更加广泛的应用。

1.4 基本假设

经典塑性力学是从宏观唯象角度来研究的, 而不是从物质的微观结构出发, 因此属于连续介质力学的范畴。经典塑性力学采用的几个主要的基本假设如下。

(1) 材料是均匀的, 连续的, 在初始屈服前是各向同性的。

(2) 基于 Bridgman 的试验结果, 即静水应力状态 (关于静水应力状态的定义详见 2.2 节) 不影响塑性变形而只产生弹性的体积变化。在塑性状态时, 材料的体积是不可压缩的。也就是说, 塑性变形在体积不变的条件下进行。对多数金属来说, 这个结论是比较符合实际的, 但对于软金属、矿物以及岩土等材料, 静水压力的影响较为显著, 不能忽略, 这一假定可能不成立。

(3) 在温度不高, 时间不长的情况下, 忽略蠕变和松弛的效应; 在应变率不大的情况下, 忽略应变率对塑性变形的影响。于是, 在常温和静力情况下研究塑性变形, 可以忽略时间因素对材料塑性变形的影响。有了这个假定, 在分析一个塑性变

形过程时, 时间量度的绝对值对问题的分析没有影响, 只要任意取一个单调变化的量作为时间参数, 以代表载荷或变形的先后次序就行了。以后要考虑变形或加载的历史就是指这个意思, 这个历史以秒、分或甚至是年做单位都是可以的。以下提到的速率、应变率也是指这个意思。

另外, 固体物理、金属学还从塑性微观变形机理的角度来研究塑性问题。塑性力学的近代研究已走向和微观变形机理结合起来探讨塑性变形规律的方向。当然, 在我们这本简短的书中是不可能详细讨论这些问题的, 对这些方向有兴趣的读者, 可以自行查阅相关文献。

1.5 常用的基本模型及应用

为了使弹塑性力学问题的求解过程更为简便, 同时又符合实际要求, 通常要将应力应变曲线进行进一步简化。针对不同的材料和不同的应用领域, 一般常见的弹塑性简化模型有以下几种。

1. 理想线弹性模型

不考虑材料的塑性段, 仅考虑线弹性阶段。材料力学、弹性力学中均采用这一模型, 应力可以表示为

$$\sigma = E\varepsilon$$

应力-应变曲线如图 1.2 所示。

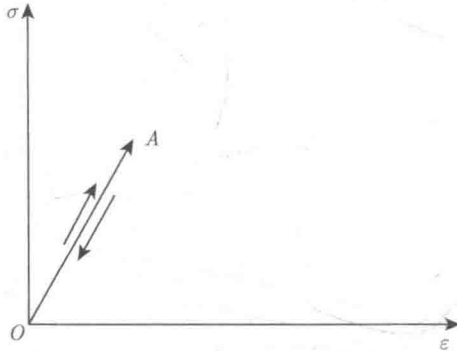


图 1.2

2. 理想弹塑性模型

假定不考虑材料的强化性质, 并且忽略屈服极限上限的影响, 即认为材料经过线性弹性阶段后便进入流动状态, 塑性变形在屈服应力 σ_0 作用下可无约束的发

展, 则可得到如图 1.3 所示的理想弹塑性模型。线段 OA 为弹性阶段, AB 为塑性平台区。应力可表示为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma = \sigma_0 = E\varepsilon_0, & \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases}$$

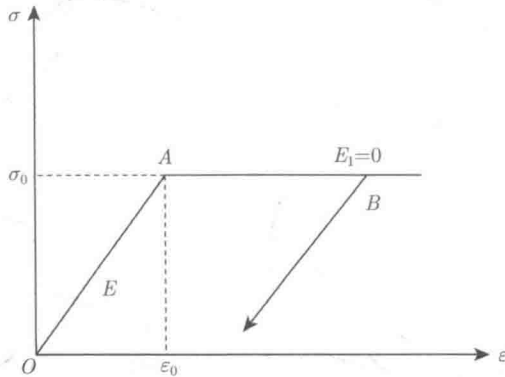


图 1.3

由于该模型只包括了 E 和 ε_0 两个参数, 不能准确地表示应力-应变曲线, 而且分析表达式在 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 处开始变化, 在计算过程中会导致某些困难。

3. 理想刚塑性模型

如果弹性变形比塑性变形小得多, 则可以忽略弹性变形, 认为应力在到达屈服极限前材料处于刚性状态, 即为刚塑性模型。在此前提下, 假定材料在应力达到屈服应力 σ_0 时便进入塑性流动状态, 可得图 1.4 所示的理想刚塑性模型, 其本构关系为

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0, & \varepsilon \geq 0 \\ \sigma < \sigma_0, & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

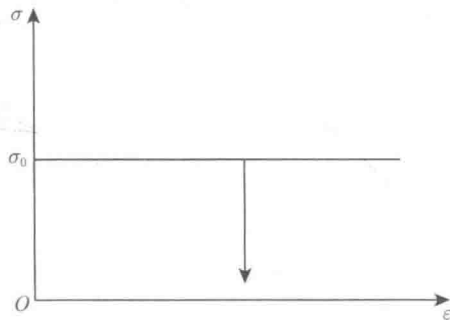


图 1.4

4. 线性硬化弹塑性模型

在理想弹塑性模型的基础上考虑材料的强化性质, 认为材料经过弹性阶段后进入线性塑性强化阶段, 在线性塑性强化阶段 E_1 为常数, 应力-应变曲线如图 1.5 所示, 本构关系可表示为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_0, \sigma \leq \sigma_0 \\ \sigma = (1 - \lambda)\sigma_0 + E_1\varepsilon, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \sigma \geq \sigma_0 \end{cases}$$

$$\lambda = E_1/E$$

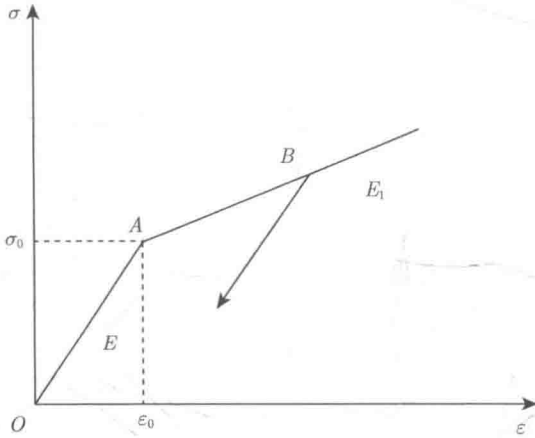


图 1.5

该模型对某些材料是足够准确的。对一些材料来说, 线段 AB 的斜率 E_1 相当小, 可作为理想塑性体来考虑, 可大大简化计算过程。但是和理想弹塑性模型一样, 表达式在 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 处有变化, 导致计算不方便。

5. 线性硬化刚塑性模型

类似的, 在理想刚塑性模型的基础上考虑材料的强化性质, 且假定强化阶段为线性, 则可得到如图 1.6 所示的应力-应变曲线。在这种模型中, $E \rightarrow \infty$, $E_1 =$ 常数, 本构关系为

$$\begin{cases} \varepsilon = 0, & \sigma \leq \sigma_0 \\ \sigma = \sigma_0 + E_1\varepsilon, & \sigma > \sigma_0 \end{cases}$$

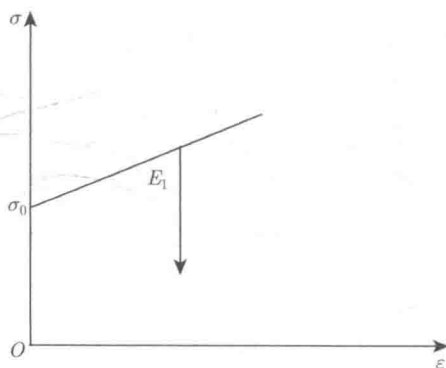


图 1.6

6. 幂强化模型

除了根本不考虑塑性阶段的理想线弹性模型之外，上面介绍的所有简化模型存在同一个问题——弹性与塑性阶段的应力-应变关系表示式不同，这一问题令使用这些模型进行工程计算不太方便。因此，采用幂函数形式近似的对应力-应变曲线进行表述的幂强化模型应运而生。幂强化模型的应力-应变曲线如图 1.7 所示，本构关系为

$$\sigma = A\varepsilon^n$$

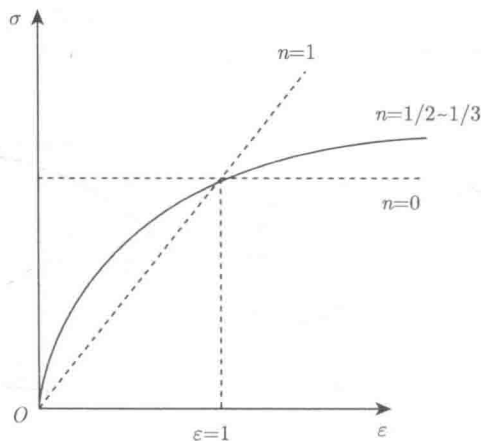


图 1.7

例 1.1 三杆桁架弹塑性平衡问题：设已知三杆桁架如图 1.8 所示，三根杆的截面积 F 都相同，并有 $F=1$ 。杆件为弹塑性线性强化材料。在节点 D 处受到竖向力 P 的作用，以 u 、 v 表示节点 D 的水平（右为正）和竖直（下为正）位移， δ_1 、 δ_2 表示杆 1、杆 2 的总伸长，试分析其弹塑性平衡问题。

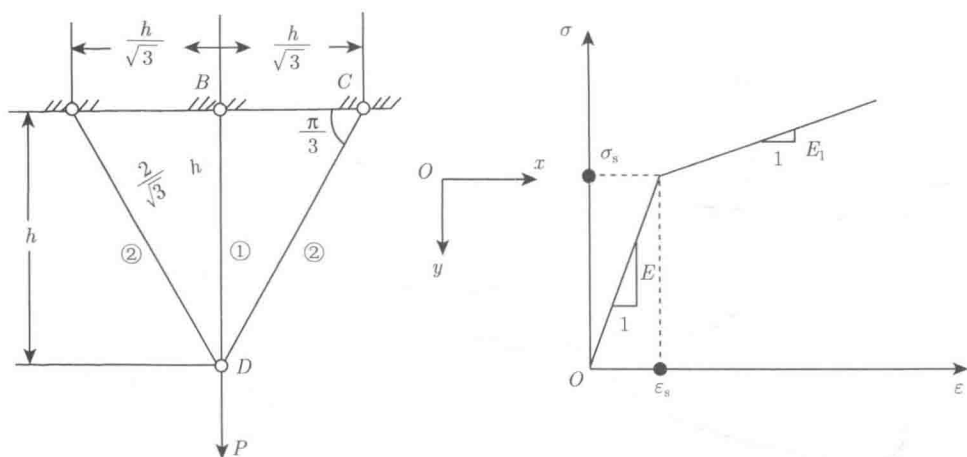


图 1.8

解 平衡方程为

$$P = N_1 + 2N_2 \cos \frac{\pi}{6} = (\sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_2)F = \sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_2$$

几何关系为

$$\begin{aligned} \delta_1 = v, \quad \varepsilon_1 = v/h \\ \delta_2 = \sqrt{3}v/2, \quad \varepsilon_2 = \frac{3v}{4h} = \frac{3\varepsilon_1}{4} \end{aligned}$$

本构方程为

当 $\sigma \leq \sigma_s$ 时, $\sigma = E\varepsilon$;

当 $\sigma > \sigma_s$ 时, $\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s) = E_1\varepsilon + \sigma_s(1 - \lambda)$ (其中 $\lambda = E_1/E$)。弹性

解: 当 P 足够小时, 三杆均处于弹性状态, 应力与应变成比例, 由于 $\varepsilon_2 = \frac{3}{4}\varepsilon_1$, 故

$$\sigma_2 = \frac{3}{4}\sigma_1,$$

$$P = \sigma_1 + \sqrt{3}\sigma_2 = \sigma_1 \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

因为 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 所以杆 1 最先达到塑性状态。当 $\sigma_1 = \sigma_s$ 时, $\varepsilon_1 = \frac{v}{h} = \varepsilon_s$, 于是桁架开始出现塑性变形的载荷为

$$P_1 = \sigma_0 \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \quad (P_1 \text{ 称为弹性极限载荷})$$

弹塑性解: $\sigma_1 > \sigma_s$, $\sigma_2 \leq \sigma_s$, $P > P_1$, 由基本方程知

$$P = E_1\varepsilon_1 + \sigma_s(1 - \lambda) + 2E\varepsilon_2 \cos 30^\circ = E_1 \frac{v}{h} + \sigma_s(1 - \lambda) + 2E \frac{3v}{4h} \frac{\sqrt{3}}{2}$$