21世纪应用型本科规划教材

高等数学

（上册）

主　编　梁海峰　刘淑芬　王　剑
副主编　杨　红　肖迎迎　周　李

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪应用型本科规划教材

高等数学

（上册）

主　编　梁海峰　刘淑芬　王　剑
副主编　杨　红　肖迎迎　周　李

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书按照全国最新工科类本科数学课程教学指导委员会提出的“数学课程教学基本要求”，根据面向21世纪工科数学教学内容和课程体系改革的基本精神编写。本教材吸收国内外优秀教材之优点，注重对抽象概念的通俗剖析，强调对常用方法的简洁概括，结构清晰、概念准确、深入成出、言简意赅。本书着力于对空间直角坐标系与向量运算、多元函数、重积分、曲线与曲面积分、级数等抽象概念进行通俗地解释，从实例中引入这些抽象概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生更容易理解。

在应用技术型大学转型背景下，在教材中融入了数学建模思想，精选现实生活中的一些问题简化成例题，可以更好地培养学生的应用能力和创新能力。

本书可作为应用型本科院校各工科专业“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员自学参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册 / 梁海峰, 刘淑芳, 王剑主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2017.8
21世纪应用型本科规划教材
ISBN 978-7-5170-5679-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①梁… ②刘… ③王… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第173755号

书 名	21世纪应用型本科规划教材 **高等数学（上册）** GAODENG SHUXUE
作 者	主 编 梁海峰 刘淑芳 王 剑 副主编 杨 红 肖迎迎 周 李
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（营销中心）
经 售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 14.75印张 355千字
版 次	2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	**35.00元**

前言

QIANYAN

高等数学自牛顿、莱布尼茨创立以来，经过三百多年的发展，理论体系已很完备。在信息化时代，地方院校向应用技术型大学转型的背景下，我们从当前高等数学教学改革的趋势和学生的需求出发，将数学与现实生活相结合，把教材编得更为通俗、清晰、实用。

本书借鉴美国微积分教学改革坚持的四项原则，即将微积分概念的四个侧面——图像、数值、符号、语言同时展现给学生，注重用自然语言描述概念，用图像形象地反映概念。这给了我们一个启示，将数学建模思想融入教材：精选生活实例，从中引入抽象的概念，将枯燥的概念具体化、通俗化，使学生真切地感受到这些定义来自于现实生活，便于培养学生的应用实践能力。

本书以变量为线索，以极限为核心，把高等数学的主要概念编织成一个清晰的体系。例如：连续是函数的极限等于该点函数值；导数是改变量之商的极限；定积分是一元函数特殊和式的极限；重积分是多元函数特殊和式的极限；无穷级数是部分和式的极限。着力于对极限、连续、微分、定积分、重积分、曲线积分、曲面积分、无穷级数等抽象概念进行通俗的解释，引入具体生活案例，力图使这些抽象概念具体化、通俗化，使学生真切地感受到这些定义来源于生活，更容易理解。

本书最大的特点是将建模思想融入教材中，将数学和现实生活案例相结合。在导数与微分部分我们融入核弹头大小与爆炸距离模型、飞机的降落模型；在积分部分我们引入标尺的设计模型；在微分方程中引入马尔萨斯人口指数增长模型、放射性元素衰变的数学模型、阻滞增长模型（Logistic 模型)；在多元函数微分中融入最佳满意度模型；重积分中融入容器储水量模型，等等。在教材的附录中我们精选了几个典型的数学模型，使读者更多地了解数学与现实生活案例的关系，感受到数学的魅力，从而培养读者的数学应用意识。

书中标注“*”的内容为选修内容，习题精选了部分考研试题，习题前

括号中的数字是指考研年份。

非常感谢华东交通大学理工学院数学教研室全体教师的努力，特别是梁海峰、尧雪莉、尚海涛、赵岚、赖邦城等老师的倾情付出，本书才得以按时完成。由于时间仓促以及编者水平有限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2017年5月

目 录

MULU

第一章　函　　数

初等数学主要研究的是常量，而高等数学主要研究的是变量，着重研究变量与变量之间的依赖关系，即函数关系．本章将介绍集合、映射、函数的定义、函数的特性及初等函数等内容，它们是学习高等数学的基础．

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是数学中的一个重要概念．例如，一个班的学生构成一个集合，全体自然数构成一个集合等．一般的，具有某种属性的事物的全体称为集合，构成这个集合的个体称为集合的元素．

通常用大写字母 A、B、C、…来表示集合，用小写字母 a、b、c、…来表示集合的元素．如果 a 是集合 A 中的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 中的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A．

下面举几个集合的例子：

【例 1-1】　某信息技术职业学院的全体学生．

【例 1-2】　全体奇数．

【例 1-3】　方程 $x^2-3x+2=0$ 的根．

由有限个元素构成的集合，称为有限集；如［例 1-1］和［例 1-3］．由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如［例 1-2］．

二、集合的表示法

1．*列举法*

按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号 { } 括起来表示集合的方法，称为列举法．列举法也称为穷举法．

【例 1-4】　由 -2、-1、0、1、2 五个元素构成的集合 A，可表示为

$$A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$$

【例 1-5】　由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根所构成的集合 B，可表示为

$$B=\{1,\ 2\}$$

使用列举法来表示集合的时候，必须列出集合中的所有元素，且不能有遗漏与重复．

2. 描述法

若 $P(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则，A 是满足 $P(x)$ 的一切 x 构成的集合，则集合 A 表示为

$$A=\{x \mid P(x)\}$$

这种表示的方法称为描述法.

【例 1-6】 由方程 $x^2-3x+2=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$$

【例 1-7】 由满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的所有 x 的值所构成的集合 B，可表示为

$$B=\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$$

描述法实质就是用文字或法则将构成此集合的元素所具有的某种属性描述出来.

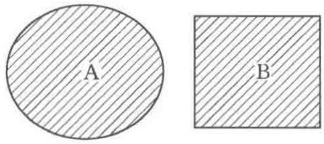

图 1-1

3. 图示法

用平面图形来表示集合以及集合间的关系的方法. 这是英国逻辑学家 John Venn（1834—1888）为我们提供的一种更为直观的集合表示法. 表示集合的平面图形，一般称为文氏图.

文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合中的元素用区域内的点表示，如图 1-1 所示.

三、全集、空集与子集

1. 全集

由所研究的所有事物构成的集合称为全集，用字母 U 表示.

一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集. 例如，某学校开展调查，如果调查的对象仅限于一年级的学生，则全体一年级学生是调查对象的全集；如果调查的对象包括每个年级的学生，则全体一年级学生就不是调查对象的全集.

2. 空集

不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

例如，某班学生身高为 1.5～1.8 米，则身高在 1.92 米以上的学生构成的集合为空集.

注意：$\{0\}$ 以及 $\{\varnothing\}$ 都不是空集，前者含有元素“0”，后者以空集符号“$\varnothing$”为元素.

3. 子集

如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A），如图 1-2 所示.

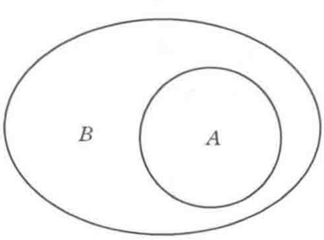

图 1-2

【例 1-8】 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

注：(1) $A\subset A$.

(2) 对任意集合 A，有 $\varnothing\subset A$.

(3) 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则一定有 $A\subset C$.

4. 集合相等

设有集合 A、B，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

【例 1-9】 已知 $A=\{x|x^2-4x+3=0\}$，$B=\{x|x$ 是奇数，且 $1\leqslant x\leqslant 4\}$，则 $A=B$.

四、区间

1. 开区间

设 a、b 为实数，且 $a<b$，则满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用开区间 (a,b) 来表示，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

2. 闭区间

设 a、b 为实数，且 $a<b$，则满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用闭区间 $[a,b]$ 来表示，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

3. 半开半闭区间

设 a、b 为实数，且 $a<x<b$，则满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用左开右闭区间 $(a,b]$ 来表示，即

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

类似的，满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用左闭右开区间 $[a,b)$ 来表示，即

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

以上区间称为有限区间，另外还有无限区间.

4. 无限区间

(1) 满足不等式 $x\geqslant a$ 的所有 x 的取值所构成的集合用区间 $[a,+\infty)$ 来表示，即

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$

(2) 满足不等式 $x>a$ 的所有 x 的取值所构成的集合用区间 $(a,+\infty)$ 来表示，即

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$$

(3) 满足不等式 $x\leqslant b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用区间 $(-\infty,b]$ 来表示，即

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$$

(4) 满足不等式 $x<b$ 的所有 x 的取值所构成的集合用区间 $(-\infty,b)$ 来表示，即

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$$

(5) 全体实数的集合用区间 $(-\infty,+\infty)$ 来表示.

注：“区间”的实质是满足相应不等式的所有实数 x 的集合. 任意满足相应不等式的

x 与“区间”的关系是属于关系，即元素与集合间的关系.

【例 1-10】 用区间表示下列不等式中 x 的取值范围.

(1) $|x|\leqslant 3$.

(2) $|x-1|>4$.

(3) $\sqrt{x^2-1}<2\sqrt{2}$.

解：(1) 因为 $$|x|\leqslant 3$$
所以 $$-3\leqslant x\leqslant 3$$
即 $$x\in[-3,3]$$

(2) 因为 $$|x-1|>4$$
所以 $$x<-3 \text{ 或 } x>5$$
即 $$x\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$$

(3) 因为 $$\sqrt{x^2-1}<2\sqrt{2}$$
所以 $$-3<x\leqslant -1 \text{ 或 } 1\leqslant x<3$$
即 $$x\in(-3,-1]\cup[1,3)$$

五、邻域

在数轴上，把以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$$

称点 x_0 为该邻域的中心，δ 为这邻域的半径，如图 1-3 所示.

如果在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0，则有区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，称为以点 x_0 为中心，以 δ 为半径的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，如图 1-4 所示.

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

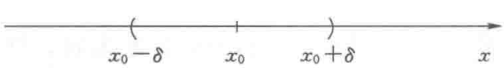

图 1-3

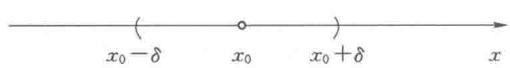

图 1-4

记 $$\mathring{U}(x_0^-,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0\}$$

$$\mathring{U}(x_0^+,\delta)=\{x\,|\,x_0<x<x_0+\delta\}$$

它们分别称为 x_0 的去心左 δ 邻域和去心右 δ 邻域. 当不需要指出邻域的半径时，我们用 $U(x_0)$，$\mathring{U}(x_0)$ 分别表示 x_0 的某邻域和 x_0 的某去心邻域.

【例 1-11】 用区间表示点 3 的半径为 $\frac{1}{2}$ 的去心邻域.

解：$\mathring{U}\left(3,\frac{1}{2}\right)=\left\{x\,|\,0<|x-3|<\frac{1}{2}\right\}$即为以点 $x_0=3$ 为中心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的去心邻域，也可以表示为 $(2.5,3)\cup(3,3.5)$.

习　题　1-1

1. 用列举法表示下列集合：

(1) 由方程 $x^2-4x+3=0$ 的根所构成的集合；

(2) 满足不等式 $|x-5|<2$ 的所有整数.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 由方程 $x^2-4x+3=0$ 的根所构成的集合；

(2) 不小于 5 的所有实数集合.

3. 写出 $A=\{0,1,2,3\}$ 的一切子集.

4. 用区间表示下列不等式中 x 的取值范围：

(1) $x\leqslant 2$；

(2) $|2x-1|>5$.

第二节　函　　数

一、函数的概念

恩格斯说"数学是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学"，而函数正是描述数量与数量之间依存关系的一个概念. 使用函数的概念，可以把握客观事物的运动规律.

下面先来看两个数量关系的例子.

【例 1-12】 设集合 X、Y 均为实数集，集合 X 中的每一个实数 x 与集合 Y 中的 $(x-2)$ 相对应，这个关系就是实数集上 $y=x-2$ 的关系. 满足此关系的点 $\{(x,y)\mid y=x-2, x\in X, y\in Y\}$，即图 1-5 中的直线上的点的集合.

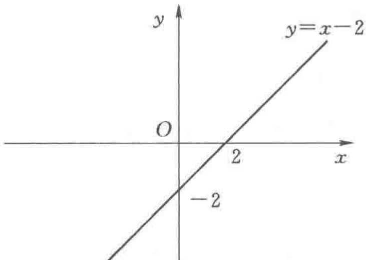

图 1-5

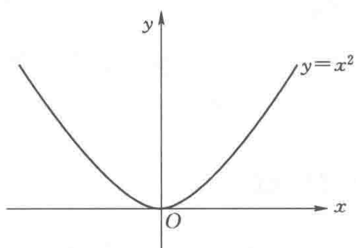

图 1-6

【例 1-13】 设集合 X 为实数集，集合 Y 是全体非负实数集. 集合 X 中的每一个实数 x 均与集合 Y 中的 x^2 相对应，这个关系就是实数集上 $y=x^2$ 的关系. 满足此关系的点集 $\{(x,y)\mid y=x^2, x\in X, y\in Y\}$，即图 1-6 中的曲线上的点的集合.

以上两例分别给出了集合 X 中元素与集合 Y 中元素的一种对应规则，通过此规则，建立起了由集合 X 到集合 Y 的一种关系. 其中，对于每一个 $x\in X$，均只有一个确定的 $y\in Y$ 与之对应，这样的对应关系称为函数关系. 为此我们给出如下定义：

定义 1-1 设 D 是一个非空实数集合，如果对每一个 $x\in D$，经过对应规则 f 总有唯一确定的 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数. 记作 $y=f(x)$. 其中：x 称为自变量，y 称为因变量. x 的取值范围 D 称为函数的定义域；全体函数值的集合 $Z=\{y|y=f(x),x\in D\}$，称为函数的值域.

显然，函数是由定义域与对应规则所确定的. 下面就这个问题来考察几个例子.

【例 1-14】 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域.

解： 因为 $$1-x^2>0$$

所以 $$-1<x<1$$

即 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $x\in(-1,1)$.

【例 1-15】 求 $y=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ 的定义域.

解： 因为 $$x^2-1\neq 0$$

且 $$x>0$$

所以 $$0<x<1 \text{ 或 } x>1$$

即 $y=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ 的定义域是：$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【例 1-16】 $y^2=x$，$(x>0)$

解： 对任何正数 x，都有 $y=\pm\sqrt{x}$ 两个值与之对应，所以此例不是函数关系.

【例 1-17】 $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$ 是不是相同的函数？

解： $y=x$ 是定义在 R 上的函数，而 $y=(\sqrt{x})^2$ 是定义在 $x\geqslant 0$ 上的函数，所以这两个函数的定义域不同，因而它们是不同的两个函数.

【例 1-18】 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数？

解： $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 R 上的函数. $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 对应规则不同，所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是定义域相同而对应规则不同的两个不同函数.

二、分段函数

有一类函数，虽然也是以解析式表示的，但它们在定义域的不同范围内具有不同的表达式，这样的函数叫做分段函数. 分段函数在工程技术中以及日常生活中都会经常遇到.

【例 1-19】 旅客乘车可免费携带不超过 20 千克的物品，超过 20 千克而不超过 50 千克的部分每千克交费 0.5 元，超过 50 千克的部分每千克交费 1 元. 求运费与所携带物品重量的函数关系.

解： 设物品重量为 x 千克，应交运费为 y 元. 由题意应考虑以下三种情况：

(1) 所携带物品的重量不超过 20 千克时：$y=0$，$x\in[0,20]$.

(2) 所携带物品的重量大于 20 千克但不超过 50 千克时：$y=(x-20)\times 0.5$，$x\in$

(20,50].

(3) 所携带物品的重量大于50千克时：$y=(x-50)\times1+30\times0.5=x-35$，$x\in(50,+\infty)$.
因此，所求函数是一个分段函数：

$$y=\begin{cases}0, & x\in[0,20]\\ 0.5x-10, & x\in(20,50]\\ x-35, & x\in(50,+\infty)\end{cases}$$

【例1-20】 用分段函数表示函数 $y=|x|$.

解： 根据绝对值定义可知：当 $x\geqslant0$ 时，$|x|=x$；当 $x<0$ 时，$|x|=-x$，因此有

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\in[0,+\infty)\\ -x, & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

注： 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

三、复合函数

定义1-2 设有两个函数：

$$y=f(u),\ u\in D$$
$$u=g(x),\ x\in E$$

如果 $u=g(x)$ 的值域为 Z，且 $Z\cap D$ 非空，则称 $y=f[g(x)]$是复合函数. 其中，$y=f(u)$ 称为外层函数，$u=g(x)$ 称为内层函数，x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

【例1-21】 试求函数 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 所构成的复合函数.

解： $y=u^2$ 的定义域是 R，而 $u=\sin x$ 的值域是 $[-1,1]$，两者交集非空，所以可以构成复合函数. 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 中，即得所求复合函数为

$$y=(\sin x)^2=\sin^2x,\quad x\in R$$

【例1-22】 试求函数 $y=\cos u$ 与 $u=\ln x$ 所构成的复合函数.

解： $y=\cos u$ 的定义域是 R，而 $u=\ln x$ 的值域也是 R，两者交集非空，所以可以构成复合函数. 将 $u=\ln x$ 代入 $y=\cos u$ 中，即得所求复合函数为

$$y=\cos(\ln x),\quad x\in(0,+\infty)$$

【例1-23】 函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 能否构成复合函数?

解： $y=\arcsin u$ 的定义域是 $[-1,1]$，而 $u=x^2+2$ 的值域是 $[2,+\infty)$，两者交集为空，所以不能构成复合函数.

从上面的例子可知，两个函数通过一个中间变量可以构成一个复合函数，如［例1-21］～［例1-23］. 那么三个函数可以通过两个中间变量构成一个复合函数，四个函数可以通过三个中间变量构成一个复合函数，以此类推.

【例1-24】 试求函数 $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\ln v$，$v=x^2-1$ 所构成的复合函数.

解： $u=\ln v$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，而 $v=x^2-1$ 的值域是 $[-1,+\infty)$，两者交集非

空，所以可以构成复合函数，得 $u=\ln(x^2-1)$.

又因为 $y=\dfrac{1}{u}$ 的定义域是 $x\neq 0$，而 $u=\ln(x^2-1)$ 的值域是 R，两者交集非空，可得

$$y=\frac{1}{\ln(x^2-1)}$$

即为所求复合函数.

【例 1-25】 试求函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些函数构成的复合函数?

解：引入中间变量 u，可得此复合函数是由 $y=e^u$，$u=\sin x$ 所构成.

【例 1-26】 试求 $y=\sin^2(\sqrt{x})$ 是由哪些函数构成的复合函数.

解：引入中间变量 u，v，可得此复合函数是由 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 所构成.

【例 1-27】 试求 $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 是由哪些函数构成的复合函数.

解：引入中间变量 u，v，可得此复合函数是由 $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=\ln x$ 所构成.

【例 1-28】 已知 $y=f(x)=x^2-2x-3$，求 $f(x^2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解：

$$f(x^2)=(x^2)^2-2(x^2)-3=x^4-2x^2-3$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-2\left(\frac{1}{x}\right)-3=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-3$$

注：对于含有两个及两个以上中间变量的复合函数，引用的中间变量的符号必须不同.

四、反函数

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，其值域为 Z. 若对于 Z 中的每一个 y 值都有一个唯一的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D$ 与之对应，其对应规则记作 f^{-1}，这个定义在 Z 上的新函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 D，值域为 Z.

函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 Z，值域为 D.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此我们将 $x=f^{-1}(y)$ 改写成以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

【例 1-29】 求 $y=\sqrt{x-1}\,(x>1)$ 的反函数.

解：由 $\quad y=\sqrt{x-1}\,(x>1)$

可得 $\quad x=f^{-1}(y)=y^2+1$

习惯上写作 $\quad y=x^2+1$，$x\in(0,+\infty)$.

对反函数的认识，要掌握以下两点：

(1) 一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系.

(2) 反函数存在定理：若函数 $y=f(x)$ 在某区间上是严格单调增加（或严格单调减少），则其反函数存在，且反函数也是严格单调增加（或严格单调减少）.

【例 1-30】 求 $y=e^x-1$ 的反函数.

解：由 $y=e^x-1$ 可得 $x=f^{-1}(y)=\ln(y+1)$

故 $y=e^x-1$ 的反函数为 $y=\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$.

五、基本初等函数

在中学数学里已有较详细介绍的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 它们是研究各种函数的基础. 为了读者学习的方便，下面我们再对这几类函数作一简单介绍.

1. 幂函数

函数

$$y=x^{\mu}\quad(\mu\text{ 是常数})$$

称为幂函数.

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域随 μ 的不同而异，但无论 μ 为何值，函数在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，其图像过点 $(0,0)$ 及点 $(1,1)$，图 1-7 列出了 $\mu=1/2$，$\mu=1$，$\mu=2$ 时幂函数在第一象限的图像.

当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，其图像通过点 $(1,1)$，图 1-8 列出了 $\mu=-\frac{1}{2}$，$\mu=-1$，$\mu=-2$ 时幂函数在第一象限的图像.

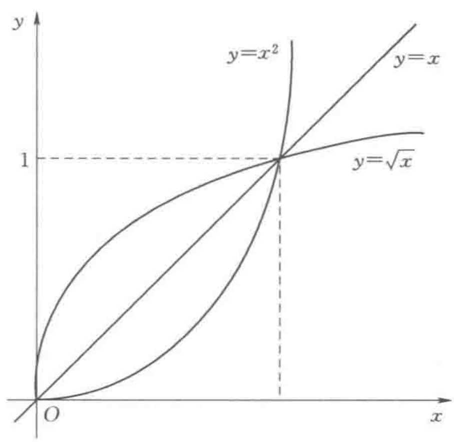

图 1-7

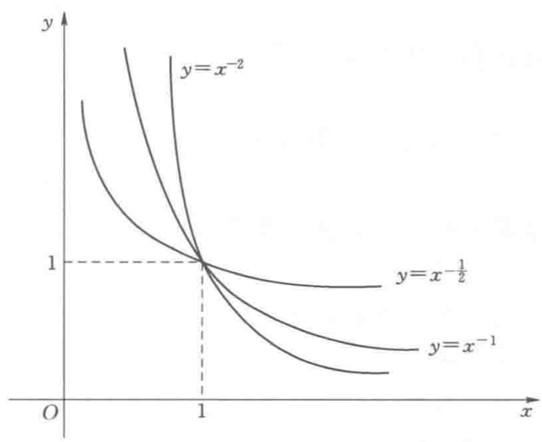

图 1-8

2. 指数函数

函数

$$y=a^x\ (a\text{ 是常数且 }a>0,\ a\neq 1)$$

称为指数函数.

指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图像通过点 $(0,1)$，且总在 x 轴上方.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调增加的；当 $a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调减少的，如图 1-9 所示.

以常数 e=2.71828182…为底的指数函数

$$y=e^x$$

是科技中常用的指数函数.

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作

$$y=\log_a x \quad (a\text{ 是常数且 } a>0,\ a\neq 1)$$

称为对数函数.

对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，图像过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减少，如图 1-10 所示.

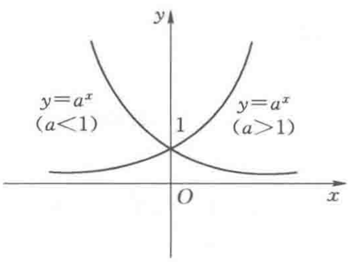

图 1-9

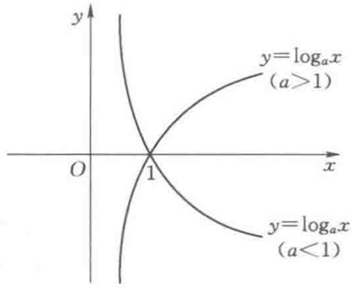

图 1-10

科学技术中常用以 e 为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

被称为自然对数函数，简记作

$$y=\ln x$$

另外以 10 为底的对数函数

$$y=\log_{10} x$$

也是常用的对数函数，简记作 $y=\lg x$.

4. 三角函数

常用的三角函数有

正弦函数	$y=\sin x$
余弦函数	$y=\cos x$
正切函数	$y=\tan x$
余切函数	$y=\cot x$

其中自变量以弧度作单位来表示.

三角函数的图形如图 1-11～图 1-14 所示，分别称为正弦曲线、余弦曲线、正切曲线和余切曲线.

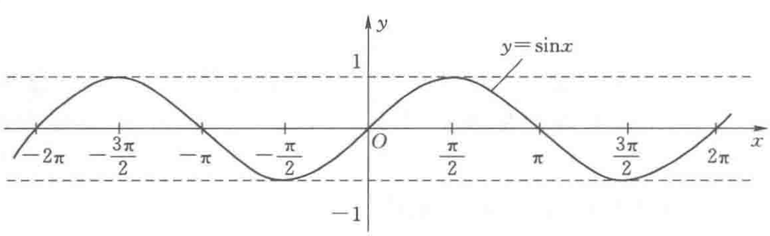

图 1-11