



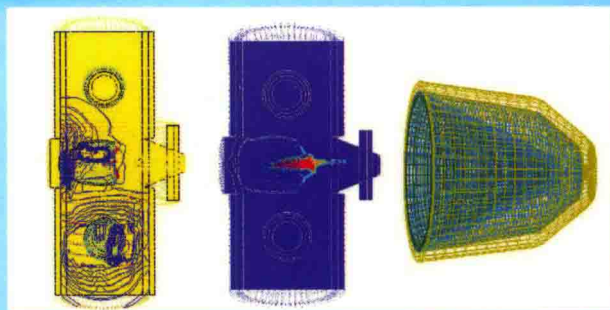
装备科技译著出版基金

[美] 李文和 著

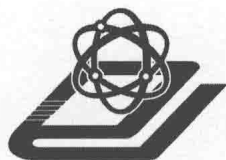
毛益明 郭涛 李裕春 时党勇 译

聚能装药问题的 计算机模拟

Computer Simulation of
Shaped Charge
Problems



国防工业出版社
National Defense Industry Press



装备科技译著出版基金

聚能装药问题的计算机模拟

Computer Simulation of Shaped Charge Problems

〔美〕李文和(Wen Ho Lee) 著
毛益明 郭 涛 李裕春 时党勇 译

国防工业出版社

· 北京 ·

著作权合同登记 图字:军-2014-013 号

图书在版编目(CIP)数据

聚能装药问题的计算机模拟 / (美)李文和著;毛益明等译. —北京:国防工业出版社,2017.5

书名原文: Computer Simulation of Shaped Charge Problems

ISBN 978-7-118-10203-1

I. ①聚… II. ①李… ②毛… III. ①弹药—装药—计算机模拟 IV. ①TJ410.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 051947 号

Computer Simulation of Shaped Charge Problems by Wen Ho Lee. Copyright © 2006 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Simplified Chinese translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte Ltd., Singapore.

All Rights Reserved.

版权所有,侵权必究。

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 17½ 字数 330 千字

2017 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 92.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

自 1950 年 von Neumann 和 Richtmyer 引入人工黏性计算流体动力学中的冲击波问题后,利用计算机模拟具有强激波的物质流动成为可能。本书介绍应用数值计算方法求解聚能装药问题,这些问题牵涉到固体材料受高能炸药爆炸的高压压缩、拉格朗日坐标下人工黏性的应用、欧拉坐标系下物质界面确定的示踪粒子法(PIC 方法)以及能贴切描述材料性质的物态方程和本构关系等。

二维拉格朗日代码中不同介质间滑移线的处理是非常关键的,而在二维欧拉代码中,追踪和处理流动通量的物质界面是最重要的。本书中,这些问题将通过一些精确的方法予以解决。应用三维欧拉代码可以计算战区导弹防御系统(TMD)问题。

对聚能装药和爆炸成型弹丸问题,需要借助合适的物态方程和本构关系模型获得优化的设计。通常情况下,可以先由一种经试验数据调整较好的装药结构(如聚能装药)开始,然后,对装药结构参数略做修正(修正幅度小于 5%)得到一种新的装药结构,与此同时,与材料物态方程和本构关系相关的所有参数保持不变。这是本书装药结构设计的方法。

假定高能炸药处于药型罩的后方,在聚能装药药型罩塌缩折叠过程中,药型罩粒子可能喷射入连接着的前方药型罩材料中,为计算药型罩粒子和前方介质混合的这种复杂过程,需要一种合适的两相流模型。

本书第 12 章列出了 11 种应用于油井穿孔的聚能射流装药优化设计及重要参数。

谨对 F. H. Harlow、P. P. Whalen 致以由衷的谢意!在我长达 23 年 Los Alamos 国家试验室工作期间他们给予了我很多好的意见和建议。本书第 5 章的部分工作是由 G. N. Lee 利用 E. J. Caramana 的二维拉格朗日代码计算完成的。B. A. Kashiwa 帮助我完成了本书第 6 章的内容。R. W. Lyczkowski 对本书第 7 章的内容贡献巨大。本书第 3 章讨论的二维 PIC 代码是作者在 J. W. Painter 的帮助下开发的。第 12 章中应用的二维欧拉代码最初由 D. Youngs 开发,后由 S. P. Clancy 完善。

李文和
Albuquerque, 新墨西哥
2005 年 9 月

目 录

第1章 引言	1
第2章 拉格朗日方法	4
2.1 引言	5
2.2 变量的定义和注释	6
2.3 控制方程	10
2.4 物态方程	11
2.5 计算过程和有限差分	11
2.6 滑移边界处理	18
参考文献	22
第3章 欧拉方法	23
3.1 引言	24
3.2 物理公式概述	25
3.2.1 应力支撑介质的守恒方程	25
3.2.2 物态方程	25
3.2.3 层裂	29
3.3 计算方法	30
3.3.1 概要讨论	30
3.3.2 计算过程总结	30
3.3.3 拉格朗日阶段	31
3.3.4 塑性流动状态下的应力计算	39
3.3.5 粒子输运和重分网格	41
3.3.6 层裂的计算	44
3.3.7 时间步长控制	45
3.4 截断误差分析	46
3.4.1 质量	46
3.4.2 径向动量	48
3.4.3 轴向动量	50

3.4.4	内能	52
3.4.5	偏应力	53
3.5	等效塑性应变	54
3.6	FCT 方法应用到二阶精度的 PIC 中	55
3.6.1	引言	55
3.6.2	质量输运修正	55
3.6.3	修正的 FCT 分析	58
	参考文献	60
第 4 章	人工黏性与激波计算	61
4.1	引言	62
4.2	基本控制方程	63
4.3	一维编码中的人工黏性	64
4.4	二维编码中的人工黏性	65
4.5	有和无人工黏性的算法	66
4.6	问题计算结果示例	67
4.7	结论和讨论	72
	参考文献	72
第 5 章	斜冲击波反射的数值模拟	74
5.1	引言	75
5.2	欧拉方法	76
5.3	拉格朗日方法	77
5.4	数值计算及结果	79
5.4.1	规则反射	80
5.4.2	马赫反射	84
5.5	结论	86
	参考文献	86
第 6 章	单元中心定义和交错网格拉格朗日流体动力学的比较	88
6.1	引言	89
6.2	一种 TVD 拉格朗日算法	90
6.3	DIVU 限定量	92
6.4	顶点速度确定	93
6.5	交错网格	94

6.6	Mesa 和 Unicorn 方法	95
6.7	算例结果	96
6.8	结论	101
	参考文献	101
第 7 章	多相流计算	102
7.1	引言	103
7.2	两相流模型方程	104
7.2.1	基本方程组	104
7.2.2	Soo 动量方程	106
7.2.3	扩展的“Rudinger - Chang”动量方程	107
7.2.4	Hancox 等人的动量方程	107
7.2.5	Gidaspow 动量方程	108
7.3	五种形式两相流方程的特征值	109
7.4	阻力函数与相变率	110
7.5	数值求解程序	112
7.6	一种更稳定的数值算法	114
7.7	试验问题的描述	115
7.7.1	分批沉降两相介质混合	115
7.7.2	一维流化床	115
7.7.3	两相射流冲击垂直平板的模拟	115
7.7.4	计算结果及讨论	116
7.8	结论	119
	参考文献	120
第 8 章	状态方程、本构关系和高能炸药	122
8.1	状态方程简介	122
8.2	Mie - Gruneisen 状态方程和简单的 u_s 、 u_p 模型	122
8.3	Osborne 模型	123
8.4	Tillotson 状态方程	124
8.5	本构关系简介	124
8.6	二次模型	125
8.7	Steinberg - Guinan 模型	125
8.8	新 Steinberg 模型	127
8.9	高能炸药	129

8.9.1 简介	129
8.9.2 JWL 状态方程	129
8.9.3 JWL 状态方程的小改变	130
参考文献	131
第9章 聚能装药问题	132
9.1 引言	132
9.2 聚能装药问题无滑移拉格朗日方法计算结果	132
9.3 带滑移的拉格朗日方法计算聚能装药	134
9.4 聚能装药欧拉方法计算	136
9.4.1 “蝮蛇”聚能装药	136
9.4.2 半球形钽聚能装药	140
9.4.3 双锥形铜聚能装药	141
9.4.4 P-C 油井射孔器	143
9.4.5 装药为 PBX-W-113 的半球形铜药型罩	145
9.4.6 铜制半球形聚能装药的计算	147
9.4.7 主装药为 PBX-9404 的双锥形铜聚能装药	149
9.4.8 弹道研究试验室标准铜聚能装药的计算	151
9.4.9 钨铜合金聚能装药	153
参考文献	156
第10章 爆炸成型弹丸	157
10.1 引言	157
10.2 应用拉格朗日和欧拉方法组合代码计算爆炸成型弹丸	157
10.3 含泡沫的铜爆炸成型弹丸	159
10.4 不含泡沫的铜爆炸成型弹丸	163
10.5 非轴对称钽 EFP 战斗部	164
第11章 聚能装药射流的侵彻	168
11.1 引言	168
11.2 钨质杆式弹侵彻铝靶的计算	168
11.3 铜质杆式弹侵彻钢靶的计算	170
11.4 钽罩聚能射流侵彻钢锭	172
11.5 钽罩聚能射流侵彻钢板/水/钢板目标	173
11.6 铜铅合金罩聚能射流侵彻钢锭	175

11.7	双锥形铜铅粉末冶金罩聚能射流侵彻钢锭	176
11.8	双锥形铜末罩聚能射流侵彻薄钢靶/水/厚钢靶/岩石目标	178
11.9	“蝮蛇”式聚能射流侵彻钢锭	180
11.10	不同杀伤增强 LEAP 性能的计算评估	180
11.11	拦截弹撞击普通化学子弹药的毁伤评估	183
	参考文献	188
第 12 章 采用二维欧拉代码的油井射孔弹设计		189
12.1	引言	190
12.2	二维欧拉代码描述	193
12.3	状态方程和本构关系	195
12.4	聚能射流的特性	196
12.5	射流形态和侵彻计算结果与试验数据的对比分析	200
12.6	4.4cm 装药直径的射孔弹	202
12.7	3.6cm 装药直径的射孔弹	205
12.8	讨论	209
12.9	结论	211
	参考文献	212
附录 A 一维辐射流体动力学		213
A.1	引言	214
A.2	辐射流体动力学的数学理论	215
A.2.1	引言	215
A.2.2	辐射输运方程	216
A.2.3	包含康普顿散射的非平衡扩散方程	218
A.2.4	惯性系下的非平衡扩散方程	220
A.2.5	守恒律	222
A.3	数值分析	224
A.3.1	差分方程	224
A.3.2	边界条件	230
A.3.3	不透明度平均过程	231
A.3.4	可变 Eddington 因子	234
A.3.5	散射项	239
A.3.6	动量和能量守恒的差分方程	245
A.4	一维几何情形下一阶辐射传输方程式	247

A. 5 一种波动方程隐式差分近似的性质	251
参考文献	253
附录 B 氘-氘球的热核燃烧	254
B. 1 引言	255
B. 2 控制方程	256
B. 3 热核反应率	258
B. 4 计算步骤	259
B. 5 辐射输运计算	260
B. 6 一些重要的裂变反应	263
参考文献	263
附录 C Hugoniot 数据	265

第1章 引言

今天,大多数科学研究者面临着蓬勃发展的计算机软件和硬件工业的挑战,例如,计算机科学家正在用 C++ 程序设计语言进行面向对象程序设计,然而,大型科学计算软件至今仍停留在应用 Fortran 77 语言编制。即使对一个优秀的物理学家,应用诸如 C++ 等现代编程语言编制一个能求解偏微分方程的复杂程序,也是非常困难的。然而,当引入好的数值计算方法后,横亘在计算机科学家和物理学家之间的壕沟将变得越来越窄。这是本书编著的希望和目的。

对多物质问题,在物质变形小的前提下,拉格朗日方法是一种处理物质界面最精确的手段。当物质变形增大时,计算网格开始形成细长或狭窄区域,最终将由于难以接受的微小时间步长而导致计算终止。

近 35 年来,致力于研究拉格朗日代码的科学家们将大量的时间花费在如何设法解决物质大变形导致的计算网格纠缠问题。

欧拉方法由于采用了固定的空间网格,能计算大变形问题。但是,计算穿过边界区域的质量、动量、能量等通量的精度问题需要进一步解决,此外,欧拉方法还存在另一个问题,即物质界面的边界总是模糊不清的。因此,大多数利用欧拉方法编写代码的人总会为通量计算精度和物质界面处理问题伤脑筋。

任意拉格朗日欧拉(ALE)方法的核心思想是创建一种能保留拉格朗日和欧拉两种方法优点的代码,同时,又能避免拉格朗日和欧拉方法的缺陷。然而,无论有多么聪明,那些隐藏在内部的本质的东西总是会跟你作对的,ALE 方法常常会因为拉格朗日和欧拉方法的缺陷而终止计算,利用 ALE 方法而不落入陷阱是一种精妙的艺术。

自由拉格朗日方法于 20 世纪 70 年代初期在 Lawrence Livermore 国家试验室首次问世,几年后,二维自由拉格朗日代码被遍布全世界的许多学者开发应用,这个方法在 1985—1990 年间非常流行。1990 年后,由于在计算粒子紧密靠近问题时面临的困难,对自由拉格朗日方法的研究热潮急剧降温。今天,大多数研究者致力于研究光滑粒子流体动力学方法,这是属于自由拉格朗日方法范畴的一个子方法。

自由拉格朗日方法使用节点而不是网格来描述流体和固体介质,方法的快速计算优点降低了中央处理器(CPU)的耗费。这种方法的问题发生在介质由外向内以球形急剧压缩时,由于在很小的体积内定义了大量的节点,计算的精度开

始降低,而且在此期间,最近近邻的搜索也变得很混乱了。

黎曼求解器或其家族成员,如 Godunov、全系差递减法(TVD)等求解方法,是计算一维激波问题的最佳数值计算方法。这种方法的本质是将初始冲击波问题用激波间断面作为边界分解为两个区域,两个区域内部物理量不再是不连续的了。黎曼求解器在拉格朗日和欧拉坐标系下都适用,而且处理结果都很好。很多研究工作者结合真实材料物态方程,尝试将这种方法拓展应用到解决多维激波问题。

对于聚能装药问题,大多数描述波的代码利用程式化点火模型计算高能炸药爆炸释放的化学能。程式化点火模型尽管在计算精度上没有反应式点火模型高,但是这种模型简单好用。如果能在考虑点火阵面曲率效应时修正炸药爆轰速度,则对钝感炸药来说,程式化点火模型的计算精度将变得更高。原则上,反应式点火模型由于其正确度高而更为可取,但是,在大型代码计算中,由于反应式点火模型需要数量巨大的核心存储空间和 CPU 耗费而变得不可行。

聚能射流的性能很大程度上取决于药型罩材料的等级和高能炸药的能。炸药爆轰气体和其近邻材料(药型罩或装药外壳)之间压力波的相互作用极其复杂,以至于很难通过试验室试验来确定这些材料的行为特征。应用二维或三维欧拉型流体代码,我们只需通过定量修正药型罩和外壳的厚度及几何外形参数,便可以设计得到性能良好的聚能装药。药柱尺寸、高能炸药的密度均匀性等也是影响聚能射流性能的重要因素。

爆炸成型弹丸(EFP)装药由外壳、雷管、高能炸药和药型罩等组成。当 EFP 战斗部命中目标时,EFP 速度通常超过 2km/s ,由于 EFP 的速度和质量,其对目标作用的威力非常巨大。在 20 世纪 70 年代,由于二维和三维拉格朗日代码的应用,EFP 技术获得了飞速的进步。今天,设计者们利用拉格朗日或有限元代码,通过改变药型罩的厚度和几何外形等,专门设计得到喇叭口形 EFP、带尾翼的 EFP 和长杆状的 EFP 等。厚的装药外壳有助于提高爆炸压力,增大药型罩坍塌折叠速度,然而,对任何类型的 EFP 而言,装药外壳的厚度存在一个最优值。

侵彻总是涉及侵彻体和靶体,例如,一钨杆侵彻铝板。通常,侵彻体将具有与靶体相比相对较高的速度,在侵彻过程的第一阶段,侵彻体的动能转变为侵彻体和靶体相互作用界面处的热能,当材料吸热温度上升时,作用面处侵彻体和靶体材料开始融化,最终,靶体材料中形成陷坑。

附录 A,通过应用可变 Eddington(VE)近似,将第 2 章中描述的拉格朗日方法拓展应用于解决包括辐射输运的问题。VE 近似使用了罗斯兰和普朗克的介质不透明度表示方法,可以用来描述光疏和光密介质的辐射输运,其中也包含因康普顿散射和附带光谱变化引起的材料和辐射场之间的能量交换。

计算氘-氦球热核反应的数值计算方法在附录 B 中描述。在该附录中,光子和电子的耦合、电子和离子的耦合在第 2 章中介绍的拉格朗日坐标系中进行了讨论,关于求解非齐次、非平衡输运方程的逻辑过程和计算步骤也在本附录进行了讨论。

第2章 拉格朗日方法

注释^①

c	光速(3×10^{10} cm/s)
E	辐射能量密度(jerks/cm ³)
E^m	单位体积物质内能(jerks/cm ³)
$\dot{e}^{ij}$	偏应变率张量(1/shake)
$\vec{F}$	辐射通量向量((jerks · cm ⁻²)/shake)
G	弹性剪切模量(jerks/cm ³)
$I(\vec{r}, \nu, \vec{\Omega}, t)$	比辐射强度(辐射场在空间某点 $\vec{r}$ 、频率 ν 、方向 $\vec{\Omega}$ 、时刻 t 的比辐射强度定义为每单位频率区间垂直传播方向单位面积对应的立体角的能流, jerks/cm ²)
J	Jacobian 体积(cm ³)
j	(R, Z)和(k, l)之间的 Jacobian 变换(cm ²)
K	插图和差分方程中的拉格朗日坐标
k	拉格朗日坐标
L	插图和差分方程中的拉格朗日坐标
l	拉格朗日坐标
M	质量常数(g)
P^m	介质压力(jerks/cm ³)
$(P')^{ij}$	辐射能量张量(jerks/cm ³)
Q	人工黏性(jerks/cm ³)
Q_A	人工黏性, 以式(2.69)定义的 ${}_1Q_A$ 或式(2.70)定义的 ${}_3Q_A$ 表示均可
Q_B	人工黏性, 以式(2.71)定义的 ${}_2Q_B$ 或式(2.72)定义的 ${}_4Q_B$ 表示均可
$\vec{R}$	$\vec{r}$ 的法向向量, 即 $\vec{R} = (Z, -R)$
R	$R = R$ 为柱坐标, $\bar{R} = 1$ 为笛卡儿坐标

① 译者注: 本书各类符号较多, 为避免翻译过程中出现错误, 影响读者对书中内容的阅读和理解, 译者没有将各类符号转换成 GB 3100 ~ 3102—93《量和单位》要求的形式, 敬请理解。

$\vec{r}$	位置向量(R, Z)
S^{ij}	偏应力张量(jerks/cm ³)
$\dot{S}^{ij}$	偏应力率张量(jerks · cm ³ /shake)
$S^{RR}, S^{ZZ}, S^{RZ}, S^{\theta\theta}$	偏应力张量分量(jerks/cm ³)
t	时间(shakes)
u	速度向量的绝对值,例如 $u = \vec{u} $ (cm/shake)
$\vec{u}$	速度向量(U, V) (cm/shake)
W	能量源(jerks/(g · shake))
$\dot{W}$	能量源变化率(jerks/(g · shake ²))
Y^0	简单拉伸下的屈服应力(jerks/cm ³)

希腊字符

γ	比热比,例如 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$
δ^{RR}, δ^{ZZ}	刚体转动修正项(jerks · cm ⁻³ /shake)
ε	比内能(jerks)
η	文献[2.1]定义的加权函数
ξ	文献[2.1]定义的加权函数
ρ	密度(g/cm ³)
τ	比体积(cm ³ /g)
ϕ	方位角(弧度)
$\vec{\Omega}$	光子迁移方向的单位向量

下标

0	初始值
R	对 R 坐标的导数
t	对 t 的导数
Z	对 Z 坐标的导数

上标

n	n 时间步的时间,即 $t^n = t_0 + n \cdot \Delta t$
-----	---

2.1 引言

拉格朗日方法是计算小变形问题最合适的方法,若代码具有重分区和滑移线功能,它也能求解大变形问题。关于质量、动量、能量的控制方程可以利用差分或有限元方法离散和求解,本书仅讨论有限差分拉格朗日方法。

二维拉格朗日方法目前仍被广泛应用于求解包含强激波的多物质流动问

题。本章以舒尔茨的二维辐射流体动力学代码作为框架,我们在基本代码里补充完善,增加了材料强度模型、局部加速方向上的人工黏性以及滑移界面等三个特性。写出了适合舒尔茨专门格式要求的偏应力应变、剪切模量和屈服强度的有限差分方程。材料特性(例如,剪切模量和屈服强度)与压强、等效塑性应变相关。修正了人工黏性,使得能将人工黏性施加在局部加速流动单位向量方向上,有效消除了由于引入人工黏性造成的非物理加热现象,有助于保持计算网格的稳定,而且,通过这种修正还能获得一个非常陡峭的激波阵面。

在很多二维拉格朗日辐射流体动力学计算中,物质界面的剪切流动是一个重要的问题。由于网格与材料捆绑在一起,这种剪切流动将引起网格扭曲,导致计算难以为继。解决这一现象的途径是要有一种允许物质沿着界面流动的处理方法,目前已经发展了针对这一问题的很多种方法。一种最成功的方法是将物质界面转变为网格中能够半独立移动的两条线。然而,用这种方法来计算一些特定的物理问题时,引入一些近似假定显得尤为必要,例如,辐射流体动力学耦合问题等。本节介绍了一种允许物质沿着界面流过拉格朗日网格的半欧拉计算方法,这种方法不需要特殊的网格,除了流体动力学外,所有的计算都不变。该方法的基本思想是,将沿着滑移线分布的每个点短暂看成双点,分别单独计算这些点之间的运动,然后利用文献[2.2]中的自动重分区方法将这些点拉回,这种方法将允许物质沿着界面剪切流动。

2.2 变量的定义和注释

本节我们描述将要在控制方程(如质量守恒、动量守恒和能量守恒等)中用到的变量和注释的定义。

一个典型的当前计算区域如图 2.1 所示。在这个网格中,有两种形式的变量:区域变量和点变量。区域变量定义在区域中心,点变量定义在网格点上。定义了区域变量后,区域 k, l 的质量可以表示为 $M_{k-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}}$, 其他区域变量可类似表示。通常,为了简便起见:以 k, l 取代 $k-\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}$; 以 $k-1, l$ 取代 $k-\frac{3}{2}, l-\frac{1}{2}$; 等等。图 2.1 中,下列定义成立:

$R(k, l, t)$ = 欧拉坐标(笛卡儿坐标系或柱坐标系),以 cm 为单位;

$Z(k, l, t)$ = 欧拉坐标(笛卡儿坐标系),以 cm 为单位;

$\vec{R}$ = 向量(R, Z);

k = 拉格朗日坐标;

l = 拉格朗日坐标;

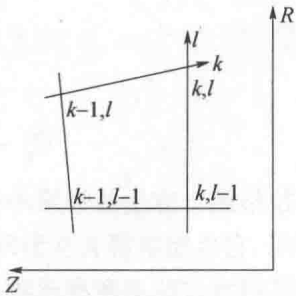


图 2.1 单元格 (k, l) 的典型计算区域

$j = (R, Z)$ 和 (k, l) 间的 Jacobian 变换, 以 cm^2 为单位。

记 $R_k = \frac{\partial R}{\partial k}$, $R_l = \frac{\partial R}{\partial l}$, 则有

$$j = R_k Z_l - R_l Z_k \quad (2.1)$$

定义 $\hat{R} = R$ 为柱坐标, $\hat{R} = 1$ 为笛卡儿坐标, 则 Jacobian 值可以定义为

$$J = \hat{R} j \quad (2.2)$$

我们现在想得到由欧拉空间偏导数到拉格朗日空间对应表述之间的关系式:

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial k}{\partial R} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial l}{\partial R} \frac{\partial}{\partial l} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial k}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{\partial l}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial l} \quad (2.4)$$

我们需要知道联系 $\frac{\partial k}{\partial R}, \dots, \frac{\partial l}{\partial Z}$ 和 $R_k, \dots, Z_l$ 之间的关系式。对任意变量 g , 有

$$\frac{\partial g}{\partial k} = R_k \frac{\partial g}{\partial R} + Z_k \frac{\partial g}{\partial Z} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = R_l \frac{\partial g}{\partial R} + Z_l \frac{\partial g}{\partial Z} \quad (2.6)$$

令 $g = k$, 可以求解得到 $\frac{\partial k}{\partial R}$ 和 $\frac{\partial k}{\partial Z}$, 令 $g = l$, 则可以解得 $\frac{\partial l}{\partial R}$ 和 $\frac{\partial l}{\partial Z}$ 。结果如下:

$$\frac{\partial k}{\partial R} = \frac{Z_l}{j} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial l}{\partial R} = -\frac{Z_k}{j} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial k}{\partial Z} = -\frac{R_l}{j} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial l}{\partial Z} = \frac{R_k}{j} \quad (2.10)$$

代入式(2.3)和式(2.4), 有

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{Z_l}{j} \frac{\partial}{\partial k} - \frac{Z_k}{j} \frac{\partial}{\partial l} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} = -\frac{R_l}{j} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{R_k}{j} \frac{\partial}{\partial l} \quad (2.12)$$

现在定义向量 $\vec{R}$ 滞后 $\vec{R}$ 90° , 即为与 $\vec{R}$ 垂直的向量, 于是

$$\vec{R} = (Z, -R) \quad (2.13)$$

我们现在定义拉格朗日空间的梯度算符 $\vec{\nabla} \rightarrow \vec{D}$, 其中