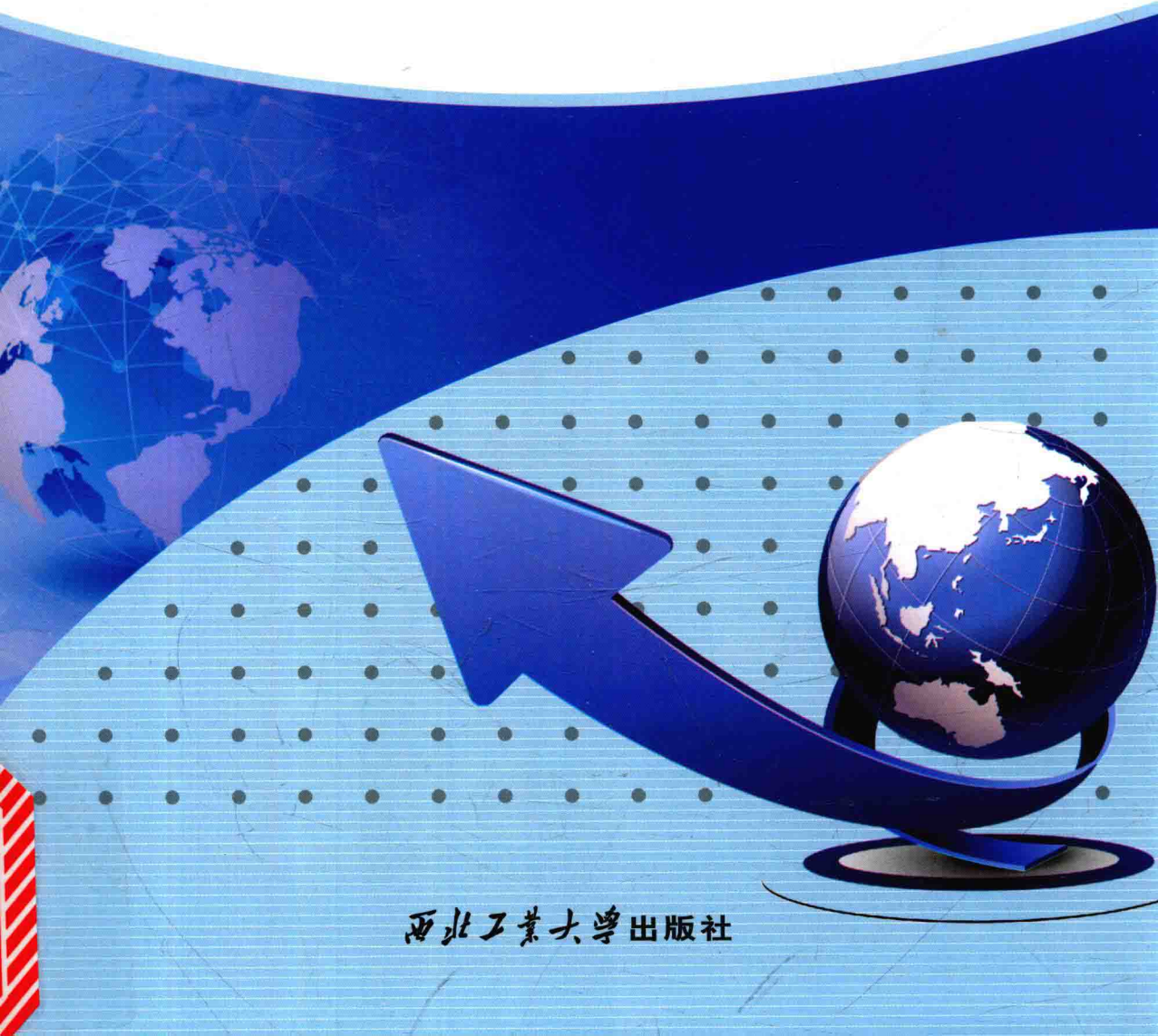




高等学校“十三五”规划教材·机电工程

电气工程中的电磁场

孙 锴◎编著



西北工业大学出版社

高等学校“十三五”规划教材·机电工程

DIANQI GONGCHENG ZHONG DE DIANCICHANG

电气工程中的电磁场

孙 锴 编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是专门为电气工程专业编写的宏观电磁场理论教材,在高等数学和普通物理的基础上系统阐述宏观电磁场的基本理论。

全书共分6章:第1章和第2章将大学物理中学习的电磁学规律以矢量场论重新描述。第3章在前两章的基础上总结出电磁场的普适公式——麦克斯韦方程组;第4章讨论一种特殊的电磁场——静态场在自由空间中的数学表述:泊松方程和拉普拉斯方程,以及简单的方程求解方法;第5章介绍电磁场在自由空间中的传播特性方程——亥姆霍兹方程,并分析在不同条件下电磁波的传播特性;第6章介绍电磁波在限定区域传播的定量分析方法。

本书的使用对象是普通高等学校电气工程专业高年级本科生,也可以作为电子信息工程、材料工程的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电气工程中的电磁场/孙锴编著. —西安:西北工业大学出版社,2016.8
ISBN 978-7-5612-5078-5

I. ①电… II. ①孙… III. ①电磁场 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 216945 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电话:(029)88493844 88491757

网址:www.nwpup.com

印刷者:陕西金德佳印务有限公司

开本:787 mm×1 092 mm 1/16

印张:11.875

字数:287 千字

版次:2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷

定价:26.00 元

前言

本书针对电气专业对于电磁场理论学习的特殊要求,结合笔者近 10 年的电气专业电磁场教学经验编写而成。全书共分 6 章,参考学时为 48~64 学时。

第 1 章为静态电场,从库伦定律出发,利用矢量代数作为数学分析工具,重写在大学物理中学习过的所有静电学公式。重点介绍如何以三维正交坐标系描述空间中的场点坐标以及不同坐标系下的空间转换,场的概念,以梯度描述电位,用散度和通量描述电场强度,并用库仑定律推导出描述静态电场高斯定律。

第 2 章为稳恒磁场,从毕奥萨伐尔定律出发,利用安培力导出磁感应强度的环量公式,从数学上证明电流源式稳恒磁场的场源,并计算磁感应强度的磁通量,从而得出磁通连续定律。

第 3 章为麦克斯韦方程组,以矢量场论为数学工具,整合电磁学重要的实验定律:库仑定律、高斯定律、安培环路定理、磁通连续定律和法拉第电磁感应定律等,并根据位移电流假说,总结出电磁场的电场分量和磁场分量的普适公式,即麦克斯韦方程组,从而证明电和磁在本质上的统一性,并预言电磁波的存在,进而分析麦克斯韦方程组在不同媒质以及边界的表达式。

第 4 章为静态场分析,利用麦克斯韦方程组推导出静态场位函数满足的方程:泊松方程和拉普拉斯方程,并介绍两种求解方法。

第 5 章为动态场分析,利用麦克斯韦方程组推导出动态场的波函数方程——亥姆霍兹方程。以最简单、最基本的时谐场为例,利用亥姆霍兹方程推导出电磁波的相速度、波长、波阻抗以及能量的计算公式,并讨论电磁波在无损耗媒质和有损耗媒质中的特性。

第 6 章为导行电磁波,介绍时谐场在均匀波导装置中的分类和传输特性,包括用纵向场法求解 TE 波和 TM 波,TEM 传输线的电波方程,特性参数(特性阻抗、传输系数、相速度与波长、电压反射系数、输入阻抗等),及其在无损耗介质中的 3 种工作状态。最后,以矩形波导为例,介绍传输线理论的具体应用方法。

本书从大学物理和高等数学出发,采用阶梯式的方法进入电磁场的理论学习,降低入门难度。本书的第 1 章和第 2 章是对大学物理和高等数学中电磁学以及矢量场论的回顾和复习,第 3 章开始才正式进入电磁场理论的学习。读者如果对电磁学知识和矢量场论十分熟悉,可以直接从第 3 章开始阅读。

本书由孙锴编著，是结合多年的教学经验编写而成的。

笔者曾毕业于西安交通大学控制科学与工程专业，获博士学位，现任教于西安建筑科技大学机电工程学院，自 2008 年起承担电磁场的教学工作。

由于水平有限，书中难免存在错误之处，恳请广大读者批评指正。

编著者

2015 年 12 月

目 录

第 1 章 静态电场	1
1.1 电场力与矢量场	1
1.2 正交曲面坐标系	5
1.3 电场力与电势	12
1.4 静电场的环量与旋度	23
1.5 电场的通量和散度	30
1.6 静电场的麦克斯韦方程组	45
1.7 本章小结	48
1.8 习题	49
第 2 章 稳恒磁场	52
2.1 磁感应强度	52
2.2 磁通连续性原理	58
2.3 安培环路定理	64
2.4 恒定磁场的麦克斯韦方程组	67
2.5 本章小结	67
2.6 习题	68
第 3 章 麦克斯韦方程组	70
3.1 真空中的麦克斯韦方程组	70
3.2 介质中的麦克斯韦方程组	77
3.3 电磁场的能量与坡印廷矢量	89
3.4 本章小结	92
3.5 习题	93
第 4 章 静态场分析	95
4.1 静态场的基本方程	95
4.2 对偶原理	99
4.3 叠加原理和唯一性定理	100
4.4 镜像法	103
4.5 分离变量法	111
4.6 本章小结	114
4.7 习题	116

第 5 章 动态场分析	119
5.1 电磁波的波动方程	119
5.2 时谐电磁波	122
5.3 电磁波在无损耗介质中传播	130
5.4 电磁波在有损耗介质中传播	133
5.5 电磁波的极化	141
5.6 本章小结	145
5.7 习题	146
第 6 章 导行电磁波	150
6.1 电磁波在均匀波导装置中传播的一般特性	150
6.2 TEM 传输线	160
6.3 矩形波导	173
6.4 本章小结	180
6.5 习题	182
参考文献	184

第1章 静态电场

在电磁学发展历史上,J. C. 麦克斯韦(1831—1879 年)建立了不朽的功绩。他在总结前人的研究成果的基础上,归纳总结了电磁学实验和理论方面的自他之前一切成果,以矢量场论为数学工具,建立了麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组是经典电磁理论的核心,它实现了对电磁规律的定量计算,揭示了电场和磁场之间,以及电磁场和电荷、电流之间的互相联系、互相转换的规律,并预言了电磁波的存在。麦克斯韦方程组是对宏观电磁现象的一个全面总结,是一切宏观电磁现象都遵循的普遍规律。

为了学习麦克斯韦方程组,首先要学习如何利用矢量场论来描述电磁定律。本章首先学习矢量场论在电场中的应用。

1.1 电场力与矢量场

人们自 2 000 多年前从摩擦起电开始认识到电这一自然现象开始,之后相当长的一段时间里,人们对电的认识始终停留在定性了解阶段。这是因为,一方面社会生产力的发展还没有对电力提出迫切的需求;另一方面,人们对电的研究必须借助于比较精密的仪器,这也只有在生产水平达到一定高度时才能实现。这种状况一直持续到 19 世纪。最早的对于电的定量研究是 1785 年,法国科学家库伦从实验出发总结的两个静止电荷间相互作用的规律,被称为库伦定律。

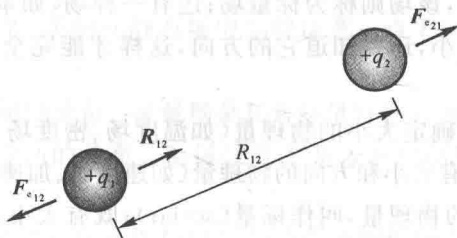


图 1-1 库伦定律

库伦定律:在真空中,两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的相互作用力的大小与 q_1 和 q_2 的乘积成正比,与它们之间距离 r 的平方成反比;作用力的方向沿着它们的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸,如图 1-1 所示。其数学表达式为

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (1-1)$$

库伦定律适用条件:

a. 两个可视为点电荷的带电体之间相互作用力。

b. 无限大真空情况(式中 $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ 为真空中的介电常数)。

注意:条件 b 可推广到无限大各向同性的均匀介质中($\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$)。

库伦定律对两点电荷之间的作用力作了定量的描述。库伦定律说明,在带电体周围空间,确实存在着一种特殊形式的物质,当电荷或带电体进入这个区域时,将受到力的作用。存在于电荷周围的能对其他带电体产生作用力的特殊物质成为电场,如图 1-2 所示。

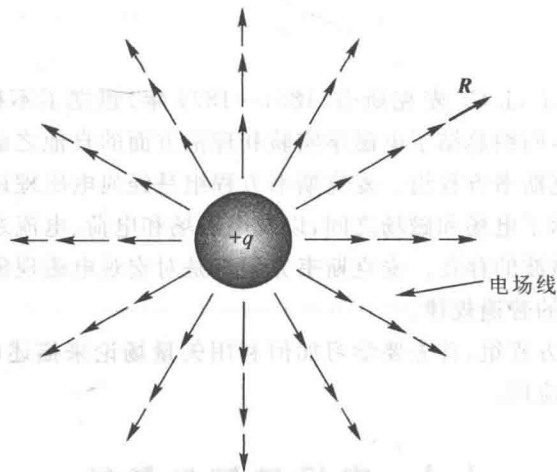


图 1-2 静电荷形成的电场

电场对电荷的作用力称为**电场力**。电场力是一个具有大小和方向的量,我们把这种既有大小又有方向的量定义为**矢量**。

从物理意义上讲,场是遍及一个被界定的或无限扩展的空间内的,能够产生某种物理效应的特殊的物质,场是具有能量的。从数学意义上理解,场是给定区域内各点数值的集合,这些数值规定了该区域内一个特定量的特征。

例如:温度场就是用场描述,只要知道了场中各点的大小,该温度场就被确定了,这种只有数值大小的物理量成为标量,该场则称为标量场;还有一种场,如本书中讲述的电磁场,其中电场强度不仅需要知道它的大小,还要知道它的方向,这样才能完全确定它,这样的物理量称为**矢量**,该场称为**矢量场**。

标量场:空间各点仅有确定大小的物理量(如温度场、密度场、气压场和电位场);

矢量场:空间各点同时有大小和方向的物理量(如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场)。

只有大小,不包含方向的物理量,叫作标量(scalar);既有大小,同时又包含方向的物理量,称为**矢量(vector)**。

电场是一个典型的矢量场。电场的一个重要的性质就是它对于处于自身作用范围内的电荷施加力的作用。在一个电场中放入带有不同电量和极性的试探电荷,测试其所受的电场力。实验表明,对于电场中的一个固定点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 来说, F/q_0 是一个与试探电荷的大小和正负均无关的物理量,反映了电场本身在空间中任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的分布情况,用电场强度 E 来定量描述。因此,可以用电场强度 E 来描述电场的基本特征,研究电场存在的规律。

空间中任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的电场强度 E 的矢量表示:

$$\mathbf{E} = e_1 E_1 + e_2 E_2 + e_3 E_3$$

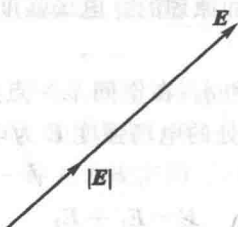


图 1-3 电场矢量

矢量的大小: $|\mathbf{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2}$ (称为矢量的模)。

矢量的坐标: e_1, e_2, e_3 。

矢量的方向: 图 1-3 中用箭头指示方向的线段表示电场矢量 $\mathbf{E}$, 箭头的指向表示 $\mathbf{E}$ 的方向。

线段长度表示矢量 $\mathbf{E}$ 的模 $|\mathbf{E}|$, 则

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|} \quad (1-2)$$

可以用 E 表示矢量 $\mathbf{E}$ 的模 $|\mathbf{E}|$, 如式(1-2)所示。一个模为 1 的矢量称为单位矢量。

根据电场强度与时间的关系, 电场可以分为静态电场和动态电场。

静态场: 仅由空间位置确定, 不随时间变化的场(如静电场和静磁场)。

时变场(动态场): 同时随空间位置和时间变化的场(如时变电磁场)。

在电磁场中, 将电场强度随时间变化的电场称为动态电场, 其数学表示形式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(E_1, E_2, E_3, t) \quad (1-3)$$

式(1-4)是一个四元函数, 表明在动态电场中, 空间任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的电场强度 $\mathbf{E}$ 既是空间的函数, 也是时间的函数。

电场强度不随时间变化, 亦即电场强度 $\mathbf{E}$ 与时间无关时, 则电场称为静态场, 其数学表示形式为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(E_1, E_2, E_3) \quad (1-4)$$

式(1-4)是一个三元函数, 表明在静态场中空间任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的电场强度 $\mathbf{E}$ 只是空间的函数, 与时间无关。

场是指某种物理量在空间的分布。标量场是具有标量特征的物理量在空间的分布。矢量场是具有矢量特征的物理量在空间的分布。电场强度 $\mathbf{E}$ 是表征空间区域中电场分布的时空分布函数。

电场强度定义: 单位正试验电荷在电场中某点处受到的作用力, 即为该点的电场强度, 有

$$\mathbf{E} = \lim_{q_1 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (1-5)$$

式中, q 为试探电荷的电量。试探电荷的电量 and 尺寸都应该足够小, 不会引发原有电场的畸变。将库仑力的表达式(1-1)代入上式中, 可得

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R} \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) \quad (1-6)$$

电场强度是一个矢量, 其电位为 N/C, 同常也用 V/m 表示。由电场强度矢量可以得出两

个或多个彼此相对静止的电荷之间的作用力,所以电场强度 E 表示试探电荷在电场中的受力情况。在物理学中已知,力是服从叠加原理的。电场强度表征的是电荷在电场中的受力情况,显然,电场强度也服从叠加原理。

若空间中存在两个同号电荷 q_1 和 q_2 ,在空间某一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 处的电场强度分别是 E_1 和 E_2 ,则在空间点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 处的电场强度 E 为电荷 q_1 和 q_2 在该点处的电场强度的 E_1 和 E_2 的和,即

$$E = E_1 + E_2 \quad (1-7)$$

矢量的加法服从平行四边形法则,如图 1-4 所示。

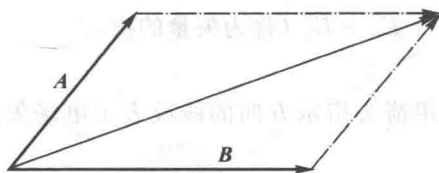


图 1-4 矢量加法

$$A + B = (A_{11} + B_{11})e_1 + (A_{12} + B_{12})e_2 + (A_{13} + B_{13})e_3 \quad (1-8)$$

因此,两个同号电荷 q_1 和 q_2 在空间中任意一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 处的电场强度 E 为

$$E = E_1 + E_2 = (E_{11} + E_{21})e_1 + (E_{12} + E_{22})e_2 + (E_{13} + E_{22})e_3 \quad (1-9)$$

注意:矢量加法服从交换律和结合律,有

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

若空间中存在两个电荷 q_1 和 q_2 异号,则计算在空间某点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 处的电场强度 E 需要借助于矢量减法,如图 1-5 所示。

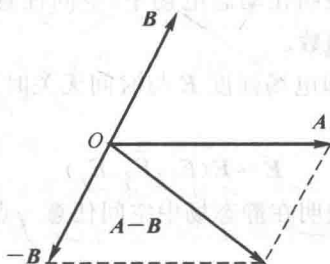


图 1-5 矢量减法

借助于矢量加法可以实现矢量减法,则有

$$A + (-B) = A - B \quad (1-11)$$

矢量减法在三维正交坐标系中的数学表现形式为

$$A - B = (A_{11} - B_{11})e_1 + (A_{12} - B_{12})e_2 + (A_{13} - B_{13})e_3 \quad (1-12)$$

因此,两个异号电荷 q_1 和 q_2 ,在空间某一点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 处的电场强度 E 为

$$E = E_1 - E_2 = (E_{11} - E_{21})e_1 + (E_{12} - E_{22})e_2 + (E_{13} - E_{22})e_3 \quad (1-13)$$

电场用电场强度 E 描述电场在三维空间中的分布,是一个典型的矢量场。因此,电场强度 E 的运算服从矢量的运算法则。

1.2 正交曲面坐标系

在电磁场的学习中,就是与场量打交道。根据场的特性可以知道,场是一种空间量。要考察某一物理量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系,而且需要根据所研究的对象的几何形状的不同采用不同的坐标系。坐标系是一种人为规定的,是为了方便人们标记物理量的空间分布的定位规则。

两个曲面相交形成一条交线,3个曲面相交可以得到一个交点。因此,空间中一点的坐标可以用3个参数来表示,每个参数确定一个坐标曲面。如果在空间任一点处,3个相交的曲面两两正交(即各曲面在交点上的法线互相垂直),则坐标曲面的3条交线在该点也互相正交(即各交线在该点的切线相互垂直),这样构成的坐标系称为正交曲面坐标系,这些曲线称为坐标曲线或坐标轴。

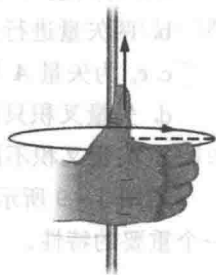
由于场在空间中分布的形状不同,为了便于描述,需要使用不同的坐标系,常用的有平面直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系等。我们最熟悉的坐标系是平面直角坐标系。在本书中研究的场只要是在圆柱形导线上传输的束缚场和自由空间中的辐射场,前者场的分布形式为圆柱形而后者为球形。因此,本节着重介绍这3种常用的坐标系:平面直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系。

引入坐标系可以将矢量运算中的矢量按坐标投影形式分解为标量,可简化分析与计算。由于所处的空间是3维的,3种常用的坐标系都属右手系正交曲线坐标系。一般而言,选择三维右手系正交曲面坐标系有以下两个原则:

- (1) 3个坐标轴必须互相垂直,即 $e_1 \perp e_2 \perp e_3$;
- (2) 3个坐标轴 e_1, e_2, e_3 必须满足右手螺旋定则,如图1-6所示。

即满足下式:

$$\left. \begin{aligned} e_1 \times e_2 &= e_3 \\ e_2 \times e_3 &= e_1 \\ e_3 \times e_1 &= e_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$



同一个矢量场在不同的坐标系中的矢量的表达式完全不同。因此需
要将同一个矢量在不同的坐标系进行转换。现在就常用的3个正交坐标
系即直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系分别进行阐述。

1.2.1 直角坐标系

在直角坐标系中,空间任意一点 M 的位置可以用3个相互独立的变量 x, y, z 表示,记 $M(x, y, z)$, 它们的变化范围是 $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty$ 。任意一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的三个相互正交的坐标单位矢量 e_x, e_y, e_z 分别是 x, y 和 z 增加的方向,且遵守右手螺旋定则,如图1-7所示。

构成平面直角坐标系的3个单位矢量依照所示的右手螺旋定则排列,见下式:

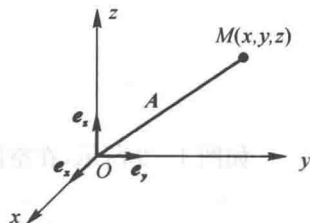


图1-7 平面直角坐标系

$$\left. \begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

式(1-15)中的运算为矢量的叉积(vector product),是一类重要的矢量运算。下面我们回顾一下矢量叉积的运算法则。

设矢量 $\mathbf{A} = e_x A_x + e_y A_y + e_z A_z$, 矢量 $\mathbf{B} = e_x B_x + e_y B_y + e_z B_z$, 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的叉积(或矢积)服从按右旋螺旋定则,如图 1-8 所示。

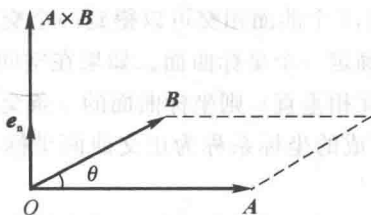


图 1-8 矢量的叉积

矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的叉积公式为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = e_x (A_y B_z - A_z B_y) - e_y (A_x B_z - A_z B_x) + e_z (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1-16)$$

注意:

- θ 为矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 的夹角。
- 两矢量进行矢量积后的结果仍为矢量。
- e_n 为矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 所形成平面的法向单位矢量。
- 矢量叉积只服从分配律, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ 。
- 矢量叉积不服从交换律, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ 。

如图 1-9 所示,3 个单位矢量的方向不随 P 点位置的变化而变化,这是平面直角坐标系的一个重要的特性。

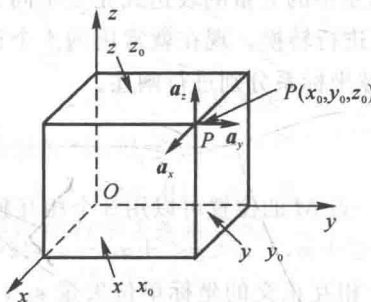
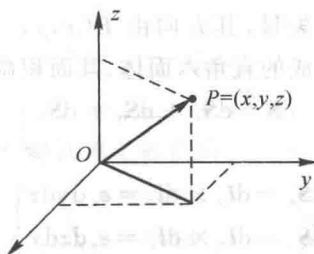


图 1-9 点在平面直角坐标系中的表示

如图 1-9 所示,在空间任一点 P 的位置可用单位矢量表示为

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{P} = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1-17)$$

式(1-17)中, x, y, z 分别表示点 OP 在 3 个单位矢量方向 e_x, e_y, e_z 的投影,如图 1-10 所示。

图 1-10 P 点在平面直角坐标系中的投影

在直角坐标系中,如图 1-11 所示,空间任一点 $P(x, y, z)$ 在空间中做微小的位移后到达 $P'(x', y', z')$ 点,则点 $P'(x', y', z')$ 的位置可以表示为 $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$, 其中 dx , dy , dz 分别是变量 x, y, z 在 e_x, e_y, e_z 方向上的微小增量。

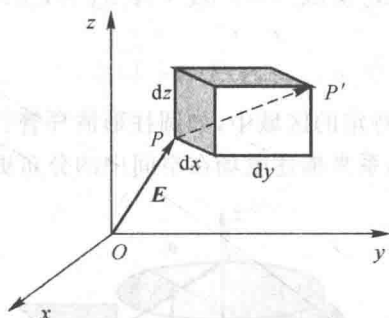


图 1-11 平面直角坐标系的微分元

如图 1-11 所示,矢量 $\overrightarrow{PP'}$ 是矢量 E 沿着该方向的线微元,可表示为

$$d\mathbf{l} = e_x dx + e_y dy + e_z dz \quad (1-18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} dl_x &= e_x dx \\ dl_y &= e_y dy \\ dl_z &= e_z dz \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

线微元为

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (1-20)$$

面积微元如图 1-12 所示。

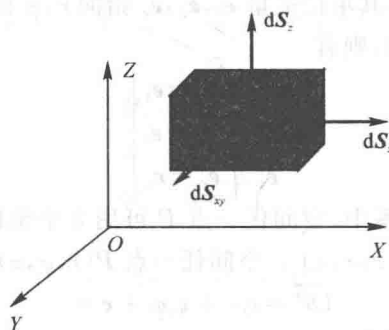


图 1-12 平面直角坐标系中的面微元与体微元

矢量 $\mathbf{E}$ 的线微元仍然是一个矢量,其方向由 $P(x, y, z)$ 指向 $P'(x', y', z')$ 。由 $x, x+dx, y, y+dy, z, z+dz$ 这 6 个点组成的直角六面体,其面积微元公式为

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{S}_x + d\mathbf{S}_y + d\mathbf{S}_z \quad (1-21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{S}_x &= d\mathbf{l}_y \times d\mathbf{l}_z = \mathbf{e}_x dydz \\ d\mathbf{S}_y &= d\mathbf{l}_z \times d\mathbf{l}_x = \mathbf{e}_y dzdx \\ d\mathbf{S}_z &= d\mathbf{l}_x \times d\mathbf{l}_y = \mathbf{e}_z dxdy \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

注意:对于闭合曲面,面积微元的方向为曲面上该点的外法线方向;对于非闭合曲面,面积微元的方向是根据曲面边界的环绕方向,由右手螺旋定则来确定。

平面直角坐标系的体积微元是由如图 1-12 所示的面积微元封闭而成的,即

$$dV = d\mathbf{l}_x \cdot (d\mathbf{l}_y \times d\mathbf{l}_z) = \mathbf{e}_x dx \cdot (\mathbf{e}_y dy \times \mathbf{e}_z dz) = dxdydz \quad (1-23)$$

1.2.2 圆柱坐标系

电场常常会被限制在某种特定的区域中,如圆柱形波导管、通电导线等圆柱形空间中。因此,用如图 1-13 所示的柱坐标系来描述电场在空间中的分布更加简洁明了。

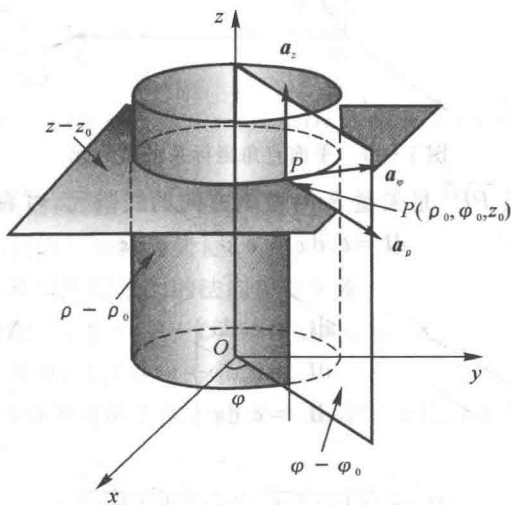


图 1-13 柱坐标系

如图 1-13 所示柱坐标系,其单位矢量 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ 指向 r, φ 和 z 增加的方向,它们始终保持相互正交,且满足右手螺旋定则,则有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

在图 1-13 所示的柱坐标系中,空间任一点 P 可用 3 个坐标变量 (r, φ, z) 来表示, P 点的位置在圆柱坐标系下可写为 $P(r, \varphi, z)$ 。空间任一点 $P(r, \varphi, z)$ 的位置可用矢量表示为

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{e}_r r + \mathbf{e}_\varphi \varphi + \mathbf{e}_z z \quad (1-25)$$

$P(r, \varphi, z)$ 的变化范围分别为

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq r < +\infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

任意矢量从柱坐标系转换到平面直角坐标系的公式为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

任意矢量从平面直角坐标系转换到柱坐标系的公式为

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

如图 1-14 所示,在柱坐标系下,空间一点 $P(r, \varphi, z)$ 的增量微元表示为 $dr, d\varphi, dz$, 在点 $P(r, \varphi, z)$ 处沿着 e_r, e_φ, e_z 方向的线微元。

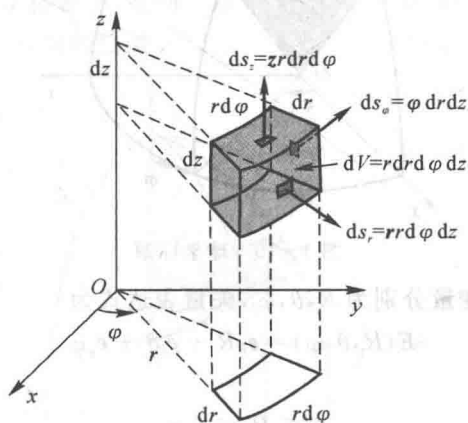


图 1-14 柱坐标系的面积微元和体积微元

在柱坐标系下,变量线微元可表示为

$$dl = e_r dr + e_\varphi r d\varphi + e_z dz \quad (1-29)$$

线微元为

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (r d\varphi)^2 + (dz)^2} \quad (1-30)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr e_r \\ dl_\varphi &= r d\varphi e_\varphi \\ dl_z &= dz e_z \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

曲面的面积微元可表示为

$$dS = dS_r + dS_\varphi + dS_z \quad (1-32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{S}_r &= d\mathbf{l}_\varphi \times d\mathbf{l}_z = \mathbf{e}_r r d\varphi dz \\ d\mathbf{S}_\varphi &= d\mathbf{l}_z \times d\mathbf{l}_r = \mathbf{e}_\varphi r dr dz \\ d\mathbf{S}_z &= d\mathbf{l}_r \times d\mathbf{l}_\varphi = \mathbf{e}_z r dr d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

体积微元可表示为

$$dV = d\mathbf{l} \cdot (d\mathbf{l}_\varphi \times d\mathbf{l}_z) = r dr d\varphi dz \quad (1-34)$$

1.2.3 球坐标系

点电荷在自由空间中形成的场为球形场。因此,球坐标系也是电场经常使用的正交坐标系之一。球坐标系如图 1-15 所示。

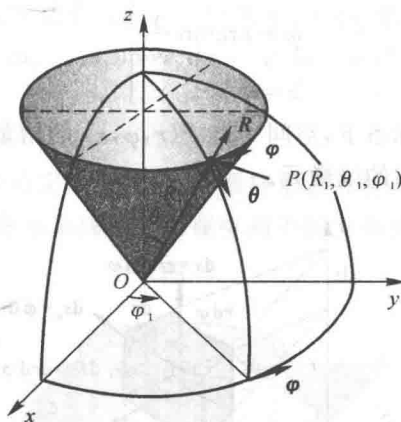


图 1-15 球坐标系

球坐标系中,3 个坐标变量分别为 R, θ, φ , 矢量表达式为

$$\mathbf{E}(R, \theta, \varphi) = \mathbf{e}_R R + \mathbf{e}_\theta \theta + \mathbf{e}_\varphi \varphi \quad (1-35)$$

其取值变化范围为

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq R < +\infty \\ 0 &\leq \theta < \pi \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

球坐标系的 3 个变量的单位矢量是 $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$, 它们始终保持正交, 且符合右手螺旋定则, 有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_R &= \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

空间任一点 P 的位置可用单位矢量表示为

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{A} = \mathbf{e}_R R + \mathbf{e}_\theta \theta + \mathbf{e}_\varphi \varphi \quad (1-38)$$

球坐标系转化为直角坐标系为

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-39)$$

直角坐标系转化球坐标系为