

THE PSYCHOLOGICAL STUDY ON BAYESIAN

贝叶斯推理的心理学研究

The Psychological study on Bayesian Reasoning

史滋福 张庆林 著

吉林大学出版社

贝叶斯推理的心理学研究

史滋福 张庆林 著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

贝叶斯推理的心理学研究 / 史滋福, 张庆林著. — 长春:
吉林大学出版社, 2009.7
ISBN 978-7-5601-4643-0

I. 贝… II. ①史… ②张… III. 贝叶斯推断 - 数理心理
学 - 研究 IV. 0212 B841.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 134888 号

书名: 贝叶斯推理的心理学研究

作者: 史滋福 张庆林 著

责任编辑、责任校对: 刘子贵

吉林大学出版社出版、发行

开本: 880 × 1230 毫米 1/32

印张: 7.25 字数: 160 千字

ISBN 978-7-5601-4643-0

封面设计: 先华工作室

长沙雅鑫印务有限公司 印刷

2009 年 08 月 第 1 版

2009 年 08 月 第 1 次印刷

定价: 22.00 元

版权所有 翻印必究

社址: 长春市明德路 421 号 邮编: 130021

发行部电话: 0431-88499826

网址: <http://www.jlup.com.cn>

E-mail: Jlp@mail.jlu.edu.cn

前言

目前，贝叶斯推理已广泛应用于决策、判断、医药、科学、工程技术和制造工艺、经济、政治和军事战略，如果能够正确进行推理，特别是推导已知结果的根本原因或估算备选方法的相关风险，则可大大提高决策的质量。同时贝叶斯推理规则作为人工智能领域和认知心理学领域的重要理论，已引起了数学家、逻辑家和心理学家的关注。心理学研究者最关心的是：一个不懂贝叶斯推规则的人在进行直觉概率推理时是否遵循贝叶斯推理规则。而以往实验室研究的结果却令人非常困惑：人们在进行贝叶斯推理时会经常犯错误，正确率都很低。因此，探测实验室情境下被试贝叶斯推理困难的原因以及日常生活情境中贝叶斯推理能力的发展趋势，对改善和提高人们的决策和解决问题的能力具有重要的理论意义和实践意义。

追溯到上世纪 90 年代初，国外有关这个领域的心理学文献还仅仅是介绍性质的，90 年代中期才逐渐出现了一些实验研究，21 世纪初尤盛。而在我国这一领域的心理学文献很少很少，且查到早期的文献大多是有关贝叶斯公式的教学文献和有关人工智能中贝叶斯模型的论文。可喜的是，21 世纪以来我国心理学研究者逐渐将注意力投放到这一领域，逐渐涌现出了学者以硕士和博士论文选题来研究贝叶斯推理，而心理学专业期刊上也渐渐地发表了有关这一方面的心理学实验研究，但仍然

为数不多，从总体上来说，对贝叶斯推理进行心理学研究在我国仍是一个相对薄弱的环节。加之，有些心理学研究者即使想对人类贝叶斯推理的心理加工过程进行实验研究，但也终因贝叶斯推理过程中涉及到复杂的认知和数学专业知识望而却步。因此，当我们在确立博士论文选题和撰写《思维心理学》有关概率推理章节的时候已明显感觉到了这方面研究工作的必要性和紧迫性，于是，早就有了要把国内外有关这一领域的研究及自己有关这个方面的研究集结成书，介绍给我国更多心理学研究者的想法，值得高兴的是本书的出版也得到了湖南师范大学博士基金项目的资助。希望《贝叶斯推理的心理学研究》一书的出版对推动和加强这一领域的研究能够起到一定的作用。

在撰写本书的过程中，我们力图做到如下三点：

1. 简明介绍贝叶斯推理的认知过程及所涉及到的数学规则。现阶段我国心理学研究者对贝叶斯推理规则还知之不多，导致这一领域所开展的实验研究比较少，如果能够让研究者清楚推理中所遵循的规则，则对研究者剖析人类贝叶斯推理过程有着极其重要的意义，对于我国心理学工作者加强这一领域的研究是有很大推动价值的。

2. 梳理贝叶斯推理的心理学研究进程。在本书中作者较深入地细致地分析了影响贝叶斯推理的客观因素和主观因素，并对这些研究进行了具体的简评，阅读本书后希望读者能明晰地了解贝叶斯推理，并有针对性地开展后续研究。

3. 系统提出贝叶斯推理过程中几个认知偏向——“锚定参照错误”、“直觉调整误差”和“基础比率忽略”偏向，从偏向的角度分析人们进行贝叶斯推理时常犯错误的原因，在一定程度上解释以往研究中出现的不同研究结果的原因，期盼着这些研究能对提高人们的贝叶斯推理能力以及改善人们决策时的思维策略等提供实验证据和理论基础。此外，本书还汇集了推理

中常见的认知偏向，期望对研究者进一步挖掘贝叶斯推理中的认知偏向起到一定借鉴作用。

在本书出版之际，由衷地感谢所有关心和支持本书写作的老师、家人和朋友！感谢湖南师范大学教科院领导对本书写作的支持和关心；感谢燕良轼教授在本书写作过程中给予的诸多建议；感谢学生唐源鸿、王香香和陈娇的具体帮助，感谢湖南师范大学的资助，感谢吉林大学出版社的大力支持！在本书写作过程中，笔者参阅了许多国内外的相关书籍和资料，在此向原作者表示衷心的感谢！总之，没有你们的支持和帮助，这本书不可能问世的！

我们深知个人的所学所知终究有限，因此本书也很难达到尽善尽美。但想到撰写此书的目的是竭尽所能去推动贝叶斯推理领域的研究，如果能够对后来研究者有一点启发，我们将深感荣幸；书中如有纰漏偏差之处，敬请读者批评斧正，并在此深表谢忱！

作者

2009年6月

目 录

第一章 绪 论	(1)
第一节 概率推理的生活背景	(2)
第二节 贝叶斯推理的规则基础	(6)
第三节 贝叶斯推理的主要理论及研究方法	(13)
第四节 贝叶斯推理的研究意义	(26)
第二章 贝叶斯推理问题呈现方式的影响研究 ...	(37)
第一节 贝叶斯推理问题内容性质的研究	(38)
第二节 贝叶斯推理问题数字呈现方式的研究	(52)
第三节 提问方式对贝叶斯推理的影响	(65)
第四节 图表表征对贝叶斯推理的影响	(73)
第五节 概率信息获得方式对贝叶斯推理的影响 ...	(84)
总 评	(92)

第三章 主体加工深度与知识经验对贝叶斯推理的影响研究 (94)

 第一节 主体加工深度对贝叶斯推理的影响 (95)

 第二节 主体知识经验对贝叶斯推理的影响 (105)

 总 评 (116)

第四章 贝叶斯推理中的认知偏向研究 (119)

 第一节 推理中常用的启发式策略 (120)

 第二节 推理中的认知偏向 (129)

 第三节 贝叶斯推理中的认知偏向 (154)

 总 评 (185)

第五章 贝叶斯推理的研究总论及展望 (188)

主要参考文献 (201)

第一章 绪论

人们日常生活的许多方面都需要进行概率推理，例如估计各种选择行为所产生不同结果的可能性、推导已知结果的根本原因和估计备选方案的风险等。有研究表明，随着思考者年龄的增长，这类应用于不确定事件的概率判断变得越来越重要。

在心理学领域中，推理作为人类重要的思维活动得到了心理学家的广泛关注。而有关各种推理的心理学研究也愈来愈成为现代认知心理学领域的研究热点。但早期的研究主要关注演绎推理，对于概率推理的心理学研究则是近 30 年的事，特别是 2002 年诺贝尔经济学奖授予了概率推理领域的开拓者丹尼尔·卡尼曼先生以后，使得这一领域的研究更加引人注目。值得注意的是，虽然概率推理也是概率统计学和逻辑学的研究对象，但它作为心理学的研究对象，其研究角度是不同的：前者关心的是概率推算的公式或规则以及应用，而心理学家所关心的是，人们主观概率估计的认知加工过程及规律。

贝叶斯推理作为一种典型的概率推理，从心理学的角度对此领域进行探讨，对揭示人们概率信息的加工认知过程与规律、指导人们进行有效的学习和决策判断都具有十分重要的理论意义和实践意义。在进一步探讨心理学对贝叶斯推理的实证研究之前，本章将概要介绍与概率推理和贝叶斯推理有关的生活背景、数理逻辑学知识、主要理论及研究方法、研究意义。

第一节 概率推理的生活背景

世界上发生的现象是多种多样的，从可能性的角度可分为两类：一类为确定现象，即在一定条件下必然发生或必然不发生的现象，如上抛一枚硬币必然会落地；另一类现象为随机现象，如上抛一枚硬币落在地面，可能是正面向上也可能是反面向上，上抛硬币前是无法断言的。

人们研究随机现象的目的，不仅仅是为了了解可能出现哪些事件，也不仅仅是为了粗略地比较两事件发生的可能性谁大谁小，而是要确切地知道事件发生的可能性大小，即需要有一个刻画事件发生可能性大小的数量指标，这个刻画发生可能性大小的数量指标即为事件发生的概率。举一个简单的例子：掷一枚硬币，结果正面向上的概率是多少？很显然，这种可能性为 $1/2$ ，也就是说其概率为 $1/2$ 。

事实上，日常生活中人们经常会碰到许多不确定的信息，即具有概率性质的信息，如天阴未必就会下雨，面带微笑不都意味着友好，出现某种症状并不必然就是生病。人们需要在这种不确定信息的基础上进行概率推理，得出适当的结论。

时至今日，概率论及以其为基础的数理统计学科一起，在自然科学、社会科学、工程技术、军事科学以及生产生活实际等诸多领域中都起着不可替代的作用。比如，天气预报制作中的统计预报法，就是在大气动力学、热力学、气候学和预报员时间经验的基础上，应用概率论和数理统计方法，利用电子计算机，并根据历史资料来制作天气预报，即用概率值表示预报量出现可能性的大小。它所提供的不是某种天气现象的“有”

或“无”，也不是某气象要素值的“大”或“小”，而是天气现象出现的可能性有多大。又如对于降水的预报，传统的天气预报一般预报有雨或无雨，而概率天气预报则给出可能出现降水的百分数，百分数越大，出现降水的可能性就越大。概率天气预报既反映了天气变化确定性的一面，又反映了天气变化的不确定性和不确定程度的一面。在许多情况下，这种预报形式更能适应经济活动和军事活动中决策的需要。

又如彩票中的概率问题，如今我国各省、市发行了各种彩票(如福利彩票、体育彩票等)，各地充满诱惑的广告满天飞，而报纸、电视也大肆宣扬中大奖的幸运儿，吸引了众多人们踊跃购买。也许只要花上区区2元，就有可能获得100万！一点小小的投资竟然可能得到天文数字般的奖金，这没办法不让人动心。但一张彩票的中奖机会到底有多少呢？以福利彩票双色球中奖概率的计算为例，根据国家有关规定，“双色球”彩票单注奖金封顶的最高限额为500万元。将一至六等奖所有奖级的中奖概率相加，“双色球”的总中奖概率6.709453%。其中“双色球”一等奖为中了6个红色球号码和1个蓝色球号码，即中了“6+1”，它的中奖概率等于 $\frac{1}{C_{33}^6} \frac{1}{C_{16}^1} = \frac{1}{17721088}$ ；“双色球”二等奖的中奖概率为 $\frac{1}{1181406}$ ；“双色球”三等奖的中奖概率为 $\frac{1}{109389}$ 。在“双色球”33选6、16选1的一等奖中奖概率为17721088分之一，即奖组组合注数达到17721088注。若全部包号必须投注35442176元，则可100%中出1注一等奖，但此时投资高达3544万多元。可见，获奖仅仅是我们期盼的非常非常偶然的事件。

还有，你在商场里购买了一包XX牌子的婴儿奶粉，但不知道这包奶粉的三聚氰胺是否超标。按照该奶粉厂家以往的抽检结果，他们生产的婴儿奶粉三聚氰胺超标的概率只有1/1000。但为了安全起见，你还是去专业机构做了含量检测。已知检测

仪确认三聚氰胺超标的准确率为 80%，而检测三聚氰胺没有超标的准确率为 90%。令你非常惊讶的是，你拿到的这包婴儿奶粉检测报告三聚氰胺超标。现在你对这包奶粉该怎么处理呢？你可能会认为这包奶粉一定十分危险，但贝叶斯推理的结果表明，这包奶粉三聚氰胺超标的可能性只有千分之七或千分之八，是不用太多惊慌的。

与此类似地，著名的“三囚犯问题”也涉及到贝叶斯推理：

A、B、C 三个人被关在监狱里，第二天，三人中有一个而且只有一人将被执行死刑，另外两个人将被释放，而看守知道哪个人将被执行死刑，哪两个人将会获释。A 知道自己会被执行死刑的概率是 $1/3$ ，另外两人中至少一个人会被释放，于是 A 写了一封家书，想托 B 或 C 中能获释的一个人带回去。A 想问问看守到底应该把信交给谁（即 B 和 C 到底谁能获释）。看守想：“此时 A 被执行死刑的概率是 $1/3$ ，若我把 B 或 C 中那个会释放的人告诉了 A，那么只有两人可能被执行死刑，A 被执行死刑的概率就上升到了 $1/2$ ，如果自己隐瞒这个信息，A 被执行死刑的概率还会是 $1/3$ 。”现在的问题是，A 明明知道 B 和 C 中一定会有一个被释放，为什么自己不知道这个人是谁时，自己被执行死刑的概率是 $1/3$ ，而知道了这个人是谁时，自己被执行死刑的概率为什么就上升到了 $1/2$ 了呢？或者说，B、C 两人中反正有一个肯定会被释放，知道不知道这个人的名字为什么会影响到自己被执行死刑的概率呢？

问题的答案是：看守的担心是没有必要的，不论他是否把 B、C 中一个会被释放的人的名字告诉 A，A 被执行死刑的概率还是只有 $1/3$ ，因为：

表 1-1 三囚犯问题的结果

可能情况的序号	可能被执行死刑的人	看守可能告诉 A 被释放的人	出现此事件的概率
1a	A	B	1/6
1b		C	1/6
2		C	1/3
3		B	1/3

如果 A 被执行死刑(其概率是 $1/3$)，那么看守可以选择 B 或 C 告诉 A，选 B 还是选 C 是等可能的，因此，“A 被执行死刑且看守告诉 A：B 会释放”这件事的概率是 $\frac{1}{3}$ 的 $1/2$ ，也就是 $1/6$ 。表中的其他情况可以类似地分析。现在我们来看，如果看守告诉 A，明天 B 会被释放，我们看看此时 A 被执行死刑的概率是多大。从表中可以看出，此时只有情况 1a 或情况 3 可能发生，而情况 3 发生的概率是情况 1a 发生的概率的 2 倍，因此，此时情况 1a 发生的概率是 $1/3$ ，而情况 3 发生的概率是 $2/3$ ，也就是此时 C 被执行死刑的概率上升了。

近年来，一部分心理学家将目光投向贝叶斯推理这一典型的概率推理领域，探讨人们的贝叶斯推理是否符合数理逻辑、在推理过程中表现出哪些典型的特征等问题，这种研究对提高人们的决策质量具有十分重要的现实意义。然而，由于贝叶斯推理涉及到较为复杂的数学专业知识而使得有些研究者望而却步，这不能不说是一种遗憾。因此，我们有必要对贝叶斯推理的数理逻辑学知识做相应介绍。

第二节 贝叶斯推理的规则基础

如前所述，贝叶斯推理问题解决过程涉及到概率论中的许多重要计算法则。有关这方面的研究不仅受到人工智能领域和认知心理学领域研究者的广泛重视，同时也是数学家、逻辑学家关注的焦点，已经形成了一套成熟的规则体系。本节将简要介绍贝叶斯推理问题解决过程中所涉及到的数学规则及其算法，并对某些基本概念在心理学研究中的涵义加以界定。

6

一、频数、频率和概率

设在随机试验 E 中进行 n 次重复试验，若事件 A 出现了 n_A 次，则 n_A 称为事件 A 发生的频数；而比值 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率。

在随机试验中，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，即逐渐稳定于某一常数。这种“频率的稳定性”即为统计规律性，该数 p 为事件 A 发生的概率，记作 $P(A) = p$ ， $P(A)$ 称为 A 的统计概率。统计概率一般无法准确得到，能得到的只是近似值。即，当 n 很大时， $f_n(A) \approx p$ 。

二、客观概率和主观概率

上文中给出的概率定义是从数学的角度对事件的物理特性进行分析，我们称之为客观概率。然而在实际生活中，当我们仅对概率作以上“频率稳定性”的理解时，在不少事实中会说不通，在应用上也会面临困难。如预测明年全年的降水量和今年的基本相同这一事件发生的概率是 0.95。如果坚持用频率解

释，意味着要大量重复使用这一结论，然后发现预测正确的约占 95%，这样一来显然大大降低了预测结果的意义。

对于这一类实际机制尚未清楚的事件，实际上涉及到了主观概率的问题。主观概率是存在于人的头脑中的对事件客观概率的判断，其反映的是人们对某一事件发生的不同的信心水平。由此可见，客观概率和主观概率之间是有区别的，它们之间可能存在大小不一致的情况。然而客观概率和主观概率之间又能相互转化，即人们给出的主观概率是往往基于给出的各种客观概率信息，在此基础上对客观概率进行锚定、组合、调整。而贝叶斯推理过程中即存在这种客观概率和主观概率的相互转化。

三、条件概率

事件发生的概率有时候是不依赖于其他事件的发生而发生的，这样的概率事件是一种比较简单的概率事件，如抛掷一枚均匀的硬币，正面向上的概率是 50%。但是在现实生活中有许多事件是伴随另一种事件的发生而发生的，那么这种事件发生的概率就依赖于另一事件发生的概率，如在摸奖箱中摸出一张彩票中奖后再摸一张也中奖的概率就是条件概率 $P(\text{第二张中奖} | \text{第一张中奖})$ 。

设 A 、 B 为二事件，且 $P(A) > 0$ ，称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率。

四、概率规则

众所周知，数学中很多理论的基础是公理，贝叶斯规则也不例外，它源于概率论的三条正式规则：

(1) 凸性。对任何事件 A 和 B ，及 $0 \leq P(A|B) \leq 1$ 及 $P(A|A) = 1$

(2) 可加性。对于互斥事件 A 和 B, 和任意事件 C,

$$P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C)$$

这个规则通常扩展到互斥事件的一个可数的无穷集合。

(3) 乘法。对于任意三个事件 A、B 和 C,

$$P(A \cap B | C) = P(B | C)P(A | B \cap C)$$

从广义上来说, 任何概率都是条件概率, 因此它总是两个变元的函数, 如 $P(A|B)$ 。

五、贝叶斯规则

18 世纪, 英国学者贝叶斯(Bayes)曾提出一种公式用来解决如下一类问题:

假设 $H_1, H_2 \cdots$ 互相排斥并且构成一个完全事件, 已知它们的概率 $P(H_i), i=1, 2, \cdots$, 现观察到某事件 A 与 $H_1, H_2 \cdots$ 相伴随而出现, 并且已知条件概率 $P(A|H_i)$, 求 $P(H_i|A)$ 。这个公

$$\text{式是: } P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(H_1)P(A | H_1) + P(H_2)P(A | H_2) + \cdots}$$

这就是著名的贝叶斯规则, 有研究者也将其称为贝叶斯公式、模型或定理。为方便后面给出贝叶斯推理的定义, 我们称问题假设中条件概率涉及的事件为条件事件, 相应于公式待求的概率(即逆条件概率)涉及的事件为逆条件事件。

六、贝叶斯推理的界定

Manktelow(1999)对贝叶斯推理所下的定义是“符合贝叶斯模型的推理称为贝叶斯推理”, 国内大部分学者的研究都是在此定义的基础上进行的。塞缪尔(2000)则认为, 贝叶斯推理是将已有经验与数据集的潜在知识相结合, 利用先验知识和样本数据来获得对未知样本的估计, 从而弥补各自的片面性与缺点, 最终

得到比较合理的结果。

对这两种定义,我们认为, Manktelow 更多地是从结果的角度来考虑,将人们的推理结果与根据贝叶斯规则计算出的标准答案进行比较,而塞缪尔的定义则更注重推理过程。

而从贝叶斯推理的研究历史来看,它源自于人们根据新信息或证据调整自己已有观点的日常生活经历,如医生在看病时首先对病人有一个整体的病情估计,即估计其患某种疾病的可能性,之后通过检查、化验,如果新增加的证据信息使他认为病人患这个病的可能性增大,并且达到他认为确实是患了这种病的可能时,他就会做出最后的诊断,如果错误地估计了这一可能性,则很有可能导致误诊,从而危及生命。由此可见,贝叶斯推理本质上是探讨新证据对原假设可能性的影响作用。

因此,我们从心理学的视角出发,采用过程评定取向,将贝叶斯推理定义为,推理者对先验知识和当前证据信息进行锚定、组合、调整,用以对逆条件事件进行主观概率估计的过程。它是一类典型的条件概率推理,其中对各种概率信息进行合理、精确的组合是推理者得到正确答案的关键。可以说,条件概率推理实际上是一种广义上的贝叶斯推理。由于推理是一种特殊形式的问题解决,因此,贝叶斯推理有时也称为贝叶斯推理问题解决。

七、经典贝叶斯推理问题

在贝叶斯推理的心理学研究文献中,一个被广泛引用的材料是 David Eddy(1982)研究中所使用的例子,即经典“乳腺癌问题”:

参加常规 X 光透视检查的 40 岁妇女中,患乳腺癌的概率是 1%。如果一个妇女患了乳腺癌,她的胸透片呈阳性的概率是 80%。如果一个妇女没有患乳腺癌,她的胸透片呈阳性的概率是 9.6%。一个该年龄段的妇女,她的胸透片呈阳性,那么她实际