21世纪高校教材

高等数学

(第3版)

张大庆　滕冬梅　汪光先　主编

苏州大学出版社
Soochow University Press

21 世纪高校教材

高 等 数 学

（第 3 版）

主　编　张大庆　滕冬梅　汪光先

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 张大庆，滕冬梅，汪光先主编. —3 版
.—苏州：苏州大学出版社，2017.7
21 世纪高校教材
ISBN 978-7-5672-2181-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②滕… ③汪… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 172205 号

内容提要

全书共分九章，包括函数与向量、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、定积分与不定积分、二重积分与曲线积分、微分方程、无穷级数、概率论基础.

本书每章配套习题与习题课结合使用，辅以复习题训练，目的是帮助读者理解、消化和复习教材主体内容，编写中注重培养学生良好的科学思维习惯及实际应用能力.

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类各专业的公共数学课教学，也可供高等数学授课教师作为教参使用，以及提供给学生作考研辅导和竞赛指导使用.

高等数学
(第 3 版)
张大庆　滕冬梅　汪光先　主编
责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：214217)

开本 787 mm×960 mm　1/16　印张 22　字数 418 千
2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-2181-9　定价：39.80 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com

前 言

当前，数学已经成为社会经济研究的重要工具.高等数学课程对于大学生是非常重要的基础课程.刚步入高等教育殿堂的学生需要一本内容充实而难度适中的教材.为此，我们结合新形势下高等数学的教学要求编写了本书.

本书主要针对课时数较少的学生编写.针对读者的特点，本着“以应用为目的、以必需和够用为尺度”的编写原则，在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三个方面努力做出较为合理的安排，力求使学生的逻辑思考能力和数学应用能力都能得到发展，以期达到提高学生数学综合素质的目的.

在编写中我们努力使全书条理清晰，定理、定义的叙述力求严密.在建构引入新概念时，尽量使用通俗的语言，希望能够体现我们把本书写成一本“易教易学的高等数学教材”这一初衷.

本书共分八章，前五章主要介绍一元微积分，把多元函数微分学与一元函数内容一起介绍.第六章是二重积分与曲线积分，第七章是微分方程，第八章是无穷级数.后面的三章供不同专业选讲.各章的“习题课”部分提供了不少典型例题，可供上习题课时选用.此外，本书在各章附有习题和复习题供学生练习之用.

本书的编写出版，得到了苏州大学数学科学学院的大力支持，许多教师对本书提出了非常好的建议，使其增色不少.凡此种种，编者谨此一并致谢！最后，我们还要感谢苏州大学出版社为本书面世所做的工作.

编 者

2007 年 8 月

再版前言

本书按照教育部《高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求编写，结合高等数学教材主流体系模式，沿用定义严谨、理论框架组织合理的原则，强调在实例中熟练掌握理论方法的应用. 创新点在于整合了一元和多元框架下的微积分教学体系，将不同专业不同需求的主要教学内容融进一本教材，将微积分基本内容由浅入深、由易到难、由一元到多元组合成层次合理、内容简明的章节. 从数学定义到定理推导，从典型例题到精选习题，尽可能体现教学的多元性与多专业的适用性.

本书适合作为大部分院系专业学生的高等数学课程的教材，通过本书的学习，学生能在较短时间内掌握一元和多元微积分的初步知识. 修订版增加了概率论基础内容以及对应的排列组合分析知识，为学生学习统计、线性代数等后续课程提供必要的预备知识. 教师在教学中可以利用每章后习题、复习题统一安排组织习题课体系，章节后的练习题和精选问题有益于学生进一步开阔思路和拓展应用性问题的思考，有利于学生参与数学建模等活动，适于多层次教学目的的实现.

本书是各位参加编写的老师与责任编辑团队合作下的新模式教材，体现了在多元结构下微分和积分体系的调整，增加了部分内容的图解分析，既保证传统教学的基本内容和知识范围，又给予学生不同的视界来分析问题和理解数学，提高学生对数学问题的领悟素质和能力.

编　者

2013 年 7 月

第3版前言

本书结合高等院校非数学专业数学基础课程教学指导委员会对本科数学基础课程教学的基本要求编写，编写过程中注重强调数学思想方法教学，培养学生的数学应用能力．我们认真总结了前两版教材在使用过程中存在的问题，听取了各兄弟院校教师和学生使用教材的反馈意见，现将教材重新修订出版，希望进一步提高教材质量．

新版教材保持了原教材的特色，既方便自学，又适合一元到多元体系下不同专业课堂教学的多功能使用．在修订过程中，强调内容精简化，删除了部分超出基本要求的内容和例题；进一步核查并对教材中例题、练习题和复习题的解题方法进行了优化改进和细节纠错，选择替换了部分题目，希冀降低难度而做到由浅入深；继续保留了习题课程特点，以强调重点内容辅以典型例题训练，目标是循序渐进，更上一层楼．

编者谨此一并感谢在历次修订改版过程中许多教师和学生提出的宝贵建议，还有出版社责任编辑提供的细致服务和长期帮助．

编者

2017 年 6 月

目录

Contents

第 1 章　函数与向量

第 2 章　极限与连续

第 3 章　导数与微分

第4章 中值定理与导数的应用

第5章 定积分与不定积分

第6章 二重积分与曲线积分

第 7 章 微分方程

第 8 章 无穷级数

第 9 章 概率论基础

第1章 函数与向量

我们将从一维数轴的区间、二维平面的区域概念引入到三维的空间直角坐标系. 在一个具体的实例模式下,对实数范围的一元与多元函数做一体化的研究分析,从而在微积分知识框架中融会贯通一元和二元情形,继而在今后数学课程(如概率论和数理统计、线性代数)的学习中,更容易理解多元关系与高维情形.

§1.1 函数及其图形

我们考虑一些特殊的数集,如数轴上的区间、平面和空间上的区域概念,并且假定大家熟悉基本的集合语言和必要的逻辑符号(参见附录A).

一、区间与区域概念

实数系统 $\mathbf{R}$ 构成一维数轴,区间为其特殊的子集.

开区间、闭区间、半开半闭区间都可以用集合来表示.

例如,开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$,闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,还有半闭(半开)区间 $[a,b)$,$(a,b]$. 这四种区间称为有限区间,a,b 分别称为区间的左、右端点,$b-a$ 称为区间的长度.

无限区间有 $(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

下面介绍一个很重要的概念:

设 x_0 为实数,$\delta>0$,称集合 $\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的δ 邻域,记为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\},$$

其中 x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 这里 $U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

称集合 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的δ 去心邻域,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$.

二维平面 $\mathbf{R}^2$ 的（笛卡儿）直角坐标系是大家比较熟悉的，平面上的点 $M(x,y)$ 对应二元有序数组 (x,y)（图 1-1），而在极坐标系中对应于 (ρ,θ)（图 1-2）.

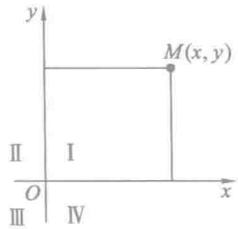

图 1-1

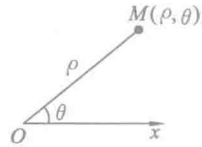

图 1-2

直角坐标系与极坐标系的互换关系如下：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta; \end{cases}$$

反过来有

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x>0, \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x}, & x<0. \end{cases}$$

对于平面，可以给出类似的邻域概念. 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，称 $U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$ 为 P_0 的 δ 邻域，$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$ 为 P_0 的 δ 去心邻域.

一个区域 D 的聚点是指这样一些点：在其任意去心邻域内都有属于 D 的点.

区域 D 的边界点是指这样一些点：在其任意去心邻域内既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点.

一个区域若不包含边界上任一点，则称之为开区域；若包含所有边界点，则称之为闭区域.

例如，图 1-3 所示，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是 xOy 平面上以原点为中心、单位（闭）圆 $x^2+y^2=1$ 为边界的闭区域；又如，图 1-4 所示，$D=\{(x,y)\mid x>|y|,x>0\}$ 是以 $x+y=0$，$x-y=0$ 为边界的开区域.

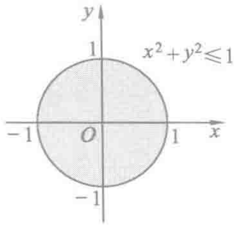

图 1-3

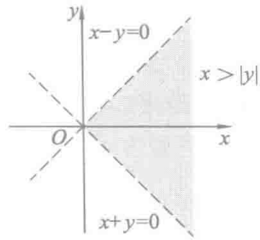

图 1-4

二、空间直角坐标系

三元有序数组(x,y,z)可以与 $\mathbf{R}^3$ 的元素一一对应,在几何上可建立空间直角坐标系如下:O 为原点,Ox,Oy,Oz 为两两垂直的坐标轴,xOy,yOz,zOx 为两两垂直的坐标面,把空间分割成为八个卦限(图 1-5).以 Ox 为横轴,Oy 为纵轴,Oz 为竖轴,对空间中一点 $M(x,y,z)$,x 为横坐标,y 为纵坐标,z 为竖坐标.

一般我们采用“右手”直角坐标系(图 1-6).

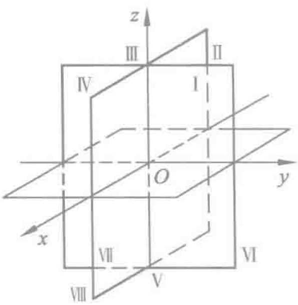

图 1-5

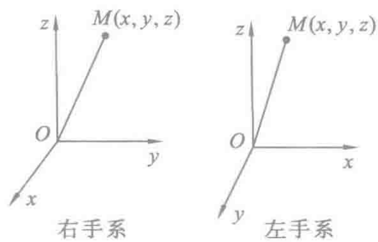

图 1-6

Ⅰ～Ⅷ为八个卦限,在各个卦限里点的坐标 x,y,z 的符号如下表所示:

坐标＼卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

位于坐标轴上的点的坐标有如下特点:x 轴上的点为$(x,0,0)$,y 轴上的点为$(0,y,0)$,z 轴上的点为$(0,0,z)$;

位于坐标平面上的点的坐标有如下特点：xOy 面上的点为$(x,y,0)$，zOx 面上的点为$(x,0,z)$上，yOz 面上的点为$(0,y,z)$.

空间两点间的距离 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间上的两点，则点 M_1 与点 M_2 的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

一些重要的概念，如点、邻域、去心邻域的概念可推广至三维空间，如下：

若 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3$，记 $U(P_0,\delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\}$ 为 P_0 的 δ 邻域，记 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$为 P_0 的 δ 去心邻域.

一个空间域 V 的边界点是在其任意的去心邻域内既有属于 V 的点，也有不属于 V 的点. 例如，$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$为单位球体，它以原点为中心、1 为半径、单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 为边界.

习惯上称一维数轴、二维平面与三维空间的点分别对应一元数、二元有序数组、三元有序数组. 因此，如果进一步考虑 n 元有序数组，也有抽象的 n 维空间来对应，只是不能用直观的方式来表示而已. 在微积分中主要讲授一元和二元情形，在线性代数中可以有多维的线性系统，但都可以此几何背景来作为理解概念的初步模型.

三、函数的概念

一般而言，函数研究的是变量之间的对应关系. 下面给出一元函数和多元函数的概念.

定义 1 设 D 是数集，f 是定义在 D 上的一个对应关系，若对 $\forall x\in D$，都有唯一的实数 $y\in\mathbf{R}$，按照关系 f 与 x 对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数，记为$y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即$D_f=D$；集合 $R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域. 点集$\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数 $y=f(x)$的图形.

这里先考虑数集为一元点集 D，可以得到一元函数的概念.

举几个常用的一元函数的例子：

(1) 常值函数 $y=c$.

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{c\}$，图形为一条平行于 x 轴的直线.

(2) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[0,+\infty)$.

(3) 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{-1,0,1\}$.

(4) 取整函数 $y=[x]$.

设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记为$[x]$.

其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为 $\mathbf{Z}$.

例如,$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[\pi]=3,[-1]=-1,[-3.95]=-4$.

(5) Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{0,1\}$.

定义 2 若 D 为二维点集($D\subset\mathbf{R}^2$)或三维点集($D\subset\mathbf{R}^3$),则称 D 到 $\mathbf{R}$ 上的对应关系 f 为定义在 D 上的二元或三元函数.

通常用 $z=f(x,y)$来表示二元函数的记号,x,y 称为自变量,z 称为因变量,定义域 D 为平面点集. 用 $u=f(x,y,z)$来表示三元函数的记号,x,y,z 称为自变量,u 称为因变量,定义域 D 为空间点集. 注意在这里自变量之间没有依赖关系.

在平面或空间中引入点和向量的概念后,多元函数可称为点函数或向量值函数.

例如,点 $P(x,y,z)\in D$,点函数 $u=f(P)$表示多元函数.

对有实际背景的函数,定义域根据变量的实际意义确定;对抽象地用解析式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得解析式有意义的点的集合,即函数的自然定义域. 下面的几个称为"用显式表达"的函数 $y=f(x)$,可以表出 D_f.

例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是闭区间$[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$,三元函数 $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$的定义域是空间内以原点为中心的单位球体(包括边界单位球面).

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$的定义域.

解 要使函数有意义,必须 $x\neq0$ 且 $x^2-4\geqslant0$,解不等式得$|x|\geqslant2$.

所以函数的定义域为 $D=\{x\mid |x|\geqslant2\}$或 $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

例 2 求二元函数 $z=\ln\left(1-\sqrt{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}}\right)$的定义域.

解　要使函数表达式有意义,必须$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1$,所以二元函数的定义域为平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\right\}$.

四、函数的其他形式

在一元函数的定义中,对每个 $x\in D$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数都是"单值"函数.但函数作为变量之间的一般关系,有时给出的形式是比较复杂的.

例如,设变量 x 和 y 之间的对应关系由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出.对每个 $x\in D$,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,我们习惯上说确定了一个"多值"函数.

有时只要附加一些条件,就可以将它化为单值的,这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支.

例如,在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中,分别附加"$y\geqslant 0$"或"$y\leqslant 0$"的条件,可得到两个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

有些函数可以由参数方程给出或由隐函数方程确定.

利用参数方程 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$ 同样可以讨论由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的变量 x 和 y 之间的关系,即考虑二元有序数组(x,y).其中每一分量都是定义在 $\varphi\in[0,2\pi]$的一元函数,其实它就是$[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ 的一个向量函数.

例如,$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=3\sin\theta\end{cases}(\theta\in[0,2\pi])$即为平面上椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

对于一元与多元情形,通常可用隐函数方程来确定变量 x 和 y 或 x,y,z 的关系.

例如,二元方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,$e^{x+y}=xy$ 表示 x 和 y 有依赖关系;三元方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示 x,y,z 有依赖关系.一般用 $F(x,y)=0$ 表示二元关系,$F(x,y,z)=0$ 表示三元关系.

显式表示的一元函数图形即为坐标平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$;

由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}(t\in[\alpha,\beta],\varphi(t),\psi(t)$为 t 的一元函数)确定的图形为平面点集$\{(x,y)\mid x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in[\alpha,\beta]\}$;

由隐函数方程确定的函数图形可表示为$\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$.

图 1-7 所示是隐函数方程 $y^2=x^2+\sin xy$ 确定的函数图形.

一般来说,二元之间(一元函数)的图形关系在二维平面上可以观察,三元之间(二元函数)的图形关系要在三维空间中观察.例如,$z=\sin x\cos y,x\in[0,2\pi]$,$y\in[0,2\pi]$的图形如图 1-8 所示.

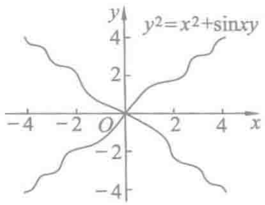

图 1-7

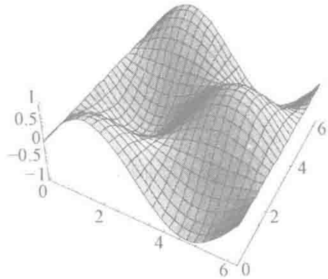

图 1-8

五、分段函数与分片函数

在自变量的不同变化范围中,对应关系用不同解析式来表示的函数,对一元函数,称为分段函数;对二元函数,称为分片函数.

例如,函数 $y=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$

这是一个分段函数,定义域为 $D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$.

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=2\sqrt{x}$;

当 $x>1$ 时,$y=1+x$.

对应有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $f(1)=2\sqrt{1}=2$, $f(3)=1+3=4$.

例 3 作出函数 $y=x^2-2|x|+1$ 的图形.

分析 去掉绝对值符号,得

$$y=\begin{cases}x^2+2x+1, & x\leqslant 0,\\ x^2-2x+1, & x>0.\end{cases}$$

它为分段函数(图 1-9).

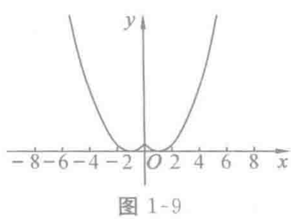

图 1-9

例 4 求二元函数

$$z=\begin{cases}0, & 1<x^2+y^2\leqslant 2,\\ \sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}$$