

吉林财经大学出版资助图书

非柱状区域上 一维波动方程的能控性

崔立芝 著



科学出版社

非柱状区域上一维波动方程的 能控性

崔立芝 著

吉林财经大学出版资助图书

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要研究了非柱状区域上一维波动方程的能控性. 这个方程刻画了一段有限长度的绳振动的位置. 作者分别对这个系统施加不同类型的控制, 得到了边界精确能控性和内部精确能控性. 全书共分 5 章. 第 1 章为引言. 第 2~4 章介绍了非柱状区域上一维波动方程的边界精确能控性. 第 5 章分析了非柱状区域上一维波动方程的内部精确能控性.

本书可作为应用数学专业、分布参数系统控制方向的研究生的教材, 亦可作为分布参数系统控制方向的博士生参考书.

图书在版编目(CIP)数据

非柱状区域上一维波动方程的能控性/崔立芝著. —北京: 科学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-03-052942-8

I. ①非… II. ①崔… III. ①一维流动-波动方程-可控性-研究
IV. ①O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 116096 号

责任编辑: 张中兴 梁 清/责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 伟/封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2017 年 6 月第一次印刷 印张: 6 3/4

字数: 137 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

作者简介



崔立芝，女，吉林省长春人，1978年出生，东北师范大学理学博士，吉林财经大学应用数学学院副教授。

崔立芝博士主要研究方向为分布参数系统控制，发表十余篇论文，其中 5 篇被 SCI 检索。2013—2014 年之间发表的论文成果荣获吉林省 2015 年自然科学成果二等奖。

崔立芝博士先后参加过国家自然科学基金项目、吉林省自然科学基金项目等多个项目，主持并完成吉林省教育厅“十二五”科学技术研究规划项目 1 项。参与编写多本微积分教材及辅导书。

前 言

本书主要研究非柱状区域上一维波动方程的能控性. 波动方程主要刻画弹性弦的振动、自然界中各种波的传播等物理过程. 本书主要讲述了具有移动边界区域上弹性弦的振动问题. 波的传播速度与移动边界的移动速度之间的关系, 直接影响到了波动方程的能控性.

本书讨论了在不同波速与不同移动边界速度的情形下系统的能控性, 并对具体的情形给出能控性时间的刻画. 本书问题的解决主要利用了 Hilbert 唯一性方法. 本书中讨论的问题是分布参数系统的能控性理论中的基本问题, 此问题的解决能够为活动边界区域上偏微分方程系统的能控性理论的研究提供一些方法的借鉴, 同时也可以为相关的实际工程领域提供一些数学理论基础.

本书的完成需要特别感谢我的博士生导师——东北师范大学高夯教授! 高老师是我学习生涯中前行的灯塔, 指引我每一步踏实前行! 我的每一点每一滴的进步都离不开高老师的鼓励和帮助. 当我遇到困难时, 高老师睿智的指导和启发使我一步一步克服困难. 高老师渊博的学识、敏锐的洞察力、严谨的治学态度和孜孜不倦的工作热情一直深深地影响和激励着我. 我时刻把高老师“诚能求和, 勤能补拙”的话语记在心头, 指导自己的言行. 这些都是我受用终生的宝贵财富.

本书是在吉林财经大学校级重点项目 (项目编号: 0800181601)、吉林财经大学 2016 年专著出版资助计划的资助和支持下完成的. 由于作者水平有限, 书中难免有考虑不周和疏漏之处, 诚请广大读者批评指正.

崔立芝

2017 年 3 月

目 录

前言

第 1 章	引言	1
第 2 章	移动边界的边界精确能控性	12
2.1	问题的提出及主要结果	12
2.2	系统部分 Dirichlet 边界精确能控性	14
2.2.1	柱状区域上变系数波动方程的能控性	14
2.2.2	对偶方程的两个重要不等式	15
2.2.3	能控性的证明	23
2.3	系统的 Dirichlet-Neumann 边界的边界精确能控性	26
2.3.1	柱状区域上变系数波动方程的能控性	26
2.3.2	对偶方程的两个重要不等式	27
2.3.3	能控性的证明	37
第 3 章	一类特殊波动方程的边界精确能控性	41
3.1	问题的提出及主要结果	41
3.2	系统的边界精确能控性	42
3.2.1	古典解的存在唯一性	42
3.2.2	边界精确能控性	49
第 4 章	固定边界的边界精确能控性	52
4.1	问题的提出及主要结果	52
4.2	系统的部分 Dirichlet 边界精确能控性	53
4.2.1	柱状区域上变系数波动方程的能控性	53
4.2.2	能控性的证明	55
4.2.3	正向不等式的证明	58
4.2.4	逐点估计的方法	60
4.2.5	乘子方法	66
4.2.6	一般的结果	71

第 5 章 内部精确能控性	80
5.1 问题的提出及主要结果	80
5.2 内部精确能控性	81
5.2.1 柱状区域上变系数波动方程的能控性	81
5.2.2 对偶系统的能观不等式	83
5.2.3 选取的乘子	84
5.2.4 能观不等式的证明	87
参考文献	94

第1章 引言

控制论是 20 世纪 40 年代由数学家 N. Wiener 所创立的, 现在已经成为技术学科的一门基础理论学科. 20 世纪 60 年代初, L. S. Pontryagin 的最大值原理、R. Bellman 的动态规划原理和 R. E. Kalman 的线性系统一般理论, 这三个里程碑性的工作标志着现代控制理论的诞生. 同时, 针对于有限维系统, R. E. Kalman 提出了能控性理论. 它与能观性理论和最佳调节器理论一起构成了现代控制理论的基本内容. 之后, 许多学者将这一理论推广到非线性系统、分布参数系统、随机系统的情形.

目前, 有限维系统的控制理论、分布参数系统的控制理论和随机系统控制理论构成了数学控制论, 现在已广泛应用于生物、医学、环境、经济管理、航天、航空等领域中, 极大地提高了社会劳动生产率, 改善了人们的劳动条件, 提高了人们的生活水平.

分布参数系统的能控性理论是分布参数系统控制理论的主要研究内容之一. 控制问题在科学技术及工程实践, 以及日常生活中处处可见. 分布参数系统的能控性理论已经成为现代数学的一个重要分支, 始于 20 世纪 60 年代 Y. V. Egorov, H. O. Fattorini 和 D. L. Russell 等人的工作. D. L. Russell 在 1978 年发表一篇综述性文章^[1], 给出了研究能控性问题的很多方法和工具, 如乘子方法、矩量方法、非调和傅里叶级数方法等. 这篇文献中一个重要思想是“由能稳推能控”. J. L. Lions 在 1988 年发表一篇综述性文章^[2]并出版了一本专著^[3], 成为该领域重要的参考文献. 他提出的 Hilbert 唯一性方法, 即对偶方法成为研究双曲方程能控性的经典办法, 将原系统的能控性问题转化为研究其对偶系统的能观性, 这是这篇文献的重要思想. 这一方法引起了很多学者极大的关注和兴趣, 促进了能控性理论的快速发展. 在 J. L. Lions 之后, 许多学者在该领域做出了很大的贡献, 国外学者如 V. Barbu, C. Bardos, J. M. Coron, O. Y. Imanuvilov, V. Komornik, G. Lebeau, D. Tataru, R. Triggiani, E. Zuazua 等, 国内学者如李大潜、刘康生、

汪更生、姚鹏飞、雍炯敏、张旭等.

控制按照不同的方式相应地有不同的分类. 如按控制施加在系统中的位置, 控制分为边界控制和内部控制. 如按等时区域与目标的关系, 控制分为精确能控性、近似能控性和零能控性.

20 世纪 80 年代后, 抛物型偏微分方程能控性的研究逐渐成为人们研究的焦点. 在许多学者的努力下取得了大量的成果 [4]–[23]. 抛物型偏微分方程模型已经应用到物理工程、生物化学及生物种群动力学等诸多领域, 发展到 21 世纪, 仅用经典的抛物方程模型去描述物理实际问题已经不够精确. 如当方程所描述的某一时刻的状态函数不仅只与这一时刻有关, 而且还与这个状态在过去的一段时间的情况有关, 也就是说状态本身带有一定的“记忆”效应. 这时, 经典的抛物型方程模型不再适用. 关于这类问题, 许多国外和国内的学者得到了一些很好的结果 [24]–[34].

偏微分方程的精确能控性是控制论中的一个经典问题, 尤其是波动方程的精确能控性问题一直是一个非常活跃的研究领域, 取得了大量的研究成果. 波动方程的精确能控性, 粗略地说, 对于给定的状态空间 X 和控制空间 U , 任意给定初值 $x_0 \in X$ 及目标 $x_1 \in X$, 都存在控制 $u \in U$ 和时间区间 $(0, T)$, 使得系统相应的解 x 在时间 T 时刻等于 x_1 , 即

$$x(T) = x_1.$$

具体地说, 仅仅利用边界就能实现的精确能控性, 称为边界精确能控性; 仅仅利用内部控制就能实现的精确能控性, 称为内部精确能控性.

关于柱状区域上常系数线性波动方程的能控性的研究始于 20 世纪 80 年代, 研究柱状区域上常系数线性波动方程的能控性理论大致有以下几种主要的方法: 延拓的方法 [1, 35], 即将初值与终值从有界域延拓到整个空间, 用 Cauchy 问题的解公式给出解的表达式, 将解限制在边界上求得边界控制. 对偶的方法 [2, 3, 36, 37], 即将原系统的能控性转化为研究其对偶系统的能观性, 一般的情况下利用乘子的方法证明对偶系统的能观不等式. 这种方法首先是 R. E. Kalman 在文献 [36] 中把有限维系统的能控性转化成其对偶系统的能观性, 然后 S. Dolecki 和 D. L. Russell 在文献 [37] 中把这种方法推广到无限维系统, 最后 J. L. Lions 在综述文

献 [3] 中把这种方法应用到波动方程系统, 得到波动方程系统的能控性等价于对偶方程的能观性结论, 并且给出了对偶方程具体的能观不等式, 然后 J. L. Lions 利用乘子方法给出了能观不等式非常简单的证明. 这之后很多学者把这种方法应用到其他的偏微分方程系统的能控性上. 几何光学条件的方法 [38], 即从区域出发的任意一条广义光线经边界反射后在时间区间 $(0, T)$ 内可以到达施加控制的边界. 这个条件是能够做到边界精确能控性的一个充分和几乎必要条件. 算子理论的方法 [39], 波动方程的边界能控性等价于一个向量场的条件.

J. L. Lions^{[2]-[3]} 在 1988 年提出了 Hilbert 唯一性方法, 更好地解决了一般条件下常系数线性波动方程的边界精确能控性和边界的邻域与整个区域的交集的内部精确能控性. 许多学者利用 Hilbert 唯一性方法解决了柱状区域上线性与半线性更一般的波动方程系统的精确能控性. 线性波动方程的情况, 如 V. Komornik^[40] 和 E. Zuazua^[41] 给出了利用 Hilbert 唯一性方法得到的精确能控性主要结果. 半线性波动方程的情况, 如 E. Zuazua 在文献 [41]–[45] 中结合 Hilbert 唯一性方法和 Schauder 不动点定理, 得到了一系列关于半线性波动方程在次线性和超线性条件下的精确能控性. E. Zuazua 在文献 [45] 中利用时间变量和空间变量的对称性得到了一维波动方程的能观性不等式, 但是这种方法仅适用于一维的情形. 其后, 张旭在其博士论文 [46] 和 [47] 中, 利用非线性对偶方法, 将高维半线性波动方程的精确能控性问题转化为它的线性化系统的对偶系统的能观性估计. 张旭利用“Carleman 不等式和通常的能量估计”得到了相应的能观性不等式. 而这种“Carleman 不等式和通常的能量估计”新的方法实质上就是整体的 Carleman 型估计, 不但适用于常系数波动方程能控性, 而且也适用于一些变系数波动方程能控性的情形.

关于柱状区域上变系数线性波动方程的能控性理论相对于常系数波动方程的能控性理论更加有难度, 一些原先成立的结论现在未必成立. 目前也有一些结果, 见文献 [48]–[65]. 现有的结果变系数的系统一般只依赖于空间变量, 与时间变量无关. 而适用于柱状区域上常系数线性波动方程的方法, 现在处理变系数波动方程的能控性问题的方法也不一定适用. 对于变系数情形, 姚鹏飞^[57] 提出的黎曼几何的方法, 即引入一种度量, 把变系数波动方程转化成黎曼流形上波动方程

系统的控制问题, 然后利用乘子方法得到精确能控性, 具体可参考文献 [58]–[60]. 张旭在其博士论文 [46] 中发展的整体 Carleman 型估计的方法, 可以更好地处理变系数波动方程的控制问题, 具体见文献 [61]–[63]. 另外, M. M. Potapov 在文献 [66]–[70] 提出的一种方法, 本质上与 Hilbert 唯一性方法是一致的, 但是能更简单地处理线性波动方程的控制问题.

据作者所知, 尽管柱状区域上波动方程的能控性已经有了大量的结果, 但是非柱状区域上仅仅对于常系数波动方程的能控性的结果也不是很多 [71]–[73]. 非柱状区域上或者移动边界的区域上的偏微分方程的能控性一直是数学工作者所关心的重要问题. 长期以来, 人们一直为之不懈努力, 但这一问题始终没有得到很好的解决. 在文献 [72] 中, M. M. Miranda 考虑了如下非柱状区域上高维常系数波动方程的边界精确能控性:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & (y, t) \in \widehat{Q}, \\ u = v, & (y, t) \in \widehat{\Sigma}, \\ u(0) = u^0, \quad u_t(0) = u^1, \quad y \in \Omega_0, \end{cases}$$

其中

$$\Omega_t = \{y \in \mathbb{R}^n; y = k(t)x, x \in \Omega\},$$

$$0 \leq t \leq T \leq \infty.$$

Γ_t 为 Ω_t 的边界, v 为控制.

$$\widehat{Q} = \bigcup_{0 < t < T} \Omega_t \times \{t\},$$

$$\widehat{\Sigma} = \bigcup_{0 < t < T} \Gamma_t \times \{t\}.$$

这篇文献既假设 $\widehat{Q}$ 是类时的, 又假设 $k(t)$ 满足

$$\int_0^\infty |k_t| dt < \infty \quad (*)$$

和其他的一些条件. 这篇文献证明的基本思想都是把非柱状区域上常系数波动方程的能控性利用一个同胚变换转化成柱状区域上变系数波动方程的能控性, 利用

Hilbert 唯一性方法得到了边界精确能控性. 在文献 [73] 中, 给出了非柱状区域上一维半线性波动方程的边界精确能控性, 这篇文献中非柱状区域的边界也同样必须满足 (*) 这个条件和其他的一些条件. 利用一个同胚变换转化成柱状区域上变系数波动方程, 利用 Hilbert 唯一性方法得到了能控性的结果. 在文献 [71] 中, C. Bardos 和 G. Chen 讨论了非柱状区域上高维常系数波动方程的能控性, 控制是施加在整个区域上. 这篇文献同样假设了非柱状区域是类时的, 然后直接在非柱状区域上讨论方程解的稳定性, 利用方程的稳定性结果得到了分布参数系统控制的结果.

本书讨论的是以下非柱状区域上一维常系数波动方程的边界精确能控性和内部精确能控性.

$$u_{tt} - u_{yy} = 0, \quad (y, t) \in \hat{Q}_T^k,$$

其中

$$\hat{Q}_T^k = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < \alpha_k(t), t \in (0, T)\},$$

$$\alpha_k(t) = 1 + kt,$$

$$0 < k \leq 1.$$

全书共分为三个部分, 共有 5 章. 贯穿全书, 我们设

$$Q = (0, 1) \times (0, T);$$

$$\alpha_k(t) = 1 + kt,$$

$$0 < k \leq 1;$$

$$\hat{Q}_T^k = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < \alpha_k(t), t \in (0, T)\};$$

$$\hat{Q}_1 = (m\alpha_k(t), n\alpha_k(t)) \times (0, T), \quad 0 < m < n < 1.$$

在第 2, 4, 5 章中, 参数 $k \in (0, 1)$; 在第 3 章中, 参数 $k = 1$.

在本书的第一部分即第 2 章和第 3 章中, 主要讨论非柱状区域上的波动方程在移动边界施加控制的边界精确能控性. 在第 2 章中, 我们将分别考虑如下非

柱状区域上的波动方程部分 Dirichlet 边界与 Dirichlet–Neumann 边界的精确能控性, 在移动端点施加控制.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \widehat{Q}_T^k, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\alpha_k(t), t) = v(t), & t \in (0, T), \\ u(y, 0) = u^0(y), \quad u_t(y, 0) = u^1(y), & y \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \widehat{Q}_T^k, \\ u(0, t) = 0, \quad u_y(\alpha_k(t), t) = v_1(t), & t \in (0, T), \\ u(y, 0) = u^0(y), \quad u_t(y, 0) = u^1(y), & y \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 v, v_1 为控制.

从某种程度上说, 非柱状区域上常系数波动方程的控制问题与柱状区域上的变系数波动方程的控制问题是等价的. 这也为我们解决非柱状区域上常系数波动方程的控制问题提供了一种方法. 由于 (1.1) 和 (1.2) 的能控性结果和证明方法类似, 我们下面仅具体给出系统 (1.1) 的能控性结果和证明思路. 受到文献 [72] 和 [73] 的启发, 为了得到 (1.1) 边界精确能控性, 我们把它转化成与之等价的柱状区域上变系数波动方程.

设

$$x = \frac{y}{\alpha_k(t)}, \quad w(x, t) = u(y, t) = u(\alpha_k(t)x, t).$$

当 $(y, t) \in \widehat{Q}_T^k$, 则 $(x, t) \in Q$. 从而系统 (1.1) 转化成下面柱状区域上变系数波动方程:

$$\begin{cases} w_{tt} - \left[\frac{\beta_k(x, t)}{\alpha_k(t)} w_x \right]_x + \frac{\gamma_k(x)}{\alpha_k(t)} w_{tx} = 0, & (x, t) \in Q, \\ w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = v(t), & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w^0, \quad w_t(x, 0) = w^1, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.3)$$

其中

$$\beta_k(x, t) = \frac{1 - k^2 x^2}{\alpha_k(t)}, \quad \gamma_k(x) = -2kx, \quad w^0 = u^0, \quad w^1 = u^1 + kx u_x^0. \quad (1.4)$$

易验证 $\widehat{Q}_T^k$ 不是类时的, 而且 $\alpha_k(t)$ 不满足 (*) 这个条件. 为了克服这个困难, 证明的主要的步骤是构造这个柱状区域上变系数波动方程 (1.3) 的对偶方程并且定义其加权能量函数, 并且得到了一个能量等式, 然后利用乘子的方法得到了其对偶系统的能观性不等式, 从而得到柱状区域上变系数波动方程的能控性. 主要结果如下.

定理 1.1 设

$$T_k^* = \frac{e^{\frac{2k(1+k)}{1-k}} - 1}{k},$$

$$k \in (0, 1).$$

当 $T > T_k^*$, (1.1) 在 T 时刻达到边界精确能控.

注意, 我们容易验证

$$T^0 \triangleq \lim_{k \rightarrow 0} T_k^* = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{2k(1+k)}{1-k}} - 1}{k} = 2.$$

我们知道在文献 [3] 中, 当 $T > T^0$ 时, 柱状区域上常系数波动方程能达到边界精确零能控, 但是我们这里不能证明 T_k^* 是最小能控性时间. 但我们发现

$$\lim_{k \rightarrow 1} T_k^* = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{2k(1+k)}{1-k}} - 1}{k} = \infty,$$

从而我们推测 $k = 1$ 时, (1.1) 是不能达到精确能控性的. 接下来, 在第 3 章中我们考虑了一种特殊的情形波方程的能控性. 当 $k = 1$ 时, 即在非柱状区域 $\widehat{Q}_T^1$ 上如下的常系数波动方程是不能达到边界精确能控性的, 我们给出了能达到边界精确能控性的目标所满足的充要条件:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \widehat{Q}_T^1, \\ u(0, t) = 0, \ u(t+1, t) = f(t), \quad t \in (0, T), \\ u(y, 0) = u^0, \ u_t(y, 0) = u^1, \quad y \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.5)$$

其中

$$\widehat{Q}_T^1 = \{(y, t) \in \mathbb{R}^2; \ 0 < y < t+1, \ t \in (0, T)\},$$

$$(u^0, u^1) \in C^2([0, 1]) \times C^1([0, 1])$$

且满足

$$\begin{aligned} u^0(0) = u^1(0) = u_{yy}^0(0) &= 0, \\ f &\in C^2([0, T]). \end{aligned}$$

我们得到的主要结果如下.

定理 1.2 设 $T > 1$. 对于初值

$$(u^0, u^1) \in C^2[0, 1] \times C^1[0, 1]$$

且满足

$$u^0(0) = u^1(0) = u_{yy}^0(0) = 0,$$

目标

$$(u_d^0, u_d^1) \in C^2([0, 1]) \times C^1([0, 1]),$$

在 T 时刻边界精确能控当且仅当满足下面条件:

$$\left\{ \begin{aligned} &u_d^0(0) = u_d^1(0) = u_{d,yy}^0(0) = 0, \\ &u_{d,y}^0(y) - u_d^1(y) = u_y^0(T-y) + u^1(T-y), \quad y \in [T-1, T], \\ &u_{d,y}^0(y) - u_d^1(y) = u_y^0(y-T) - u^1(y-T), \quad y \in [T, T+1], \\ &u_{d,y}^1(T-1) - u_{d,yy}^0(T-1) = u_{yy}^0(1) + u_y^1(1). \end{aligned} \right.$$

证明的主要思路是通过构造一个定义在倒三角形区域上的波动方程, 我们知道这个方程的古典解的表达式, 把 $\widehat{Q}_T^1$ 延拓到这个倒三角形区域上, 从而得到系统 (1.5) 的古典解的表达式, 然后利用解的表达式得到能够达到精确能控的目标所满足的充要条件.

在本文第二部分第 4 章中, 我们将讨论如下非柱状区域上的波动方程的部分 Dirichlet 边界的精确能控性, 控制施加在固定端点.

$$\left\{ \begin{aligned} &u_{tt} - u_{yy} = 0, \quad (y, t) \in \widehat{Q}_T^k, \\ &u(0, t) = v_2(t), \quad u(\alpha_k(t), t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ &u(y, 0) = u^0, \quad u_t(y, 0) = u^1, \quad y \in (0, 1), \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

其中 v_2 是控制函数.

我们知道, 对于柱状区域上一维常系数波动方程的边界精确能控性, 控制施加在左或者右端点, 都能做到边界精确能控性. 但是对于我们研究的这个系统, 控制施加在移动端点的情况与控制施加在固定端点的情况结论有些不同. 我们利用 Hilbert 唯一性方法和逐点能量估计的方法得到下面的定理.

定理 1.3 设

$$k \in \left(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right).$$

当 $T > T_*^1$, (4.1) 在 T 时刻达到边界精确能控.

利用 Hilbert 唯一性方法和乘子的方法得到了下面结论.

定理 1.4 设

$$k \in \left(0, 1 - \frac{2}{1+e^2}\right).$$

当 $T > T_*^2$, (4.1) 在 T 时刻达到边界精确能控.

定理 1.5 设

$$k \in (0, 1).$$

当 $T > T_*^3$, (4.1) 在 T 时刻达到边界精确能控.

注意, T_*^1, T_*^2, T_*^3 在证明中给出, 易验证

$$T^1 \triangleq \lim_{k \rightarrow 0} T_*^1 = \lim_{k \rightarrow 0} T_*^2 = \lim_{k \rightarrow 0} T_*^3 = 2.$$

我们知道在文献 [45] 中, 当 $T > T^1$ 时, 柱状区域上常系数波动方程在这种类型的边界控制下都能达到精确边界零能控, 但是我们不能证明 T_*^1, T_*^2 和 T_*^3 是最小能控性时间.

在本书第 5 章中, 我们致力于下面非柱状区域上常系数波动方程的内部精确能控性:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{yy} = \hat{B}v_3, & (y, t) \in \hat{Q}_T^k, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\alpha_k(t), t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(y, 0) = u^0(y), \quad u_t(y, 0) = u^1(y), & y \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.7)$$

设

$$\widehat{Q}_1 = (m\alpha_k(t), n\alpha_k(t)) \times (0, T),$$

$$\widehat{Q}_2 = (m'\alpha_k(t), n'\alpha_k(t)) \times (0, T), \quad 0 < m < m' < n' < n < 1.$$

其中 $v_3 \in [H^1(\widehat{Q}_1)]'$ 为控制函数. $\widehat{B} \in C_0^\infty(\widehat{Q}_T^k)$, 且

$$\begin{cases} \widehat{B}(y, t) = 0, & (y, t) \in \widehat{Q}_T^k \setminus \widehat{Q}_1, \\ \widehat{B}(y, t) = 1, & (y, t) \in \widehat{Q}_2, \\ \widehat{B}(y, t) \in (0, 1), & (y, t) \in \widehat{Q}_1 \setminus \widehat{Q}_2. \end{cases}$$

相比于非柱状区域上常系数波动方程的边界精确能控性, 内部精确能控性更加困难. 与文献 [71] 相比, 我们现在讨论的区域不是类时的. 我们知道非柱状区域上常系数波动方程的控制问题在某种程度上来说是与柱状区域上的变系数的波动方程的控制问题是等价的. M. M. Potapov 与 L. F. Ho 分别在文献 [69] 和 [74] 得到了柱状区域上的一维变系数波动方程的内部精确能控性. 但是这两篇文献中的方程中系数只是依赖于空间变量, 而我们研究的系统 (1.7) 转化到柱状区域后, 系数既依赖于空间变量又依赖于时间变量. 我们受到文献 [69] 的启发, 解决了非柱状区域上常系数波动方程的内部精确能控性.

我们首先设

$$x = \frac{y}{\alpha_k(t)}, \quad w(x, t) = u(y, t) = u(\alpha_k(t)x, t).$$

当 $(y, t) \in \widehat{Q}_T^k$, 则 $(x, t) \in Q$.

记

$$Q_1 = (m, n) \times (0, T), \quad Q_2 = (m', n') \times (0, T).$$

于是把系统 (1.7) 化为柱状区域上的变系数波方程系统

$$\begin{cases} w_{tt} - \left[\frac{\beta_k(x, t)}{\alpha_k(t)} w_x \right]_x + \frac{\gamma_k(x)}{\alpha_k(t)} w_{tx} = B\overline{v}_3(x, t), & (x, t) \in Q, \\ w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = w^0, \quad w_t(x, 0) = w^1, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.8)$$