普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列

工程数学
线性代数
（第2版）

纪德云　关　凯　主　编
罗　蕾　马　鸿　副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社

普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列

工程数学 线性代数

(第2版)

纪德云 关 凯 主 编

罗 蕾 马 鸿 副主编

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

“线性代数”课程是理工科学生的公共课程。本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、向量、矩阵的相似及二次型等。编写中强调实用性和通用性，力求概念准确，内容易懂。在例题的选取上注重典型性、代表性和实用性。

本书可作为各高等院校工、农、医等专业本、专科学生的学习教材，也可作为研究生、教师和科技人员的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

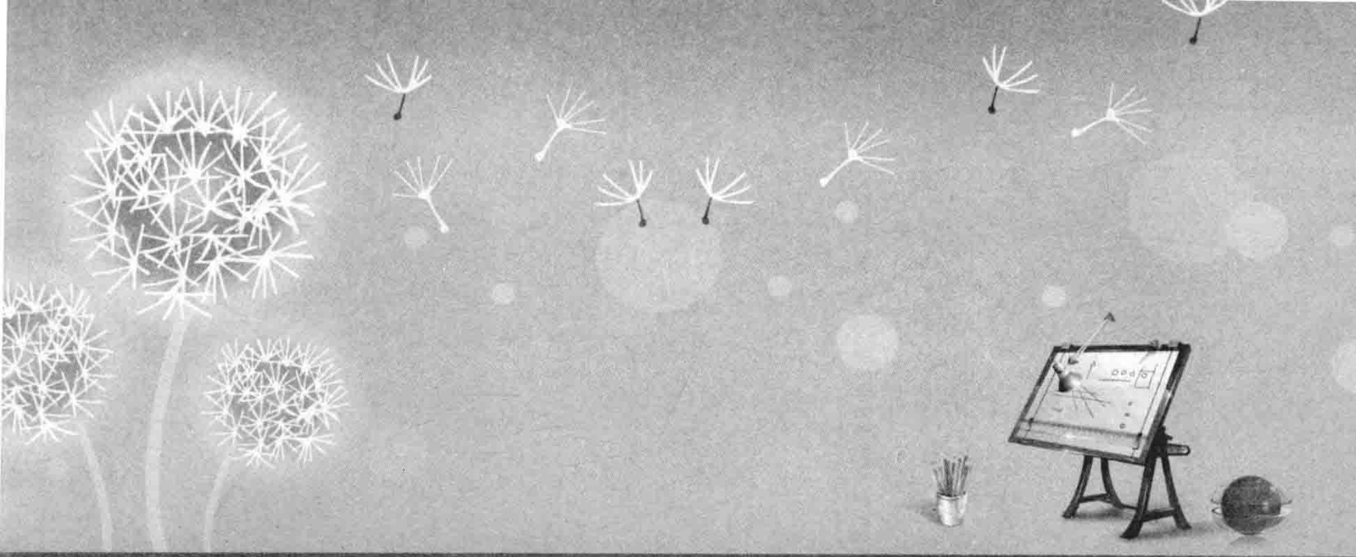
工程数学 线性代数/纪德云，关凯主编. —2版. —北京：清华大学出版社，2017
(普通高校“十三五”实用规划教材——公共基础系列)
ISBN 978-7-302-47904-8

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①纪… ②关… Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材 ②线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①TB11 ②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 193447 号

责任编辑：秦 甲
封面设计：刘孝琼
责任校对：吴春华
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮 编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 装 者：北京密云胶印厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm　　印 张：9　　字 数：215 千字
版 次：2005 年 4 月第 1 版 2017 年 9 月第 2 版　　印 次：2017 年 9 月第 1 次印刷
印 数：1～2500
定 价：29.00 元

产品编号：073587-01



前　言

随着科学技术的不断发展以及交叉学科的进一步融合，线性代数涉及的许多内容，如行列式、矩阵、线性方程组的最优解、特征值与特征向量及二次型等，在理、工、农、医、经济、管理等领域的理论研究与实际应用中都发挥着重要的作用。

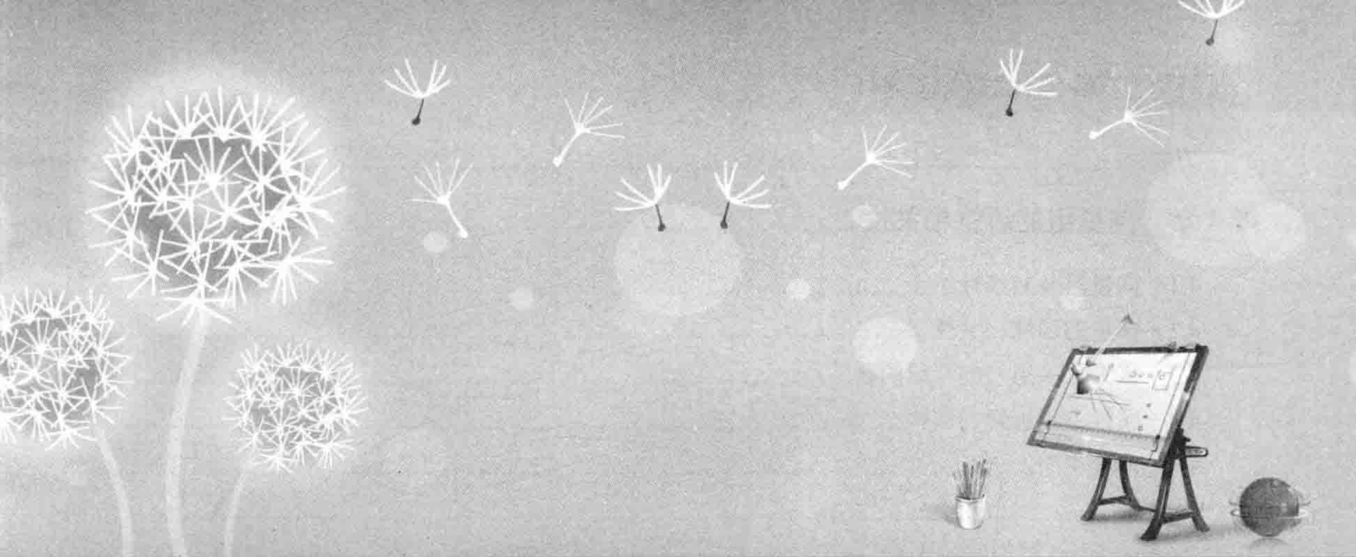
第 2 版是对 2015 年 4 月第 1 版的修订。修正了第 1 版的一些错误与不妥之处，基本保持了第 1 版的风格与体系。“线性代数”课程是普通高校各专业大学生必修的一门数学基础理论课程，本课程不仅可为学生进一步学习提供必要的数学基础，而且能使学生的抽象思维能力得到进一步训练，同时它还可为后续专业课程的学习奠定理论基础。通过学习本课程，学生能够不断增强创新意识，全面提高学生运用数学方法分析问题、解决问题的能力。

本书根据教育部《高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，总结作者多年讲授线性代数课程的实践经验编写而成。编写中本着重视概念、侧重计算、强调应用的指导思想，力求做到结构严谨、概念准确、由浅入深、简洁明白、通俗易懂、适于自学。

本书在第 1 版的基础上进行了修改，参加第 2 版修订工作的有，关凯老师(执笔第 1 章、第 4 章)，罗蕾老师(执笔第 2 章、第 3 章)，马鸿老师(执笔第 5 章)，纪德云老师(执笔第 6 章)，最后由纪德云老师修改定稿。在修订过程中，承蒙马毅老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免还有不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者



目　录

第1章 行 列 式

最初的行列式理论是人们从求解线性方程组的过程中建立和发展起来的，它在线性代数以及其他数学分支上都有着广泛的应用。本章我们主要讨论以下几个问题。

(1) 行列式的定义；

(2) 行列式的基本性质及计算方法；

(3) 利用行列式求解线性方程组(克莱姆法则)。

1.1 二阶与三阶行列式

设有二元线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

使用加减消元法求解该方程组未知数 x_1,x_2 的值，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得

$$\left.\begin{aligned} x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

这就是求解二元线性方程组的一般公式。但这个公式很繁杂，不容易记忆。为此我们引入新的运算符号来表示式(1.2)这个结果，这就是行列式的起源。我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为二阶行列式。它含有两行两列。横排称为行，竖排称为列。

数 a_{ij} (i=1,2；j=1,2)为二阶行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示这个元素所在的行数，称为行标；第二个下标 j 表示这个元素所在的列数，称为列标。

从上述定义得知，二阶行列式是这样两项的代数和：$a_{11}a_{22}$ 是从左上角到右下角的对角线(又叫行列式的主对角线)上两个元素的乘积，取正号；$a_{12}a_{21}$ 是从右上角到左下角的对

角线(又叫次对角线)上两个元素的乘积，取负号。可参考图 1.1 来记忆。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

图 1.1

根据二阶行列式的定义，式(1.2)中的两个分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时，则方程组(1.1)的解的表达式(1.2)可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

式(1.3)中分母的行列式 D 是由方程组(1.1)中未知数的系数按其原有的相对位置排成的，称 D 为系数行列式；x_1 的分子行列式 D_1 可以看成是把系数行列式 D 的第 1 列换成方程组(1.1)中的常数项得到的，而 x_2 的分子行列式 D_2 则可以看成是把系数行列式 D 的第 2 列换成式(1.1)中的常数项得到的。

例 1.1　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + \ \ x_2 = 7 \end{cases}$$

解　由于

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 2\times3 = -5 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 4\times1 - 2\times7 = -10$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\times7 - 4\times3 = -5$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

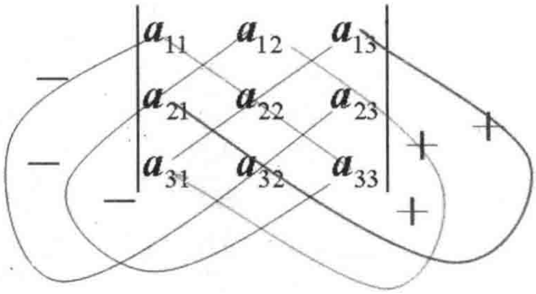
对于三元一次线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

可引入三阶行列式的概念。我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.5}$$

为三阶行列式。它有三行三列，共六项的代数和。这六项的和也可用对角线法则来记忆：从左上角到右下角三个元素的乘积取正号，从右上角到左下角三个元素的乘积取负号，如图 1.2 所示。



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

图 1.2

对于三元一次线性方程组(1.4)的求解，也有类似二元线性方程组的解的表达式(1.3)的结论。

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.4)有解，且解可简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

例 1.2　计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

解　由三阶行列式的定义得

$$\begin{aligned} D&=1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-1\times3\times2 \\ &=1+8+27-6-6-6 \\ &=18 \end{aligned}$$

例 1.3　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + \ x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 10 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -81$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -108, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -135$$

由式(1.6)得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{-81}{-27} = 3 \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-108}{-27} = 4 \\ x_3 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-135}{-27} = 5 \end{cases}$$

例 1.4　a,b 满足什么条件时有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{其中 } a,b \text{ 均为实数})$$

解

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$$

由题知 $a^2 + b^2 = 0$，所以 a、b 须同时等于 0。

因此，当 $a = 0$ 且 $b = 0$ 时，给定的行列式等于 0。

1.2　排　　列

为了研究更为一般的线性方程组的求解公式，我们需要引入 n 阶行列式的概念，为此先介绍排列的一些基本知识。

定义 1.1　由数码 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶**排列**。

例如，12345 是一个五阶排列，32415 也是一个五阶排列，而 312 是一个三阶排列。

排列是有序数组，同一组数码的排列顺序不同就会得到不同的排列，例如由数码 1,2,3 组成的所有三阶排列为 123、132、213、231、312、321，共有 3!=6 个。

我们把数字由小到大的 n 阶排列 $1234\cdots n$ 称为**自然序排列**。

定义 1.2　在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面 $(i_s < i_t)$，则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**，一个 n 阶排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序**

数，记为$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$。

例如，在三阶排列 312 中，3 与 1、3 与 2 各构成一个逆序数，所以，排列 312 的逆序数为 2。同理，321 的逆序数为 3。

显然，自然序排列的逆序数为 0。

定义 1.3 如果排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数是奇数，则称此排列为**奇排列**；逆序数是偶数的排列则称为**偶排列**。

例如，排列 312 是偶排列，排列 321 是奇排列，自然序排列 $123\cdots n$ 是偶排列。

定义 1.4 在一个n阶排列$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$中，如果其中某两个数$i_s$与$i_t$对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的$n$阶排列$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换称为一个对换，记作$(i_s,i_t)$。

例如，排列 312 是偶排列，将排列中的 1 和 2 对换后，得到新的排列 321，由前得知，321 是奇排列；反之亦然。

一般来说，有以下定理。

定理 1.1 任一排列经过一次对换后，其奇偶性改变。

证明 略

定理 1.2 任一n阶排列$i_1i_2\cdots i_n$都可通过一系列对换与n阶自然序排列 $123\cdots n$ 互变，且所作对换的次数与这个n阶排列有相同的奇偶性。

证明 略

1.3 n阶行列式

为了引入n阶行列式的定义。我们来观察 1.1 节中二阶、三阶行列式定义的特征。

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

通过仔细观察，从中可以发现以下规律。

(1) 在二阶行列式的代数和中，项的个数是 2!；在三阶行列式的代数和中，项的个数是 3!。

(2) 二阶行列式中的每一项都是取自不同的行和不同的列的两个元素的乘积，三阶行列式中的每一项都是取自不同的行和不同的列的三个元素的乘积。

(3) 每一项的符号有如下规律：当这一项中元素的行标是按自然序排列时，如果元素的列标为偶排列，则取正号；为奇排列，则取负号。

由二阶、三阶行列式定义进行推广，n阶行列式的定义如下。

定义 1.5 由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行n列，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式。它是 $n!$ 项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积，各项的符号有如下规律：每一项中各元素的行标排成自然序排列，如果列标的排列为偶排列，则取正号；为奇排列，则取负号。于是得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有的 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和。式(1.7)称为 n 阶行列式按行标自然顺序排列的展开式，其中 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为这个排列的逆序数，$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为**行列式的一般项**。

当 $n = 2,3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与前面 1.1 节中用对角线法则定义的是一致的。

注　当 $n=1$ 时，一阶行列式为 $|a_{11}| = a_{11}$，此时不要与绝对值符号混淆。

例 1.5　在五阶行列式中，$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 这一项应取什么符号？

解　这一项各元素的行标是按自然顺序排列的，而列标的排列为 23514。这个排列的逆序数为 4，故这一项应取正号。

例 1.6　写出四阶行列式中，带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解　包含因子 $a_{11}a_{23}$ 项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$。

按定义，j_3 可取 2 或 4，j_4 可取 4 或 2，因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 或 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，但因 1324 这个排列的逆序数 1 为奇数，1342 这个排列的逆序数 2 为偶数，所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。

例 1.7　计算 $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}$

解　这是一个四阶行列式，按行列式的定义，它应有 4!=24 项。但只有 $adeh$、$adfg$、$bceh$、$bcfg$ 不为 0。与上述四项相对应的列标的四阶排列分别为 1234、1243、2134，2143，它们的逆序数分别为 0、1、1、2，所以第一项和第四项应取正号，第二项和第三项应取负号，即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix} = adeh - adfg - bceh + bcfg$$

例 1.8　计算上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中，$a_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$。

解　由n阶行列式的定义，D应有$n!$项代数和，其一般项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

但由于D中有许多元素为0，因此只需求出上述一般项中不为0的项即可。

在D中，第n行元素除a_{nn}外，其余均为0，所以$j_n=n$；在第$n-1$行中，去除与a_{nn}同行及同列的元素后，不为0的元素只有$a_{n-1,n-1}$。同理逐步上推，可以看出，在展开式中只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$一项不等于0。而这项的列标所组成的排列的逆序数是0，所以取正号。因此，由行列式的定义可推出

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积。

例 1.9　计算 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$。

解　方法同例1.8，D中只有一项$a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$不等于0，且列标构成排列的逆序数为

$$\tau=1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故$D=(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$。

同理可推得以下结论：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

由 n 阶行列式的定义可知，行列式中的每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积，所以如果行列式某一行(列)的元素全为0，则该行列式必等于0。

数的乘法是满足交换律的，所以 n 阶行列式的项也可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.8}$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$、$j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列，它的符号由下面的定理来决定。

定理 1.3 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{1.9}$$

证明 若根据 n 阶行列式的定义来决定式(1.8)的符号，就要把这 n 个元素重新排列，使得它们的行标成自然顺序，也就是排成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.10}$$

于是它的符号就是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$。

现在来证明式(1.7)与式(1.9)是一致的。我们知道从式(1.8)变到式(1.10)可经过一系列元素的对换来实现。每作一次对换，元素的行标与列标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$，$j_1j_2\cdots j_n$ 就同时作一次对换，因而它的逆序数之和 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不改变。

由此，n 阶行列式的定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

1.4 行列式的性质

当行列式的阶数较高时，根据定义手工计算 n 阶行列式的值是十分烦琐和困难的。要研究行列式的性质，就要将复杂的行列式转化为较简单的行列式(如上三角形行列式等)来计算，同时行列式的性质在理论上也相当重要。

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，记作 D^{T}，即

若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**。

反之，行列式 D 也是行列式 D^{T} 的转置行列式，即行列式 D 与行列式 D^{T} 互为转置行列式。

性质 1.1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 的值相等。

证明 行列式 D 中的元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 在 D^{T} 中位于第 j 行第 i 列上，也就是说它的行标是 j，列标是 i，因此，将行列式 D^{T} 按列自然序排列展开，得

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这正是行列式 D 按行自然序排列的展开式，所以 $D=D^{\mathrm{T}}$。

性质 1.1 表明，行列式中行、列的地位是对称的，即对于“行”成立的性质，对“列”也同样成立；反之亦然。

性质 1.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号。

证明 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

将第 i 行与第 s 行 $(1\leqslant i<s\leqslant n)$ 互换后，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{行}) \\ \\ (s\text{行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

显然，乘积 $a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$ 在行列式 D 和 D_1 中，都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积。根据 1.3 节定理 1.3，对于行列式 D，这一项的符号由 $(-1)^{\tau(1\cdots i\cdots s\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}$ 决定；而对于行列式 D_1，这一项的符号由 $(-1)^{\tau(1\cdots s\cdots i\cdots n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_i\cdots j_n)}$ 决定。由于排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 与排列 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反，所以 D_1 中的每一项都是 D 中的对应项的相反数，即 $D=-D_1$。

注　互换 i、j 两行(列)的运算记为 $r_i\leftrightarrow r_j$ $(c_i\leftrightarrow c_j)$。

例 1.10　计算 $D=\begin{vmatrix}0&1&0&3\\0&2&2&1\\3&2&1&4\\0&0&0&1\end{vmatrix}$。

解　将第 2、3 列互换，得

$$D=(-1)\begin{vmatrix}0&0&1&3\\0&2&2&1\\3&1&2&4\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

再将第 1、3 行互换，得

$$D=(-1)^2\begin{vmatrix}3&1&2&4\\0&2&2&1\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=6$$

推论　若行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值等于 0。

性质 1.3　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

证明　由行列式的定义有

$$\begin{aligned}\text{左端}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\&=\text{右端}\end{aligned}$$

此性质也可表述为：用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素，等于用数 k 乘此行列式。

注　(1) 从第 i 行(列)提取公因子 k 的运算记为 $r_i\times\frac{1}{k}\left(c_i\times\frac{1}{k}\right)$。

(2) 提取公因子时不需要行列式中所有元素都有公因子，只要行列式某一行(列)中的所有元素有公因子，就可以将其提取到行列式符号的外面。

推论　如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例，则此行列式的值等于 0。

例 1.11 计算 $D=\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$。

解

$$D=\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=adf\begin{vmatrix} b & c & e \\ b & c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}=0$$

性质 1.4 如果行列式的某一行(列)的各元素都是两个数的和，则此行列式等于两个相应的行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明

$$\begin{aligned}
\text{左端}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\
&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\\
&=\text{右端}
\end{aligned}$$

性质 1.5 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal[\text{加到第}s\text{行}]{\text{第}i\text{行}\times k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{s1} & ka_{i2}+a_{s2} & \cdots & ka_{in}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 由性质 1.4，有