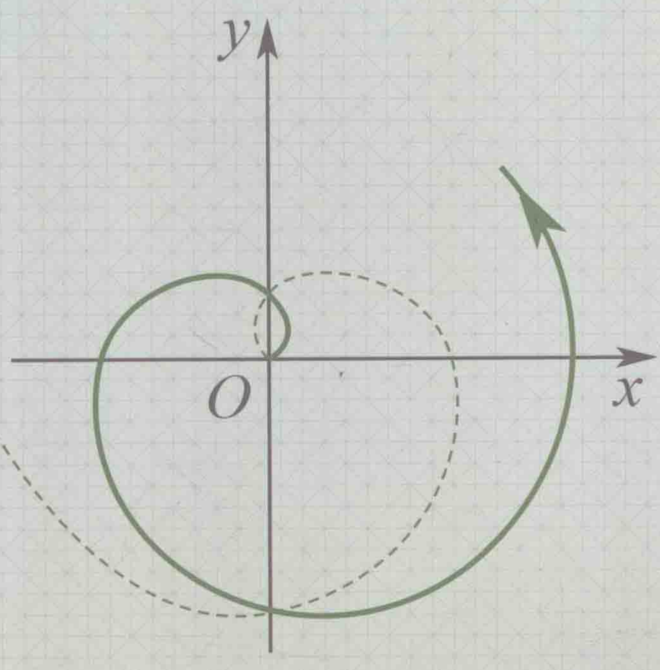
普通高等教育“十三五”规划教材

Gaodeng Shuxue

高等数学

第3版 下册

主　编　张卓奎　王金金
主　审　李尚志



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

高等数学（下）

第3版

主　编　张卓奎　王金金

副主编　任春丽　陈慧婵

　　　　李菊娥　李广民

主　审　李尚志

"互联网+"立体化教材

广益教育

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是“互联网＋”视角下创新型立体化教材，借助于APP平台提供微课、交互动画、释疑解难等助学、助教数字资源，从而更好地为教师与学生服务.本书内容上是作者近年来在建设“高等数学”精品课程的教学实践中，按照对课程体系、教学内容进行深入研究和改革的精神，根据《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合我国中学教育课程改革的实际情况，为适应我国各类高等学校“高等数学”课程的教学而编写的.

内容上以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及分析和解决应用问题能力为主线，重要概念均通过实际背景引出，并以其几何意义和物理意义的对比再现其本质内涵.定理、性质的原理在运用中以朴素的语言体现其逻辑性、严谨性，展现了从现象到本质的过程.

全书分上、下两册出版，下册内容包括：第7章，多元函数微分及其应用；第8章，重积分；第9章，曲线积分和曲面积分；第10章，无穷级数；第11章，微分方程.

本书通俗易懂，例题搭配合理，便于学生理解和掌握.本书可作为各类普通高等学校理工科“高等数学”课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/张卓奎，王金金主编.—3版.--北京：北京邮电大学出版社，2017.6
ISBN 978-7-5635-5052-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第066556号

书　　名	高等数学(第3版·下册)
主　　编	张卓奎　王金金
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www3.buptpress.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	18.5
字　　数	474千字
版　　次	2017年6月第3版　2017年6月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5052-4　　定价：39.00元

“广益教育”APP 操作说明

本书为“互联网＋”创新型立体化教材，配有助学助教平台——“广益教育”APP. 使用前，请按照下列步骤安装操作.

步骤一，先使用智能手机扫描本书封面图标中的二维码（见下图），下载安装免费的“广益教育”APP. 提示：下载界面会自动识别安卓或苹果手机.

步骤二，安装成功之后，点击“广益教育”APP 图标进入使用界面.

步骤三，首次使用 APP 需注册. 注册时，如果您是教师，请提交相关资料进行审核，审核通过即可获得教师身份的相关功能.

步骤四，注册成功后，请按照 APP 软件提示或宣传视频进行操作. 提示：对教材中带有标志的图形图像，或二维码，用 APP 扫描功能直接扫描，即可打开相关内容.

关于数字资源说明如下：

1. 微课：对教材中的重点、难点，从通俗易懂的角度进行诠释性补充讲解，有利于学生的自我学习和巩固学习.

2. 交互动画：从三维几何的角度，通过立体化、动画演示、交互体验来展现数学的本质，把几何图形的诠释作用极大化.

3. 释疑解难：对常见的疑惑，思维误区，难以理解的内容，进行答疑式解答，举例分析，释放学生的困惑，让学生少走弯路.

4. 本章提要：对本章重要概念、性质、方法进行总结，便于学生对本章知识进行及时巩固学习，也便于学生期末或考研复习.

5. 参考答案及附录：把每章的参考答案放在 APP 里，便于学生练习时随时检验；附录里的积分表，可以帮助学生随时随地查找积分公式而不需翻看教材，减轻了学生的负担.

6. 数学家小传：了解数学巨匠的主要成就，体会微积分的创立过程，感悟数学大家的工匠精神.

7. 数学趣闻：了解数学的趣味，数学美，感悟数学之作用.

所有资源可以直接扫码使用，即扫即得；也可以在APP里列表式阅读. 在使用过程中，如有疑问，请使用下列联系方式与我们沟通！

手机：13811568712
QQ：2181743958
电子邮箱：2181743958@qq.com

第3版前言

本书第3版是“互联网+”视角下的创新型立体化教材，借助于APP平台提供微课、交互动画、释疑解难等助学、助教数字资源，并配有教材题库和综合题库，从而更有助于“高等数学”的教与学.

本书是根据我们近几年教学改革实践，按照教育部引导部分本科院校向应用技术类型院校转型发展的精神，结合使用本书的广大教师提出的改进意见进行全面修编而成的.

内容上，我们保留了原教材的系统和风格，仍保持了结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂，例题安排合理，适合学生自学等特点，使新版教材成为既适合应用技术类型院校教学需要、符合教学改革要求，同时又继承传统优点的“高等数学”教材.

考虑到应用技术类型高等院校“高等数学”课程的教学要求，在修编时，除对原教材部分例题作了个别调整外，主要是增加了选学内容，用“*”号表示，这些内容的取舍，不影响后续教学的系统性和连续性，这对满足不同学时和不同要求的教学安排更具有灵活性. 对原教材存在的个别问题，也作了修编.

另外，我们根据任课教师的意见，将原教材中各章难度较大的综合习题改编为综合例题选解，选取了部分有代表性的综合题和考研题并给出解答，使准备考研的学生在本科学习阶段就能了解考研要求，通过自学提前进入角色，激发学习兴趣，打好数学基础.

本书修订过程中，西安电子科技大学数学与统计学院的广大教师及使用本教材的各高等院校教师提出了许多宝贵意见和建议，我们在此表示诚挚的谢意.

本书的修订工作由王金金、李广民、张卓奎、任春丽、陈慧婵、李菊娥共同完成. 北京航空航天大学李尚志教授认真审阅了本书，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢！书中存在的问题与不妥之处，欢迎广大专家、同行和读者批评指正.

编　者

2017年3月于西安

第1版前言

高等数学是一门经典的学科，但随着社会的发展，它也是一门与时俱进的学科．它的发展反映了社会发展的需要．随着我国中学新课标的实施，高等数学中的基础知识开始普及化，由此对高等数学教学内容改革也提出了新的要求．为了适应这一新的要求，结合我国中学教育课程改革的实际情况，根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于"工科类本科数学基础课程教学基本要求"，在作者近年来建设"高等数学"精品课程的教学实践基础上编写了本书．

在编写过程中，特别注意了与中学数学教学的衔接，对中学数学已讲授过的内容（如集合、函数，向量的概念、坐标、数量积等），在教材中有些只给出结论，有些可以不讲授；对中学数学中没有讲授的极坐标，在定积分应用中极为重要，做了一些补充，保持了教材的完整性．

全书分上、下两册出版，共11章．上册内容包括：第1章，函数、极限与连续；第2章，导数与微分；第3章，微分中值定理与导数的应用；第4章，不定积分；第5章，定积分；第6章，空间解析几何；下册内容包括：第7章，多元函数微分及其应用；第8章，重积分；第9章，曲线积分和曲面积分；第10章，无穷级数；第11章，微分方程．

教材中保持结构严谨，逻辑清晰，通俗易懂，例题合理分配，注重基础，同时加强应用，相对独立，便于取舍，适合高等院校理工科类各专业学生使用．

作为高等院校理工科专业重要的基础理论课，本书旨在帮助学生达到高等院校对本课程的两个要求：一是为后继课程提供必需的基础数学知识；二是传授数学思想，培养学生的创新意识，逐步提高学生的数学素养、数学思维能力和应用数学的能力．

本书由王金金教授主编．其中第1、2章由王金金教授执笔，第4、8、9章由李广民教授执笔，第3、6、7章由任春丽副教授执笔，第5、10、11章由张卓奎副教授执笔．

西安电子科技大学刘三阳教授认真审阅了书稿．北京航空航天大学李尚志教授主审了本书，提出了许多宝贵意见．在此一并表示衷心的感谢．

本书在编写过程中得到西安电子科技大学理学院领导及从事"高等数学"教学的广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵意见，编者在此致以深深的谢意．

由于编者水平与经验有限，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者批评指正．

编　者

CONTENTS 目录

第7章 多元函数微分及其应用

在上册中，我们学习了一元函数的微分学. 但在实际应用中，往往需要考虑多个变量之间的关系，反映到数学上，便是一个变量依赖于多个变量的问题，由此引入了多元函数的微分学. 多元函数微分学是一元函数微分学的推广. 与一元函数微分学相比，多元函数微分学有许多性质和一元函数微分学相类似. 但从一元函数到多元函数有本质上的飞跃，而从二元函数到三元及三元以上的函数则只是技巧性的差别，无实质上的不同. 本章将以二元函数为背景，研究多元函数的极限与连续性、偏导数与全微分以及它们在具体问题中的某些应用.

第1节 多元函数的基本概念与极限

一、区域的概念

一元函数的定义域是数轴上的点集.数轴上点的邻域、开区间与闭区间在讨论一元函数时都是至关重要的概念.与此类似，为了讨论多元函数，我们需要把邻域和区间等概念加以推广.首先将有关概念从数轴 $\mathbf{R}^1$ 中推广到平面 $\mathbf{R}^2$ 中，然后推广到一般的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中.

1.平面点集

平面 $\mathbf{R}^2$ 上具有某种性质的点的集合，称为平面点集，记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{ 具有的性质}\}.$$

例如，$\mathbf{R}^2$ 上以坐标原点 $O(0,0)$ 为中心，r 为半径的圆内所有点 $P(x,y)$ 的集合为

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}\text{或记成 }C=\{P\mid |OP|<r\}.$$

2.邻域

(1) 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个定点，δ 为一个正数，则集合

$$\begin{aligned}U(P_0,\delta)&=\{P\mid |PP_0|<\delta\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}\end{aligned}$$

称为点 P_0 的 δ 邻域.在几何上，$U(P_0,\delta)$ 是 xOy 平面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，δ 为半径的圆的内部.

不包含点 P_0 的邻域，称为点 P_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(P_0,\delta)&=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}\\&=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.\end{aligned}$$

3.区域

设 E 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点集，P 是 $\mathbf{R}^2$ 中一点，则有：

(1) 如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 为 E 的内点(如图 7-1 中 P_1 为 E 的内点).

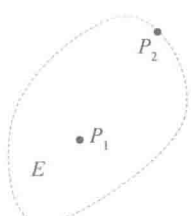


图 7-1

(2) 如果点集 E 内任意一点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**.

例如，集合 $E_1=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 是开集；而集合 $E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 不是开集.

(3) 如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E

的点，则称点 P 为 E 的**边界点**（如图 7-1 中 P_2 为 E 的边界点）．E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E．

例如，上述集合 E_1 的边界 $\partial E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 及点 $(0,0)\}$；集合 E_2 的边界 $\partial E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$．可见，$E$ 的边界点可以属于 E，也可以不属于 E．

*(4) 如果点 P 的任何去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总含有 E 中的点，即对于任何 $\delta>0$，$\mathring{U}(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$，则称 P 为 E 的**聚点**．

例如，圆 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的点既是 $E_1=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 的聚点，也是 $E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的聚点．可见，点集 E 的聚点可以属于 E，也可以不属于 E．

(5) 如果点集 E 内的任何两点都可以用属于 E 中的折线连接起来，则称 E 是**连通集**．

(6) 连通的开集称为**开区域**或**区域**，通常记作 D．例如

$$D_1=\{(x,y)\mid x>0,y>0\},$$
$$D_2=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$$

都是开区域．

开区域连同它的边界一起，称为**闭区域**，通常记作 $\overline{D}$．例如

$$\overline{D}_1=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$
$$\overline{D}_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$$

都是闭区域．

(7) 对于点集 E，如果存在某一正数 K，使一切点 $P\in E$ 与坐标原点 O 间的距离 $|OP|$ 不超过 K，即

$$|OP|\leqslant K \quad 或 \quad E\subset U(O,K),$$

则称 E 为**有界集**；否则称为**无界集**．例如 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域，$\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$ 是无界开区域．

4. n 维空间

我们知道，全体实数表示数轴上一切点的集合，即直线，记作 $\mathbf{R}$；全体有序二元数组 (x,y) 表示平面上一切点的集合，即平面，记作 $\mathbf{R}^2$；全体有序三元数组 (x,y,z) 表示空间一切点的集合，即空间，记作 $\mathbf{R}^3$．一般地，n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体构成的集合称为 **n 维空间**，记为 $\mathbf{R}^n$．而每个有序的 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点，数 x_i 称为该点的第 i 个坐标．

n 维空间中 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 两点间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

当 $n=1,2,3$ 时，上式分别为数轴、平面及空间中两点间的距离公式．

平面 $\mathbf{R}^2$ 中的一系列概念,可推广到 $\mathbf{R}^n$ 中.例如,设 $P_0 \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$,则 $\mathbf{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域为

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta, P \in \mathbf{R}^n\}.$$

以邻域为基础,可进一步定义 $\mathbf{R}^n$ 中集合的内点、边界点以及区域等一系列概念.读者可自行写出.

二、多元函数的概念

在很多自然现象以及实际问题中所涉及的函数往往依赖于两个或更多个自变量,下面举几个例子.

例 7.1.1 底半径为 r,高为 h 的正圆锥体的体积 V 和侧面积 S 分别为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

这里,当 r 和 h 每取定一组值时,就有唯一确定的体积值 V 和侧面积值 S 与之对应,即 V 和 S 依赖于两个彼此独立的变量 r 和 h.

例 7.1.2 设长方体的边长分别为 x,y 和 z,则体积 V 为

$$V = xyz.$$

这里,V 依赖于三个彼此独立的变量 x,y 和 z.

例 7.1.3 电流所产生的热量 Q 与电压 U、电流 I 以及时间 t 的关系为

$$Q = UIt.$$

这里,Q 依赖于 U,I,t 的变化而变化.

从上述例子中即抽象出多元函数的概念.

定义 1 **设有三个变量 x,y 和 z,D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个非空子集.如果对于每个点 $P(x,y) \in D$,变量 z 按照一定法则总有唯一确定的数值与之对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数),记为**

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

或

$$z = f(P), \quad P \in D.$$

其中 x,y 称为自变量,z 称为函数(或因变量),点集 D 为函数的定义域.

当自变量 x,y 取定值 x_0,y_0 时,函数 z 对应的值 z_0 称为二元函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值,记作 $f(x_0,y_0)$,即 $z_0 = f(x_0,y_0)$.函数值 $f(x,y)((x,y) \in D)$ 的全体所构成的集合称为该函数的值域,记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

注　z 是 x,y 的函数也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$，等等.

类似地，可以定义三元函数 $u=f(x,y,z)$ 及三元以上的函数. 如例 7.1.2 、例7.1.3 中的体积 V、热量 Q 分别是变量 x，y，z 和变量 U，I，t 的三元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数，记作 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$，或记作 $u=f(P)$，$P\in D$.

多元函数的定义域与一元函数相类似. 我们约定：由一个解析式表达的多元函数 $u=f(P)$ 的定义域是使得这个算式有意义的全体自变量所组成的集合；而由实际问题所确定的函数，还需要考虑使实际问题有意义. 如例 7.1.1 中正圆锥体的底圆半径 r，高 h 只能取正数.

例

例 7.1.4　求二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域.

解　函数 z 的定义域应满足 $x+y>0$，即

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}.$$

这是一个无界开区域（如图 7-2）.

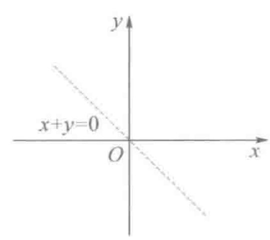


图 7-2

例 7.1.5　求函数 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域.

解　函数 z 的定义域应满足

$$\begin{cases}x^2+y^2-1\geqslant 0,\\ 4-x^2-y^2>0,\end{cases}$$

即　　$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2<4\}.$

这是一个有界区域（如图 7-3）.

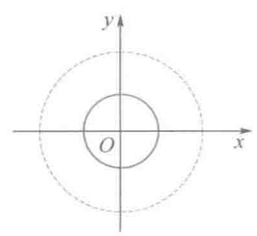


图 7-3

例 7.1.6　求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解　定义域应满足 $\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leqslant 1,\\ x-y^2>0,\end{cases}$ 解得

$$\begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\\ x>y^2.\end{cases}$$

故函数 $f(x,y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid 2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x>y^2\}.$$

二元函数的几何意义　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，点 $P(x,y)$ 为 D 中任意取定的点，对应的函数值为 $z=f(x,y)$，这样以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定唯一的点 $M(x,y,z)$. 当点 (x,y) 取遍 D 上的一切

点时，得到一个空间点集

$$G=\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

该点集形成的图形称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形（如图 7-4）.

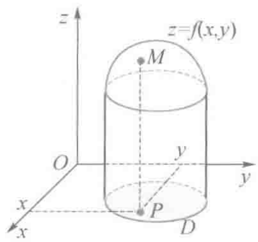


图 7-4

通常，二元函数的图形是一张曲面，其定义域恰好是曲面在 xOy 平面上的投影区域. 例如，函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的图形是球心在坐标原点、半径为 a 的上半球面，它的定义域是曲面在 xOy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$（如图 7-5）；函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面，投影是平面 $\mathbf{R}^2$.

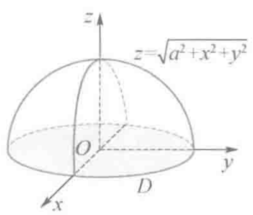


图 7-5

三、二元函数的极限与连续性

1. 二元函数的极限

研究函数的极限即是研究函数的变化趋势. 对于二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限，与一元函数的极限概念类似，如果当 xOy 平面上动点 $P(x,y)$ 以任意方式趋向定点 $P_0(x_0,y_0)$（记作 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$）的过程中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，我们就说 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限.

为了确切地描述二元函数的极限，用"$\varepsilon-\delta$"语言给出这个极限的精确定义.

定义 2 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域 $\mathring{U}(P_0)$ 内有定义. 如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in\mathring{U}(P_0)$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\quad(P_0,P\in\mathbf{R}^2).$$

通常把二元函数的极限也叫作二重极限.

例

例 7.1.7 证明：$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证　因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant|y|$，而 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}}|y|=0$，由

夹逼定理可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

注 (1) 二重极限存在,是指动点 $P(x,y)$ 以任何方式趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数值 $f(x,y)$ 都无限接近于同一个常数.

(2) 如果动点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 趋于不同的值,则可以确定 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限不存在.例如,考察下面函数在点(0,0)处的极限:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

显然,当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴趋于点(0,0)时,

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0;$$

又当点 $P(x,y)$ 沿 y 轴趋于点(0,0)时,

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

虽然点 $P(x,y)$ 以上述两种特殊方式趋于点(0,0)时,函数 $f(x,y)$ 的极限存在并且相等,但是当点 $P(x,y)$ 沿着任意直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

显然它随着 k 值的不同而改变,因此极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

(3) 关于二元函数极限的概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$,记作 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = A\ (P_0, P \in \mathbf{R}^n)$.

(4) 一元函数求极限的四则运算法则、复合函数求极限法则、夹逼准则,等等,都可以推广到多元函数中.

例 7.1.8 计算下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{y\to 2} y = 1 \cdot 2 = 2$(利用重要极限及四则运算法则).