工程结构非线性大变形问题算法研究与应用

侯祥林　著

GONGCHENG JIEGOU FEIXIANXING DABIANXING WENTI
SUANFA YANJIU YU YINGYONG

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

工程结构非线性大变形问题算法研究与应用

侯祥林　著

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书集成了作者近年来在工程结构大变形问题求解方面的研究成果。书中阐述了以数学力学原理和算法程序设计计算常用的梁、杆、板和刚架等结构件的线性几何大变形问题的优化求解原理与应用。主要内容包括绪论、梁类几何非线性大变形问题的算法研究、杆件几何大变形问题的优化算法与应用、工程非线性微分方程边值问题的算法研究、薄板类弯曲大变形问题的算法研究、复杂刚架结构求解的优化算法与应用和结论等，并在附录中给出梁大变形求解和板大变形求解程序。

本书可以作为普通高等院校机械工程、土木工程和工程力学等专业研究生和工程技术人员学习领会工程大变形求解分析的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

工程结构非线性大变形问题算法研究与应用/侯祥林著.
—北京：中国电力出版社，2017.3

ISBN 978-7-5198-0063-5

Ⅰ.①工…　Ⅱ.①侯…　Ⅲ.①工程材料-非线性结构分析-变形计算法　Ⅳ.①TB303.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 284946 号

中国电力出版社出版、发行
（北京市东城区北京站西街 19 号　100005　http://www.cepp.sgcc.com.cn）
三河市航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售

*

2017 年 3 月第一版　　2017 年 3 月北京第一次印刷
710 毫米×980 毫米　16 开本　10 印张　240 千字
定价：**36.00** 元

敬 告 读 者

本书封底贴有防伪标签，刮开涂层可查询真伪
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版 权 专 有　翻 印 必 究

前 言

本书综合运用数学理论、力学理论、最优化原理和程序设计方法，探讨了工程中常见的梁、杆、板和刚架等类结构的几何非线性大变形的算法研究与应用问题，涵盖了近年来在结构几何非线性大变形算法研究方面的成果。全书共7章内容。

第1章　绪论：概述了结构大变形和小变形的区别，目前已有的求解方法和计算原理，提出本书所做研究工作内容。

第2章　梁类几何非线性大变形问题的算法研究：针对承受集中力悬臂梁、承受分布载荷简支梁和一端固定、一端链杆约束超静定梁的大变形问题，提出直接优化求解方法。建立了以平衡状态下未知转角和未知坐标为设计变量，以内力、变形与总体坐标关系构建目标函数的大变形优化算法。完成程序设计、算例分析和计算结果对比。

第3章　简单桁架类几何大变形问题的算法研究：针对典型的平面静定桁架结构和空间超静定桁架结构体系非线性大变形问题，提出了以变形量与最终几何参数为设计变量，以平衡条件和几何关系为目标函数的杆件结构大变形问题优化算法。完成程序设计和实例计算分析。

第4章　工程非线性微分方程边值问题的算法研究：针对变形问题求解中的非线性常微分方程边值问题、非线性偏微分方程边值问题，提出直接优化算法，完成程序设计、算例分析与计算结果对比，同时以边值问题的求解算法思路解决了变截面超静定梁的变形直接优化求解问题。

第5章　薄板类弯曲大变形问题的算法研究：从弹性力学理论出发，结合差分法和最优化原理，解决薄板弯曲小变形问题的优化求解算法。应用变分原理、差分原理和最优化原理，构建简化形式薄板弯曲大变形的高阶非线性偏微分方程，建立了以离散坐标点未知挠度为设计变量，以位移满足关系

构建目标函数的非线性偏微分方程边值问题的薄板弯曲大变形的优化算法，完成程序设计、算例分析和结果比较。

第 6 章　刚架结构大变形求解算法研究与应用：针对刚架杆系结构，提出了以未知约束力和未知位移为动态设计变量，以杆段和结点平衡关系为目标函数的刚架小变形问题的非组集形式的优化算法。针对刚架结构大变形的计算，提出以外力作用点的相应坐标为设计变量，以外力作用点相应坐标关系为目标函数的刚架大变形的最优化求解算法。完成了程序设计、算例分析与计算结果对比。

本书以梁类、杆类、板类和刚架类结构几何大变形的优化求解算法为主线，以解决大型工程结构问题分析为目标，将理论分析、算法原理、程序设计和与实例分析、结果仿真与有限元计算结果对比贯穿于全书中。可为工程大变形问题的直接求解计算提供途径。本书的研究成果已经刊登在物理学报、工程数学学报、应用力学学报、东北大学学报等期刊上，为理论研究和工程应用提供依据。

由于作者水平有限。书中提出的方法和观点难免存在差错，恳请读者批评指正！

E-mail：drhouxl@tom.com

侯祥林
2016.10

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目 录

第 1 章

绪 论

1.1 结构小变形和大变形

工程结构几何非线性大变形问题，指的是小应变大位移问题，即结构内部的应变是微小的，满足线性规律，但整体结构产生的变形相对较大。对于线性问题，一般是根据变形前的位置来建立平衡方程。对于几何非线性问题，由于位移变化产生的二次内力不能忽略，荷载－变形关系为非线性，所以在这种情况下叠加原理不再适用，整个结构的平衡方程应按变形以后的位置来建立。同时由于变形后的位置未知，所以给处理几何非线性问题带来了复杂性。对于这类问题，工程上一般只能采用数值方法来求解。

现实生活中的许多实际结构都涉及几何大变形问题。例如跳跳板、钓鱼竿、柔性摆杆，这些都是典型的几何大变形问题实例。高耸起重机结构、泵车臂架结构、大跨度支承的桥梁、拉索穹顶结构、幕墙结构等在移动载荷、风载荷和地震动载荷的作用下都将产生不同程度的几何大变形问题。

传统的材料力学、结构力学和弹性力学理论[1~3]，主要用于求解线弹性结构的小变形问题。例如单个构件的变形，一般是静定结构问题，解法是首先将结构视为刚性结构，在忽略变形情况下，按照理论力学的静力学求解方法，通过建立平衡方程，计算出约束力和相应的内力（轴力，剪力和弯矩），然后结合物理方程，计算结构在内力作用下产生的变形。

如图 1-1 所示，悬臂梁 AB 的 B 点受集中力偶 M 作用，求解 B 点挠度。此时，梁所受的内力只有弯矩 M。应用材料力学的知识，可以计算出图 1-1 结构中 x 位置处的位移 $y(x)=\dfrac{Mx^2}{2EI}$，最大变形 $\varDelta_{By}=\dfrac{Ml^2}{2EI}$。而且变形后，不考虑各点在 x 方向位移，因此 B 点位移 $\overline{BB'}$ 为垂直向下。

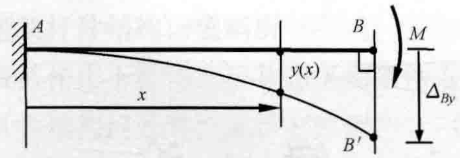

图 1-1　梁小变形示意图

对于同样的问题，当变形量较大，甚至与结构几何尺寸处在相近的数量级时，结构的变形就演变成为几何非线性问题，即每个小部分结构都是线弹性，但是整体结构变形结果为几何大变形。由于变形前后的坐标位置发生了较大变化，此时结构不能采用小变形的算法进行计算，否则会产生较大的计算误差。

如图 1-2 与图 1-1 为同一梁结构，作用力偶 M，求梁 AB 大变形。

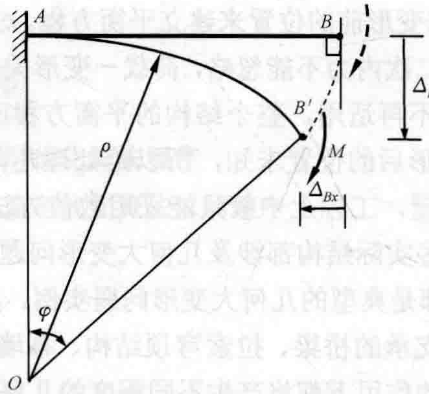

图 1-2　梁大变形示意图

结合几何大变形的变形关系规律，可知梁在受弯矩 M 作用时，梁 AB 的变形为一圆弧，其曲率半径 ρ 满足 $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{EI}$，而 $\varphi=\dfrac{l}{\rho}$，B 点的位移计算公式为 $\Delta_{By}=\rho(1-\cos\varphi)=\dfrac{EI}{M}\left(1-\cos\dfrac{Ml}{EI}\right)$，$\Delta_{Bx}=l-\rho\sin\varphi=l-\dfrac{EI}{M}\sin\dfrac{Ml}{EI}$。

当 φ 较小时，有

$$\Delta_{By}=\rho(1-\cos\varphi)\approx\rho\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\rho}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{l}{\rho}\right)^4\right)\right]=\frac{1}{2}\frac{l^2}{\rho}-\frac{1}{24}\frac{l^4}{\rho^3}=\frac{Ml^2}{2EI}-\frac{M^3l^4}{24(EI)^3}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\Delta_{Bx}=l-\rho\sin\varphi=l-\frac{EI}{M}\sin\frac{Ml}{EI}=l-\frac{EI}{M}\left[\frac{Ml}{EI}-\frac{(Ml)^3}{6(EI)^3}+\cdots\right]\approx\frac{M^2l^3}{6(EI)^2}$$

只有当φ很小时，才能认为$\Delta_{By}\approx\dfrac{Ml^2}{2EI}$，$\Delta_{Bx}\approx 0$，也就是小变形问题对应的解。

针对超静定结构体系的小变形问题，通常从三个方面进行分析，利用静力平衡关系、物理关系和位移协调关系求解方程，获得内力和相应变形的计算结果。

如图1-3（a）所示为一个梁和杆的组合体系，在B点受集中力F作用，计算B点位移。

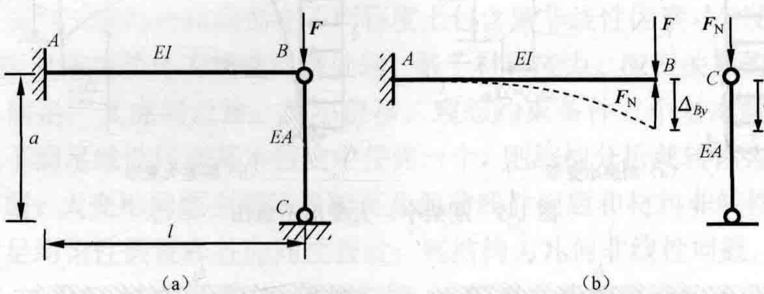

图1-3　超静定组合结构小变形示意图

通过静力平衡关系，绘制杆件分离体受力图，如图1-3（b）所示。由物理关系可知，梁B点挠度$\Delta_{By}=\dfrac{(F-F_N)l^3}{3EI}$，杆$BC$压缩量$\Delta l=\dfrac{F_Nl}{EA}$。由变形协调关系，$\Delta_{By}=\Delta l$，所以有$\dfrac{(F-F_N)l^3}{3EI}=\dfrac{F_Nl}{EA}$，可求得$F_N=FAl^2/(Al^2+3I)$。发生变形后，$B$点沿$BC$方向下移，$\Delta_{By}=\Delta l=\dfrac{Fl^3}{E(Al^2+3I)}$。

但是对于同样问题的大变形计算，变形示意图如图1-4所示，其计算求解过程较为复杂。

同样的，这类问题还包括刚架和桁架等结构的变形问题。图1-5为刚架大、小变形示意图，图1-6为桁架大、小变形示意图。

在工程实际中，常规设计是指在保证结构强度、刚度和稳定性的前提下，尽可能节省结构用料。在承受较大载荷作用时，分析结构所出现的几何大

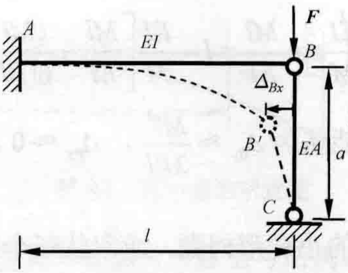

图 1-4　超静定组合结构大变形示意图

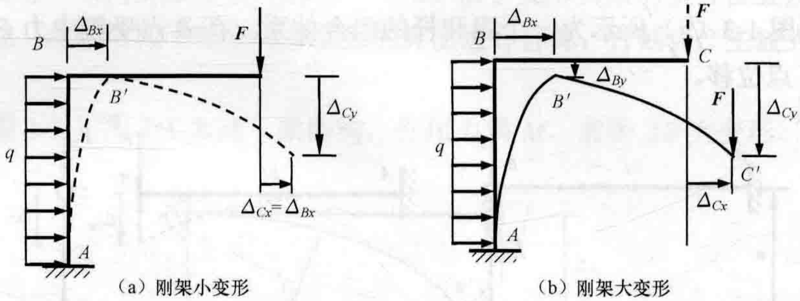

图 1-5　刚架小、大变形示意图

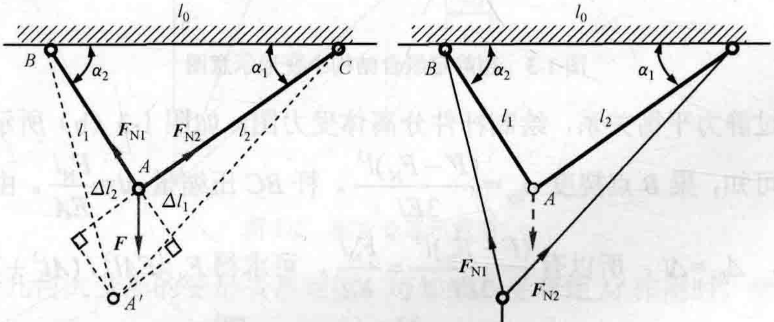

图 1-6　桁架小、大变形示意图

变形和结构非线性动力学问题，可以保障系统能够安全良好地正常工作，因此对于结构大变形问题的计算分析方法研究势在必行。由于大变形结构为几何非线性问题，这种问题一般不能采用解析法获得分析结果，所以只能采用有效的数值方法对其进行分析。目前这类问题的求解方法多是采用

有限单元法，应用 Ansys 程序软件进行计算，基本原理为从载荷作用前的初始位置出发，将总载荷分段递增地施加在结构体上，采用逐步加载方式，同时要在每个载荷步中采用牛顿一拉斐逊法来逼近平衡状态，这是一种间接的静态处理方法，不是一种直接的计算思路，在动力学分析方面也存在一定的弱点。因此，研究一种计算较复杂结构在大变形情况下的内力和大变形问题的计算分析方法，对于更好解决工程实际问题，有一定的理论意义和应用价值。

1.2 工程结构大变形研究现状

多数的工程结构问题都在不同程度上包含着非线性因素，在发生小变形时，问题经常被简化为线性问题处理。基于材料应力、应变关系的经典线性理论，满足广义虎克定律、微小位移、理想约束条件三个基本假定。若研究对象不满足线性问题基本假定中任何一个，则结构分析就转化为非线性大变形问题。大变形问题主要涉及的是几何非线性问题和材料非线性问题。若材料满足均匀性假设和各向同性假设，则结构为几何非线性问题。

在 20 世纪 40 年代和 50 年代初期，人们对非线性理论的研究取得了很大进展，但缺乏对结构非线性分析的技巧和工具，使得对实际结构进行非线性分析还存有许多困难。随着计算机的问世和有限元法的崛起，非线性分析逐渐发展起来，取得了巨大成就，其工程应用也拓展到航空航天和结构工程等领域。与线性分析相比，非线性分析的计算程序要复杂得多，即便是采用已经成熟的 Newton-Raphson 方法，也需要花费比较长的时间进行程序调试。弹塑性结构非线性静力学是非线性学科的重要学科分支，而结构大挠度（大转角）变形研究是现代结构非线性静力学的研究主题之一。对线性问题，一般是根据变形前的位置来建立平衡方程，因为其问题的基本特征不因变形而改变。但对于几何非线性问题，由于位移变化产生的二次内力不能忽略，荷载一变形关系为非线性，叠加原理不再适用，整个结构的平衡方程应按变形以后的位置来建立。由于变形后的位置未知，所以给处理几何非线性问题带来了复杂性，对于这类问题，工程上一般只能根据数值方法来求解。

结构的几何非线性分析一直是国内外学术界、工程界研究的一个热点问题[18]。19 世纪中叶，物理学家 G.R.Kirchhoff 在他的数学物理教程力学部分中建立了准确的有限变形弹性力学理论。在 20 世纪中叶，有理力学 Truesdell 教授的非线性力学场论在理论方法的探索方面对有限变形力学进展产生了积极影响[4]。近年来，随着科学技术的发展和工程应用的需要，出现了很多工程大变形问题，大跨度柔性桥梁，建筑结构板壳等结构在移动载荷和地震载荷下就可以看成这类问题，即大位移、小应变问题。其特点是材料应变较小，本构关系可按线性关系考虑，但结构变形较大，可引起外载荷大小、方向的变化，在建立结构平衡方程时，必须考虑位移造成的影响。它的基本特征是：考虑了结构大变形，使得变形体的应变与位移成为非线性关系，平衡方程在变形后的位置上建立。

工程中所有的问题都是非线性的，为适应工程实际问题的需要，往往忽略一些次要因素，在解决某些具体问题时，将它们近似地作为线性问题处理，这是完全合理的。但是不能因此认为一切问题均可以简化为线性问题，必须注意到许多工程问题，应用非线性理论进行处理，才能得到符合实际的结果。

最先开始考虑结构由于几何变形引起的力－位移非线性分析计算的是 Turner 等人，他们在 1960 年发表论文提出了根据结构加载前已存在的应力建立刚度矩阵和在几何非线性分析中使用线性化和增量方法的概念。1996 年 Oden、Przamieniecki 提出了计算几何刚度矩阵的方法。在 Turner、Oden 等人的公式推导中，位移函数采用了简化的表达式，实质上是将其分析计算限制在大位移、小应变的范围内。20 世纪 70 年代初期，关于大位移、大应变结构的研究开始出现，在研究中，固体力学的分析方法被引进到结构非线性有限元分析中[5]。

对于杆系结构的几何非线性分析，众多文献采用的是梁柱理论或其改进形式，多基于 Eurler-Bernoulli 梁理论描述，没有考虑剪切效应，也多不能描述杆件作刚体运动时应变为零的事实。基于前人工作的一些不足，文献[6]采用 Timoshenko 梁理论，放弃平面假定，采用平动、转角位移分别插值的方法，考虑轴向、剪切、弯曲效应，提出了小应变、大变形和大转动平面 Timoshenko 梁元的新几何刚度矩阵理论。J.L.Meek[7]和 C.Bagci[8]等研究了空

间框架等截面的几何非线性响应。谭晓东[9]、D.L.Karabalis 和 D.E.Beskos[10]分析了弹性阶梯形梁柱的几何非线性响应。针对大变形导致的几何非线性行为，一般采用修正结构几何形状思想，即采用拖动坐标法不断地修正节点坐标，最终找到一个变形之后的平衡位置以及相应的内力。该方法可以跟踪结构的变形位置，文献[11]对该方法进行了介绍和应用。

早在 19 世纪末，科学家就发现，固体力学的经典线性理论在许多情况下并不适用，于是展开了对非线性力学问题的研究。20 世纪中期，科学家奠定了非线性力学的理论基础，但是，许多非线性微分方程的边值问题无法求解，运用解析法解决非线性工程问题仍无法实现。直到 20 世纪 60 年代末，有限元法与计算机的结合，使得工程中的非线性问题逐步得以解决[12]。

非线性问题求解的中心思想是将载荷分成一系列的载荷增量，在几个载荷步内施加载荷增量，或者在一个载荷步的几个子步内施加载荷增量。针对每一个增量的求解完成后，在求解下一个载荷增量之前，需要编制程序调整刚度矩阵，以反映结构刚度的非线性变化。非线性有限元法是目前进行非线性问题数值计算中最有效的方法之一。

采用有限元法解决非线性问题的基本思想是用一系列的待校正的线性近似解逐步逼近非线性问题的解，即将一系列线性问题进行迭代法求解。所谓迭代法，一般是在求解某些复杂的方程时，从某一初始向量出发，通过设计好的步骤逐次算出近似解向量，从而得到最终的向量序列。利用有限单元法可以解决的非线性问题，大致分为三类：第一类问题是只涉及材料非线性的问题，即物理非线性问题。在这类问题中，虽然表示材料性质的物理方程是非线性的，但只考虑小位移和小应变的情况，即应力、应变在几何上仍是线性关系。第二类问题是只涉及几何非线性的问题，与上面一种情况正好相反，这时，材料是线性的，但是由于产生了大位移和大应变，引起了几何非线性。而第三类问题是前两类问题的结合，即在这类问题中既要考虑物理非线性，又要考虑几何非线性，这是一般的非线性问题。在非线性有限元法研究的发展中出现过多种求解方法，它们都有自己的适用范围。其选择往往与物理问题的性质、特点、非线性程度、对计算结果的要求以及计算机的容量、计算速度等因素有关。与线性分析不同的是，在非线性分析中很难找到一种适合各类不同非线性程度的解法。在解决非线性

问题时，常用的几种方法是直接迭代法、Newton-Raphson 迭代法、增量法和混合法[13~17]。

1.3 几何非线性问题解法

几何非线性指的是大位移问题。对于大跨度结构要求获得非线性方程的直接代数解是十分困难甚至是不可能的。目前常采用数值解的方法求取几何非线性问题的近似解，如增量法，迭代法和混合法。

1.3.1 增量法

增量法指载荷以增量的形式逐级施加在结构上，在每个载荷增量作用过程中假定结构的刚度是不变的，在任一载荷增量区间内结点位移和杆端力都是由区间起点处的结构刚度算出，然后利用求得的结点位移和杆端力求出相对增量区间终点变形后位置上的结构刚度，作为下个载荷增量的起点刚度。所以，在任意载荷增 i 级作用下的平衡方程为：

$$[K]_i\{\Delta D\}_i=\{\Delta W\}_i \tag{1-1}$$

式中：$[K]_i$ 为载荷增量区间起点处结构的整体刚度矩阵；$\{\Delta D\}_i$ 为该载荷增量引起结点的位移变化量；$\{\Delta W\}_i$ 为结点载荷增量的大小。

载荷增量区间终点处的结点位移为起点处位移与位移增量$\{\Delta D\}_i$之和。由此可见，结构的几何状态在每个载荷增量作用后都需要进行调整。

增量法的求解过程如图 1-7 所示。

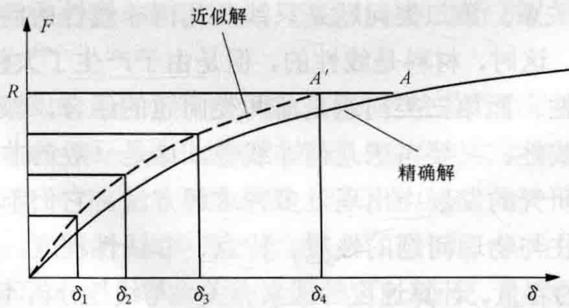

图 1-7 增量法图

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com