数学讲课提纲

（2）

北京中医学院中药系
1973

目 录

第二章　代数式及其变换

§2.1　代数式的意义及其应用

一、代数式的构成与分类 —— 1

二、代数式、代数函数和代数方程 —— 4

三、应用代数式构成某些函数解析式与方程式举例 —— 5

§2.2　整式的四则运算

一、整式的加减 —— 10

二、整式的乘法与某些重要乘法公式 —— 11

三、因式分解 —— 14

四、最高公因式与最低公倍式 —— 16

五、关于整式的相除　余式定理与综合除法 —— 17

§2.3　分式与根式

一、分式的化简 —— 24

二、分式的四则运算 —— 25

三、根式的化简与变形 —— 27

四、根式的运算 —— 30

第三章　方程与不等式

§3.1　方程式的基本概念

一、方程的构成与型式 —— 35

二、方程组的构成与型式 —— 36

三、关于方程[illegible]根方法 —— 37

§3.2　一次方程、二次方程和线性方程组

一、一次方程和二次方程的求解 —— 44

二、二次方程应用问题 ………… 49
三、线性方程组的求解与应用 ………… 55
§3-3. 其他类型方程的简述与题例
一、高次方程 ………… 73
二、分式方程和根式方程 ………… 78
三、非线性方程组 ………… 81
四、指数方程和对数方程 ………… 85
§3-4. 不等式
一、不等式概念及其基本性质 ………… 89
二、简单不等式的证明与求解 ………… 92
三、一元一次不等式组 ………… 94
四、一元二次不等式 ………… 96
第四章　数列与极限
§4-1　数列
一、数列的基本概念、等差数列与等比数列 ………… 100
二、数学归纳法 ………… 106
三、其他数列举例 ………… 109
四、[附]排列与组合 ………… 111
五、[附]二项式定理 ………… 115
§4-2　极限
一、极限基本概念、无限大量与无限小量 ………… 123
二、极限运算法则 ………… 131
三、变化率问题 ………… 134
四、无限小量求和问题 ………… 139
五、无穷等欲等比级数，超越无理数 e ………… 144
六、应用极限方法推导某些实际问题的指数函数。 ………… 147

第二章　代数式及其变换

§2-1　代数式的意义及其应用

一、代数式的构成与分类

1、列宁说过："物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然"。

在前一章中我们已经系统讲到数及其运算，已经学会用数字进行某些实际问题的计算，并且有意识地早期引入文字字母代表数的方法。同学们一定已经感觉到，应用这种字母代表数的运算方法，可以更简明、更深刻地揭露事物运动、变化、发展反映在数量上的关系和一般规律。这种方法就是"代数"方法，应用代数方法的第一步就是把事物的联系与对立的关系写成代数式。

代数式就是一个用数字或字母表示数，并且用运算符号和运算顺序符号（例如括弧）把它们联结起来的式子。数学上规定加、减、乘、除、与整数次乘方、开方为代数运算。取对数不属于代数运算，是超越代数运算范围以外的一种运算。但作为数学科目，仍放在代数运算中讲。无理数次的乘方、开方也不属于代数运算，但当无理数取小数近似值时也就成为代数运算了。

下面例子说明代数式的构成：

例一：　圆的周长是：$2\pi r$，圆的面积是：πr^2。

球的面积是：$4\pi r^2$，球的体积是：$\frac{4}{3}\pi r^3$。

（以上的 r 分别表示圆和球的半径）

例二：　匀速直线运动的速度是：S/t　（t 表示时间、S 表示行程）

例三：　勾股为 a、b 的弦是：$\sqrt{a^2+b^2}$

例四：　pH 的定义是：$lg\frac{1}{[H_3O^+]}$

（这是数学解析式的一种，数学理论上不属于代数式）

上例中的 r、s、t、a、b 等文字字母均代表未知数或变量。但某些问题中，也以文字字母代表应该知道但数值未定的常量。如药房中计价时，某种药物总价是：kx、k 表示单价，应该是既定的常量，x 表示药物数量，是一变量，在这种情况下，既定的常量用前面的字母如 a、b、c、等表示，变量或未知量则用后面的字母如 x、y、z 等表示。

代数式的分类是根据变量和未知量在运算中所处的地位而划分整式、分式、有理式和无理式（根式）的。

2. 毛主席教导我们：“对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种运动形式的共同点。但是，尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点，……”。研究代数式时，代数式所给予变量的不同运算就是它的特殊点，加在变量身上的运算不同，所反映的数量对应关系（函数关系）也就不同，化简取值的方法也不同。故代数式着眼于变量（或未知量）所需的运算情况而有下列分类。

(1) 整式：代数式中的变量（或未知数）只参加加减乘和乘方或不列位于分母的除法运算时，代数式称为整式。例如：

$\sqrt{2}x$，$\frac{1}{2}a^2bc$，$\frac{1}{a}x^2y+\frac{1}{b}xy^3$，$\frac{x+5y}{\sqrt{2}+\pi}$，$\sqrt{ab}\,xy$，都是整式。

应注意到 $\sqrt{2}x$，$\frac{1}{2}a^2bc$ 中对数字 2 虽有开方运算和列位分母的除法，但对代表变量或未知数的 x，a，b，c，则没有开方和它们作分母的除法，故为整式，在第四式中，a、b 在分母上，但此时 a、b 代表既定的常量，变量是 x、y，故为整式。第五式也是这样，数学上约定 $\pi=3.1416$。

第六式对 $a.b$ 开方但 $a.b$ 与 xy 相并列，$a.b$ 是代表常量的，虽然数值未写出，但表示其数值已定，变量是 $x.y$，故也仍是整式。

(2) 分式：分母中含有变量或未知数但对它不进行开方运算的代数式称为分式，例如：

$\frac{m}{v}$，$\frac{S}{t}$，$\sqrt{2}x+\frac{1}{y}$，$\frac{\sqrt{a}}{x}$，$\frac{x-3}{x^2-1}$ 第三式中虽有 $\sqrt{2}$，第四式中虽有 $\sqrt{a}$，但都不是变量，故仍为分式，第三式中有二项，前一项是整式，后一项是分式，整体而言是分式。故以后注意，整式与分式加减，仍算是分式。但对变量有开方运算时则不是分式。

(3) 无理式(根式)：根号内含有变量或未知数的代数式叫无理式或根式。例如：

$\sqrt{S}$，$\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{\frac{x}{y}}$，$\frac{\sqrt{x^2-1}}{y}$ 都是无理式(根式)注意第四式与第三式中分母上出现变量，但根号内也有变量，故叫根式，而不是分式。

3. 整式，分式合称有理式，有理式与无理式是相互对立的，这些名称是和数类比而得到的数的运算规律，也就相应地类比建立于代数式，称为代数式的变换，是本章研究的主题。

要注意到代数式的分类是以变量在式中所在的位置而划分的、当变量(或未知数)的值定后，代数式的值才确定，称为代数式的值，如 $\sqrt{x}$，当 $x=4$ 时，$\sqrt{x}$ 的值为 2，故整式的值可以是分数，(如 $\left.\frac{x}{2}\right|_{x=4}=2$) 分式的值可以是整数 ($\left.\frac{1}{x}\right|_{x=\frac{1}{2}}=2$) 有理式的值可以是无理数，(如 $\left.x+y\right|_{\substack{x=\frac{1}{2}\\y=1}}=1+\sqrt{2}$) 无理式的值可以是有理数，(如 $\left.\sqrt{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=5$)

4. 常见的整式是形如 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$.

的多项式。这个多项式是按x的降幂排列的，如写为：

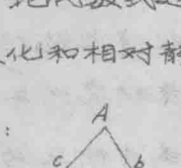
$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$，则是按$x$的升幂排列的。

式中的x是变量或未知数，$a_0,a_1\cdots\cdots a_n$表示既定的数值。它可以根据问题不同选取所有实数。多项式是以加减号分项的。各项中a_nx^n是x的n次乘幂项，次数最高，根据它称整个代数式为n次多项式。a_0这一项未含x，但它可以视为a_0x^0项，称为常数项，在所有各项中$a_0,a_1\cdots\cdots a_n$均称为系数。仿上一般地规定对变量没有加减运算的整式称为单项式，若干单项式以加减号联接起来就是多项式。例如$\frac{1}{2}ah$，$\sqrt{2}xy^2$，$-\frac{1}{2}xyz$，都是单项式，而$3x^2-\sqrt{2}xy$，$\pi a^2+\frac{1}{2}ah$则是多项式。$ax+bx$有两项是多项式，但如写成$(a+b)x$，把$(a+b)$看做既定的系数，也可以做单项式。

二、代数式、代数函数和代数方程

1. 现代的建筑工程多采用予制构件、现代的电子仪器多采用集成电路，代数式就好像建筑房屋的予制构件一样，利用等号或不等号把代数式连接起来得到等式与不等式，就可以描述诸事物在变化和相对静止过程中的相互制约相互联系的函数关系。

例一：



如图三角形ABC记为$\triangle ABC$，a,b,c表示$\angle A,\angle B,\angle C$的对边，则根据“两点间距离，直线段最短”这一公理（公理是人类经过千百万次以至无数次实践验证所得到的规律，是数学其他定理的一个立足点、无须逻辑证明也不可能证明的），我们可以得到：$a<b+c$，$b+c$是代数式，$a<b+c$则是不等式，这一不等式是上述公理的数学语言。

例二：　勾股形中的勾、股平方和等于弦方，这是我们已经知道的勾股定理，用代数式构成等式表达它就是：

$a^2+b^2=c^2$ 或 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$\sqrt{a^2+b^2}$ 是代数式，$c=\sqrt{a^2+b^2}$ 是等式，这一式是勾股定理的数学符号表达式。

例三：葡萄糖溶液浓度常用重量——体积百分数表示（g/ml%）

设溶质重量为 p，浓度为 c，溶液体积为 v，则

$c=\frac{p}{v}$ 或 $p=cv$

2. 上例 $p=cv$ 就是以前我们讲过的正比例函数，如 c 既定是一常量，则 v 为自变量 p 为因变量即函数，和这个简单例子一样，我们可以用 $y=f(x)$ 这一抽象等式来表示因变量 y 与自变量 x 的函数关系。$f(x)$ 是自变量 x 与其他已知量或常量用运算符号连接起来的算式，如运算仅仅是代数式，（即 $f(x)$ 是代数式），$y=f(x)$ 就是代数函数。

3. 当代数函数 $y=f(x)$ 中因变量 y 已知，则 x 中有其对应值（反之亦然）此时设 $y=c$，从而 $c=f(x)$ 就叫做代数方程，式中的 x 叫做未知数，例如我们已经知道的一元一次方程 $ax+b=0$，简单的一元二次方程 $ax^2=b$ 等等。易见方程是一个条件等式，因为 x 等于特定值代入，方程两端才能相等。与条件等式相对立的是恒等式，例如 $2x+3x=5x$ 就是恒等式，x 等于任何实数值代入，等式均成立。我们下面所要研究的代数式变换就是这种恒等变换。意思就是在变换前后的式子形式，简繁不一样，但当同一组的变量或未知数的值代入，变换前后的代数式数值是一样的，在数学上我们称它们为恒等变换。

三、应用代数式构成某些函数解析式和方程式举例：

例一：我们在第一章曾说过不尽循环小数可以准确的转化为分数，当时未讲它的方法，现在来解决它，例如取 $x=0.\dot{3}$，试探求一个一般方法把它转化为分数，易见 $x=0.\dot{3}=0.3+0.03$

而 $0.0\dot{3}=\frac{x}{10}$，故得到方程式：$x=0.3+\frac{x}{10}$，这一等式是方程，它的左右端都是代数式。求解办法很简单，两端乘以10，得到：

$10x=3+x \quad \therefore x=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$。

又如取 $x=0.1\dot{2}3\dot{1}$ 求出 x 的分数值，仿上 $x=0.1231+0.0000\dot{2}3\dot{1}$

即 $x=0.1231+\frac{0.0\dot{2}3\dot{1}}{10^3}$　即 $x=0.1231+\frac{x-0.1}{10^3}$，这就是所需要的代数方程，等式右端是 x 的代数式，求解也是两端乘以 10^3 得到：$10^3x=123.1+x-0.1$　于是：$999x=123$　$x=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$。

例二：根据大量实验结果，人们知道："在恒温下，一定量气体的容积 v 与它的压力 p 成反比"（物理和化学上称此为玻意耳定律）这一定律的数学表达式是 $v=\frac{k}{p}$ 或 $pv=k$（常数）由大量实验数据归纳出："在恒压下，温度每升高一度，单位容积的气体的容积增量是一常数"。即 $\frac{V_t-V_0}{V_0 t}=a_p$。式中 V_t 与 V_0 表示气体在 $t°C$ 与 $0°C$ 时的容积，a_p 是一常数，称为气体的定压膨胀系数（这一定律称盖·吕萨克定律）上式可改写为：$V_t=V_0(1+a_p t)$　式子右端是一代数式，V_0 与 a_p 是常量，温度 t 值是变量，V_t 是函数。

再由大量实验数据可得到："在气体容积不变情况下，温度每升高一度，气体压力增量对原压力比是一常量"，由此引出：

$\frac{p_t-p_0}{p_0 t}=a_v$　即 $p_t=p_0(1+a_v t)$，式中 p_0 是气体在 $0°C$ 时压力，p_t 是 $t°C$ 时压力，a_v 是定容增压系数，易见 p_0 与 a_v 是常量，t 是自变量，p_t 是因变量（函数）（这一定律也是盖·吕萨定律，称为乙式，称前为甲式）。

由上可见大量实验结果归纳成自然科学定律时总是利用代数式将它"翻译"成数学语言，从而列成函数解析式，当函数式中相互影响的两个变量中已确定了一个的值时，函数式就转化为方程，相应待定其值的变量就成为未知数了。

例三：代数式的变换化简往往可以把已经得到的实验定律改变得更为简明扼要，有时还可推导出一些新的事理出来。现在就例二进行研究，某气体开始状态是（p_0 V_0 0）变化后的状态是（p_t V_t t），采用下列二种程序进行变化。

第一种：

(1) 温度 0°C 不变，$p_0 \to p_t$。

则由玻意耳定律，容积为：$\frac{p_0 V_0}{p_t}$。

(2) p_t 不变，$0 \to t$。

则由盖·吕萨克定律，甲式

$$V_t = \frac{p_0 V_0}{p_t}(1 + a_p t)$$

即 $p_t V_t = p_0 V_0 (1 + a_p t)$。

第二种：

(1) 温度 0°C 不变，$V_0 \to V_t$。

则由玻意耳定律，压力为：$\frac{p_0 V_0}{V_t}$。

(2) V_t 不变，$0 \to t$。

则由盖·吕萨克定律，乙式

$$p_t = \frac{p_0 V_0}{V_t}(1 + a_v t)$$

即 $p_t V_t = p_0 V_0 (1 + a_v t)$。

上述二种结果，应该一致，故以 $p_0 V_0 (1 + a_p t) = p_0 V_0 (1 + a_v t)$

$\therefore$ $a_p = a_v$，经过试验 $a_p = a_v = \frac{1}{273.16} \doteq \frac{1}{273}$，于是 $p_t V_t = p_0 V_0 (1 + \frac{1}{273} t)$。

由上式可看出如温度 t 降到 $-273°C$ 则 $p_t V_t = 0$，由前述甲、乙两式分别观察则 $p_t = 0$ $V_t = 0$，这当然不可能，因为物质不会消灭，它是占有一定体积的，实际上所有气体在未达到此温度前就已经凝成液体而后变成固体了，已经丧失了气体性质，上述公式是气体的公式当然不能再适用了。列宁在《唯物主义和经验批判主义》中教导我们：“日益发展的人类科学在认识自然界上的这一切里程碑都具有暂时的、相对的、近似的性质”。数学上描述自然规律的公式更是如此，它总有一定局限性和近似性，应用时一定要注意到成立的条件。

由上我们得到 $p_t V_t = p_0 V_0 \left(\frac{273 + t}{273 + 0}\right)$，故物理、化学上引入绝对温度（°K）的概念，即绝对温标 $T°K = 273 + t°C$。于是 $p_t V_t = \frac{p_0 V_0}{T_0} T$，因 $\frac{p_0 V_0}{T_0}$ 是一常数，记为 γ，又 p_t、V_t 是任一温度时的 p 与 V，结果是 $pV = \gamma T$，这就是理想气体的气态

方程。由气体方程可知：定温时，p 与 v 成反比；定压（定容）时，$v(p)$ 与 T 成正比。

例四：一切物体都在互相吸引着，物体落到地球上，月亮绕地球运动，地球绕太阳运动，都是由于引力作用。1687年牛顿概括了人们在生产实践和生活实践中的经验提出了万有引力定律。定律的内容是"任何两个物体都互相以一力吸引着，这个力是和两物体的质量乘积成正比，和它们距离的平方成反比"。用代数法则成函数解析式就是：$f=k\frac{m_1m_2}{r^2}$。式中 k 是引力常数，它的数值决定于力 f、质量 m_1，m_2，和距离 r 的单位。

习题 2-1

1. 下列代数式，哪些是整式？分式？根式？

   $\frac{x}{a}$，$\frac{3}{4}x^2y+7xy^2$，$\sqrt{2}y$，$\sqrt{\frac{5}{3}}$，$-\frac{1}{7}$，$\frac{3}{6+x}$，$\frac{2y^2}{\pi}$，$\sqrt[5]{3p}$，$\sqrt{a}xy$。

2. 下列整式中哪些是单项式？哪些是多项式？指明它们的次数，项数。指出它们的系数，常数项。指出变量或未知数。

   ax^2+bx+c，$\sqrt{3}x^5+x^2-x+\sqrt{5}$，$-ax^3y$，$\frac{ab}{3}+\frac{2ac}{3}-\frac{c}{5}$，$-\frac{\sqrt{2}}{3}+\sqrt{5}$，

   $\frac{2+\sqrt{5}}{2}x^2y$，$\frac{a+b}{3}x$，$ay+by$，b^2-4ac，$\sqrt{a+\sqrt{b}}\,x$，$\sqrt{a+\sqrt{b}\,x}$。

3. 将下列多项式分别按降门和升门排列，并求出对应于已知的变量值的代数式值。

   (1) $4x^2y-xy^2+x^3-y^3$，$x=0$，$y=1$。 (2) $\sqrt{2}xy-x^2+y^2$，$x=1$ $y=0$。

   (3) $12x^5+6x^7-x^6+2+3x^4-x+3x^2-x^3+x$，$x=1$ 及 $x=-1$。

4. "666"原药粉中含有纯药量14%，现有"666"x 斤，求共含多少纯药量（y）？

5. 浓度95%硫酸 x kg可以稀释成75%的硫酸 y kg，写出 x 与 y

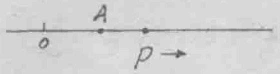
的关系式，问当 $x=100$ kg，$y=?$

6、一度电是10个100瓦灯泡开灯一小时所消耗的电量。

(1) 如果电灯总瓦数为 a 瓦，开灯 x 小时，求电量（度数）y 的代数式

(2) 如室内有5个40瓦灯泡每天开灯4小时，问30天用几度电？

7. 如图一质点 P 在数轴上作匀速运动，速度为 v cm/秒，出发



点是 A，$OA=s$。

求开始运动 t 秒后求 P 所在位置的坐标 S 的代数式

8、金属线热胀冷缩，温度每升高一度，金属线长度增量（即因热胀增加的长度）是原来长度 l_0 的 α 倍（α 称为线膨胀系数）设温度由 t_0 增至 t，金属线长度由 l_0 变至 l，求 l 的代数式。如取 $\Delta l=l-l_0$，$\Delta t=t-t_0$，再求 Δl 的代数式。（Δl 与 Δt 表示长度与温度的增量）

9. 设 β 为金属块的体膨胀系数（温度每升高一度，单位体积的增量对于原来体积比），Δt 为温度增量（$\Delta t=t-t_0$），V_0、V 分别是 t_0°C 及 t°C 时的体积，求 V 的代数式

10、压强 $p=\dfrac{\text{压力}F}{\text{受力面积}S}$、现有一圆柱形容器，截面面积为 S，储液体高度为 h，液体的比重为 d，求液体压强表达式。

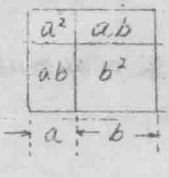
11. 电热器中电压1伏电流1安培每秒钟所消耗的电量叫做一瓦，它在一秒时间内可产生热量0.24卡。（使1c.c.水温度升高1°C的平均热量约为1卡）。现以 U 表示电压（伏），I 表示电流（安），Q 表示热量（卡），t 表示时间（秒），写出 Q 的代数式。现有电热器使用的电压是200伏，通过电流强度是3安培，求使用5分钟所产生的总热量。

§2-2. 整式的四则运算：

一、整式的加减

1、整式中各项如仅是系数不同则称为同类项。整式的加减就是合并同类项。

例一、如图边长为 $(a+b)$ 的正方形，其面积 S 显见是 $a^2+ab+ab+b^2$ 即 $S=a^2+ab+ab+b^2$



式中：ab 与 ab 是同类项。

故 $S=a^2+2ab+b^2$

同学们已学过数的乘法分配率，故可以自行验证 $S=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

例二、简化：$\sqrt{2}x^2+x-\sqrt{3}x^2+5+\sqrt{2}x$，并求 $x=1$ 时的代数值：

解：原式 $=(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2+(1+\sqrt{2})x+5$

记原式为：$f(x)$，则 $f(1)=(\sqrt{2}-\sqrt{3})+(1+\sqrt{2})+5$

$$=6+2\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$=6+2\times1.414-1.732\doteq7.09$$

2、多项式的加减法要点在于先去括号，后并同类项。去括号的规律与数的运算同，再将规律重复一下：括号前是加号，去括号时，括号内各项不变号，反之加括号亦然。

括号前是减号，去括号时，括号内变号，反之加括号亦然。

例一：$2x-[x-9y-(2x-3y-\{x+5y\})]$ 化为简式

原式 $=2x-3x+9y+(2x-3y-\{x+5y\})$

$=2x-3x+9y+2x-3y-x-5y$

$=(2x-3x+2x-x)+(9y-3y-5y)=y$（这是先去外层括号）

或：原式 $=2x-[3x-9y-(2x+3y-x-5y)]$

$=2x-[3x-9y-2x+3y+x+5y]$

$=2x-3x+9y+2x-3y-x-5y=y$（这是先去内层括号）

注意：为简化起见，最好边去括号边化简，内外层括号也同时去。

原式 $= -x+9y+2x-3y-x-5y=y$

例二：$y-[2x-(z-3y)]+[x-(3y-z)]$

原式 $= y-2x+z-3y+x-3y+z=-x-5y+2z=-(x+5y-2z)$.

二、整式的乘法与某些重要乘法公式：

1. 单项式乘法的要点是系数相乘. 乘时应用冪指数运算律.

例一：$(\frac{3}{2}xy^2)(-\frac{1}{3}x^3yz^2)(-xy)$.

上式 $=[\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})(-1)][xy^2\cdot x^3yz^2\cdot xy]=\frac{1}{2}x^5y^4z^2$.

熟练后可直接写出：原式 $=\frac{1}{2}x^5y^4z^2$.

例二：$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2y$ 与 $\frac{-4}{\sqrt{3}}xy^4z$ 乘积

原式 $=-2x^3y^5z$

2. 多项式相乘的要点是先按乘法分配律展开. 应按单项式相乘进行化简.

例一：$(x-1)(x+2)=$?

$$
\begin{array}{rr}
 & x-1 \\
\times) & x+2 \\
\hline
 & x^2-x \\
+) & -2x-2 \\
\hline
 & x^2-x-2
\end{array}
$$

原式 $=(x-1)\cdot x+(x-1)\cdot 2$

$= x^2-x+2x-2$

$= x^2+x-2$

例二：求 $(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$ 连乘积

原式 $=(x^4+1)[(x^2+1)(x^2-1)]^{*}$

$=(x^4+1)(x^4-1)^{\Delta}$

$=x^8-1$

$^{*}(x^2+1)(x^2-1)=x^4+x^2-x^2-1=x^4-1$

$^{\Delta}(x^4+1)(x^4-1)=x^8+x^4-x^4-1=x^8-1$

例三：$(3x^2-xy+2y^2)(3y^2-xy+2x^2)$

原式 $=(3x^2-xy+2y^2)(2x^2-xy+3y^2)$

将后一因式也按 x 降冪排列之，使乘积排列有规律.

上式 $=$ (前一因式) $2x^2+$ (前一因式) $(-xy)+$ (前一因式) $(3y^2)$ 熟练演算时不必写出，记在心中。

$=6x^4-2x^3y+4x^2y^2-3x^3y+x^2y^2-2xy^3+9x^2y^2-3xy^3+6y^4$

$=6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4$

像这样幂次很有规律的因式相乘，可以把系数分离出来，列竖式演算较简，称为分离系数法。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^2 & xy & y^2 & & \\
 & 3 & -1 & 2 & & \\
\times) & 2 & -1 & 3 & & \\
\hline
 & 6 & -2 & 4 & & \\
 & & -3 & 1 & -2 & \\
+) & & & 9 & -3 & 6 \\
\hline
 & 6 & -5 & 14 & -5 & 6 \\
 & x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4
\end{array}
$$

仿上法计算 $(x^3-5x^2+1)(2x^3+5x^2+1)$

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
1 & -5 & 0 & 1 & & & \\
2 & 5 & 0 & 1 & & & \\
\hline
2 & -10 & 0 & 2 & & & \\
 & 5 & -25 & 0 & 5 & & \\
 & & & 1 & -5 & 0 & 1 \\
\hline
2 & -5 & -25 & 3 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

即原式 $=2x^6-5x^5-25x^4+3x^3+1$

例四：$(2a^3x^3-3a^2x^2y^2+5y^6)(a^3x^3+4axy^4-2y^6)$

原式 $=[2(ax)^3-3(ax)^2(y^2)+5(y^2)^3][(ax)^3+4(ax)(y^2)^2-2(y^2)^3]$

如取 $ax=u$ $y^2=v$

则原式 $=(2u^3-3u^2v+5v^3)(u^3+4uv^2-2v^3)$. 这种方法叫做换变量，其作用是化繁为简，化难为易，在数学中常用。

$$
\begin{array}{l}
2-3+0+5 \\
1+0+4-2 \\
\hline
2-3+0+10 \\
\quad 8-12+0+20 \\
\qquad -4+6+0-10 \\
\hline
2-3+8-6+6+20-10
\end{array}
$$

注意到乘积的首项是 $2u^6v^0$ 以后 u 的指数逐项减1，v 的指数逐项增1。

故原式 $=2u^6-3u^5v+8u^4v^2-6u^2v^3+6u^2v^4+20uv^5-10v^6$，再以 $v=y^2$ 代入得到：

原式 $=2a^6x^6-3a^5x^5y^2+8a^4x^4y^4-6a^3x^3y^6+6a^2x^2y^8+20axy^{10}-10y^{12}$.

3、应用多项式乘法可得到一些有用的乘法公式如下：

(1). $(a+b)^3=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2). $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3). $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4) $(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$

(5) $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$

(6) $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

乘法公式有各种应用．兹举例如下：

例一．应用乘法公式可简化多项式乘法运算．

$$(3x^2+5xy-6y^2)(3x^2-5xy+6y^2)=[3x^2+(5xy-6y^2)][3x^2-(5xy-6y^2)]=(3x^2)^2-(5yx-6y^2)^2$$
$$=9x^4-25x^2y^2+60xy^3-36y^4$$

例二：应用乘法公式可求得某些特殊分式结果：

$$(27a^6-8b^9)\div(3a^2-2b^3)=[(3a^2)^3-(2b^3)^3]\div(3a^2-2b^3)$$
$$=(3a^2)^2+(3a^2)(2b^3)+(2b^3)^2$$
$$=9a^4+6a^2b^3+4b^6$$

例三：应用乘法公式可简化数值的计算．

$$87\times93=(90+3)(90-3)=90^2-3^2=8100-9=8091$$
$$999^2=(1000-1)^2=10^6-2000+1=998,001$$
$$1027\div13=(10^3+3^3)\div(10+3)$$
$$=10^2-3\times10+3^2=100-30+9=79$$
$$100.01^2=(100+0.01)^2=100^2+2\times100\times0.01+0.01^2$$
$$=10002.0001\doteq10,002$$

例四：应用乘法公式可得到一些近似公式．

$$(x+\delta)^2=x^2+2\delta x,\quad 当\ \delta\ll x$$

例如上节中：体膨胀系数为β，线膨胀系数为α，一般地α，β均很小，且$\beta\doteq3\alpha$，可证明如下：

$$l=l_0(1+\alpha\Delta t)$$
$$V=V_0(1+\beta\Delta t)$$

因 $V=l^3$，故 $V_0(1+\beta\Delta t)=l_0^3(1+\alpha\Delta t)^3$
$$=l_0^3[1+3\alpha\Delta t+3\alpha^2(\Delta t)^2+\alpha^3(\Delta t)^3]$$

由于$V_0=l_0^3$，最右端括号中第三、四两项甚小可忽略不计，$\therefore\beta\doteq3\alpha$.

三、因式分解

1.毛主席教导我们："我们必须学会全面地看问题，不但要看到事物的正面，也要看到它的反面"。在数学上每个运算，每一步推导都有其反面的，上面所说的乘法公式，从等号左端到右端是多项式相乘的展开式，反之从右向左则是把乘积重新分解为因式相乘，在很多问题中都需要熟悉这两方面的运算。下面着重讲因式分解，它的法则可类比于合数的质因数分解而建立之。

2.把一个多项式转化成几个整式的积，叫做因式分解，其方法有：

(1). 应用乘法的交换律、结合律，分配律分解因式

(2). 应用乘法公式分解因式

(3). 二次三项式的分裂中项法.

(4). 配方的分解法.

对上述方法举例说明如下：

3. 应用乘法的交换律、结合律、分配律分解因式.

例一：直接提公因式法，例如 $am+bm+cm=m(a+b+c)$.

例二：先分组结合，再提取公因式.

例如：$(x+y)(a^2+a+1)-(x-b)(a^2+a+1)=(y+b)(a^2+a+1)$.

再例如：$ab+1-a-b=(ab-a)+(1-b)=a(b-1)-(b-1)$

$$=(a-1)(b-1)$$

例三：分组结合时须调整符号.

$$2x(2x-y)^2-\underline{y(y-2x)^2}=2x(2x-y)^2-\underline{y(2x-y)^2}=(2x-y)^3.$$

注意：$(y-2x)^2=(2x-y)^2$ 偶次方才能如此.

如系 $2x(2x-y)^3-y(y-2x)^3$ 则原式 $=2x(2x-y)^3+y(2x-y)^3$

$$=(2x+y)(2x-y)^3$$