普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学

（上册）

谢寿才 唐 孝 李林珂
邓丽洪 尹忠旗 陈 渊 编

科学出版社

普通高等教育 规划教材

高等数学

(上册)

谢寿才 唐孝 李林珂
邓丽洪 尹忠旗 陈渊 编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书根据高等学校理工科本科专业高等数学课程的教学基本要求，结合国家质量工程培养应用型人才的指导思想，借鉴多年的教学实践及近几年的考研大纲编写而成. 本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确，在内容上力求适用、简明、易懂；在例题的选择上力求具有层次性、全面性和典型性，注重理论知识与实际应用相结合，增加生活和工程技术应用相关的知识以提高学生分析和解决问题的能力.

本书分上、下两册. 上册包括一元函数微积分学、无穷级数，下册包括空间解析几何、多元函数微积分学和微分方程. 各小节均配有习题，各章配有总习题，习题中包含近几年与本章内容有关的考研真题，书末配有习题提示及参考答案.

本书可作为高等院校理工类专业教材使用，也可作为考研学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/谢寿才等编. —北京：科学出版社，2017. 8
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-053475-0
Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①谢… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 135110 号

责任编辑：王胡权／责任校对：王晓茜
责任印制：白 洋／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天津市新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 8 月第一次印刷 印张：21 1/4
字数：428 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

本书根据高等学校理工科本科专业高等数学课程的教学基本要求，结合国家质量工程培养应用型人才的指导思想，借鉴多年的教学实践及近几年的考研大纲编写而成．本书结构严谨、逻辑清晰、概念准确，在内容上力求适用、简明、易懂；在例题的选择上力求具有层次性、全面性和典型性，注重理论知识与实际应用相结合，增加生活和工程技术应用相关的知识以提高学生分析和解决问题的能力．

本书是为了适应新形势下高等数学教学模式改革过程中要突出应用型人才培养的特点，以提高学生的数学素质，培养学生创造性地解决实际问题的能力为宗旨编写而成的．全书内容编排新颖，对高等数学教材的内容和编排进行了较大幅度的调整．在第 1 章中适当精简了初等函数的内容，将集合、映射、函数的定义学生熟知的内容进行了精简；在第 8 章中对向量代数进行了适当精简，适当降低了部分内容的深度和广度，淡化了某些知识点的定理证明和不必要的繁琐，提高了数学思想和数学应用方面的要求．在内容编排上将无穷级数和微分方程的位置进行了调整，分别调整为上册的第 7 章和下册的第 12 章．

本书分上、下两册．上册包括一元函数微积分学、无穷级数，下册包括空间解析几何、多元函数微积分学和微分方程．各小节均配有习题，各章配有总习题，习题中包含近几年与本章内容有关的考研真题，书末配有习题参考答案及提示．本书由四川师范大学数学与软件科学学院大学数学教研室具有丰富教学经验的一线教师编写完成．第 1、2、3、7、9、12 章由李林珂执笔，第 4、5、6 章由唐孝执笔，第 8 章由陈渊执笔，第 10、11 章由尹忠旗执笔．谢寿才、邓丽洪对各章节的初稿作了详细的修改，最后由谢寿才、唐孝、邓丽洪统一定稿．

本书可供高等学校理工科类各专业学生使用，也可作为广大教师、考研学生及工程技术人员的参考书．

本书在编写过程中得到了四川师范大学数学与软件科学学院领导及大学数学教研室各位老师的大力支持，科学出版社编辑对本书的出版付出了大量心血，在此向他们表示由衷的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不足与疏漏，敬请读者批评指正．

编　者

2017 年 4 月

目　录

前言
第 1 章　函数、极限与连续 ······ 1
1.1　函数 ······ 1
1.1.1　集合、区间、邻域 ······ 1
1.1.2　函数的概念 ······ 2
1.1.3　函数的特性 ······ 4
习题 1.1 ······ 6
1.2　初等函数 ······ 7
1.2.1　反函数 ······ 7
1.2.2　基本初等函数 ······ 7
1.2.3　复合函数 ······ 9
1.2.4　初等函数 ······ 10
1.2.5　双曲函数及反双曲函数 ······ 10
习题 1.2 ······ 12
1.3　数列的极限 ······ 12
1.3.1　数列极限的概念 ······ 13
1.3.2　数列极限的性质 ······ 15
习题 1.3 ······ 17
1.4　函数的极限 ······ 18
1.4.1　当 $x \to \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限 ······ 18
1.4.2　当 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限 ······ 20
1.4.3　函数极限的性质 ······ 23
习题 1.4 ······ 24
1.5　无穷大与无穷小 ······ 25
1.5.1　无穷小量 ······ 25
1.5.2　无穷大量 ······ 27
1.5.3　无穷大量与无穷小量的关系 ······ 28
习题 1.5 ······ 29
1.6　极限的运算法则 ······ 29
习题 1.6 ······ 33

1.7　极限存在准则及两个重要极限 …… 34
1.7.1　极限存在准则 …… 34
1.7.2　两个重要极限 …… 36
习题 1.7 …… 39
1.8　无穷小量阶的比较 …… 40
习题 1.8 …… 42
1.9　函数的连续性与间断点 …… 42
1.9.1　函数的连续性 …… 42
1.9.2　函数的间断点 …… 44
习题 1.9 …… 47
1.10　连续函数的运算及闭区间上连续函数的性质 …… 48
1.10.1　连续函数的四则运算 …… 48
1.10.2　反函数与复合函数的连续性 …… 48
1.10.3　初等函数的连续性 …… 49
1.10.4　闭区间上连续函数的性质 …… 51
*1.10.5　函数的一致连续性 …… 53
习题 1.10 …… 54
总习题 1 …… 55
第 2 章　导数与微分 …… 57
2.1　导数的概念 …… 57
2.1.1　引例 …… 57
2.1.2　导数的定义 …… 59
2.1.3　求导数举例 …… 62
2.1.4　导数的几何、物理、化学意义 …… 63
2.1.5　函数的可导性与连续性的关系 …… 65
习题 2.1 …… 66
2.2　函数的求导法则 …… 67
2.2.1　导数的四则运算法则 …… 67
2.2.2　反函数的导数 …… 69
2.2.3　复合函数的求导法则 …… 71
习题 2.2 …… 75
2.3　高阶导数 …… 76
习题 2.3 …… 79
2.4　隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 79
2.4.1　隐函数的导数 …… 79

2.4.2 对数求导法 …… 81
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数 …… 82
2.4.4 相关变化率 …… 85
习题 2.4 …… 86
2.5 函数的微分 …… 87
2.5.1 微分的定义 …… 87
2.5.2 微分的几何意义 …… 89
2.5.3 基本初等函数的微分公式和微分的运算法则 …… 90
2.5.4 微分在近似计算中的应用 …… 92
习题 2.5 …… 94
总习题 2 …… 95
第 3 章 中值定理与导数的应用 …… 97
3.1 中值定理 …… 97
3.1.1 罗尔 (Rolle) 定理 …… 97
3.1.2 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理 …… 99
3.1.3 柯西 (Cauchy) 中值定理 …… 103
习题 3.1 …… 104
3.2 洛必达 (L′Hospital) 法则 …… 105
习题 3.2 …… 109
3.3 泰勒公式 …… 110
3.3.1 泰勒 (Taylor) 公式 …… 110
3.3.2 常见初等函数的带皮亚诺型余项的麦克劳林公式 …… 114
3.3.3 麦克劳林公式和泰勒公式的应用 …… 115
习题 3.3 …… 117
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 118
3.4.1 函数的单调性 …… 118
3.4.2 曲线的凹凸性 …… 120
习题 3.4 …… 124
3.5 函数的极值与最值 …… 125
3.5.1 函数的极值 …… 125
3.5.2 函数的最值 …… 128
习题 3.5 …… 131
3.6 函数图形的描绘 …… 132
3.6.1 渐近线 …… 132
3.6.2 函数图形的描绘 …… 133

习题 3.6 ······ 135
3.7 平面曲线的曲率 ······ 136
3.7.1 曲线曲率的定义 ······ 136
3.7.2 弧长的微分 ······ 138
3.7.3 曲率的计算及曲率半径 ······ 139
习题 3.7 ······ 142
总习题 3 ······ 142
第 4 章 不定积分 ······ 146
4.1 不定积分的概念与性质 ······ 146
4.1.1 原函数与不定积分的概念 ······ 146
4.1.2 不定积分的几何意义 ······ 148
4.1.3 不定积分的性质 ······ 148
4.1.4 基本积分公式 ······ 149
习题 4.1 ······ 151
4.2 换元积分法 ······ 151
4.2.1 第一换元法 (凑微分法) ······ 151
4.2.2 第二换元积分法 ······ 157
习题 4.2 ······ 161
4.3 分部积分法 ······ 162
习题 4.3 ······ 166
4.4 有理函数的积分 ······ 166
4.4.1 有理函数的积分 ······ 166
4.4.2 可化为有理函数的积分 ······ 170
习题 4.4 ······ 172
总习题 4 ······ 172
第 5 章 定积分 ······ 174
5.1 定积分的概念与性质 ······ 174
5.1.1 定积分问题举例 ······ 174
5.1.2 定积分的定义 ······ 176
5.1.3 定积分的性质 ······ 179
习题 5.1 ······ 183
5.2 微积分基本公式 ······ 183
5.2.1 积分上限函数及其导数 ······ 184
5.2.2 微积分基本公式 ······ 188
习题 5.2 ······ 190

5.3　定积分的积分方法 ······ 191
5.3.1　定积分的换元积分法 ······ 191
5.3.2　定积分的分部积分法 ······ 196
习题 5.3 ······ 198
5.4　定积分的近似运算 ······ 199
5.4.1　矩形法 ······ 199
5.4.2　梯形法 ······ 199
5.4.3　抛物线法 (辛普森法) ······ 200
习题 5.4 ······ 201
5.5　广义积分 ······ 202
5.5.1　无穷限的广义积分 ······ 202
5.5.2　无界函数的广义积分 ······ 204
习题 5.5 ······ 206
*5.6　广义积分的审敛法与 Γ 函数 ······ 206
5.6.1　无穷限的广义积分的审敛法 ······ 206
5.6.2　无界函数的广义积分的审敛法 ······ 208
5.6.3　Γ 函数 ······ 209
习题 5.6 ······ 210
总习题 5 ······ 210
第 6 章　定积分的应用 ······ 213
6.1　定积分的微元法 ······ 213
6.2　定积分在几何学上的应用 ······ 215
6.2.1　平面图形的面积 ······ 215
6.2.2　体积 ······ 218
6.2.3　平面曲线的弧长 ······ 221
习题 6.2 ······ 223
6.3　定积分在物理学上的应用 ······ 224
6.3.1　变力做功问题 ······ 224
6.3.2　水压力 ······ 225
6.3.3　引力 ······ 226
6.3.4　转动惯量 ······ 227
习题 6.3 ······ 228
总习题 6 ······ 228
第 7 章　无穷级数 ······ 230
7.1　常数项级数的概念和性质 ······ 230

7.1.1 引例 ······ 230
7.1.2 常数项级数的概念 ······ 231
7.1.3 收敛级数的基本性质 ······ 233
习题 7.1 ······ 236
7.2 常数项级数审敛法 ······ 237
7.2.1 正项级数审敛法 ······ 237
7.2.2 交错级数的审敛法 ······ 244
7.2.3 绝对收敛与条件收敛 ······ 245
习题 7.2 ······ 247
7.3 幂级数 ······ 249
7.3.1 函数项级数的概念 ······ 249
7.3.2 幂级数的收敛性 ······ 250
7.3.3 幂级数的运算 ······ 255
习题 7.3 ······ 258
7.4 函数展开成幂级数 ······ 259
7.4.1 泰勒级数的概念 ······ 259
7.4.2 将函数展开成幂级数 ······ 261
习题 7.4 ······ 267
7.5 函数的幂级数展开式的应用 ······ 267
7.5.1 求常数项级数的和 ······ 267
7.5.2 函数值的近似计算 ······ 268
7.5.3 定积分的近似计算 ······ 269
7.5.4 欧拉公式 ······ 270
习题 7.5 ······ 271
7.6 傅里叶 (Fourier) 级数 ······ 272
7.6.1 三角级数、三角函数的正交性 ······ 272
7.6.2 周期为 2π 的函数的傅里叶级数 ······ 273
7.6.3 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 ······ 280
*7.6.4 傅里叶级数的复数形式 ······ 283
习题 7.6 ······ 285
总习题 7 ······ 287
习题参考答案及提示 ······ 291
参考书目 ······ 328

第1章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，是微积分的主要研究对象，其研究方法是极限方法. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识及基本方法.

1.1　函　　数

1.1.1　集合、区间、邻域

具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**，构成这个集合的每一个对象称为该集合的**元素**. 集合的表示及其运算在中学已学过了，这里就不再一一介绍.

常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$. 各数集之间的关系为 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

下面介绍一类特殊的集合：**区间**

定义 1.1.1　设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

称 a,b 为**区间**(a,b)**的端点**，$b-a$ 为**区间**(a,b)**的长度**.

将区间长度为有限的区间称为**有限区间**，区间长度为无限的区间称为**无限区间**. 有限区间可分为开区间、闭区间和半开区间.

开区间　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

闭区间　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

半开区间　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$;

无限区间　$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$, $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$, $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

定义 1.1.2　设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，且 $\delta>0$，称数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 为**点**a**的**δ**邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$$

称点 a 为**邻域中心**，δ 为**邻域半径**.

由于 $|x-a|<\delta$ 相当于 $a-\delta<x<a+\delta$，所以

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$

即点 a 的 δ 邻域在数轴上是一个以点 a 为中心, 长度为 2δ 的**开区间**(图 1.1).

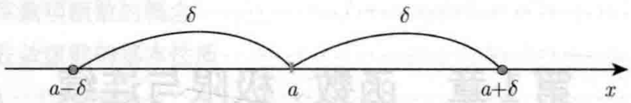

图 1.1

将邻域 $U(a,\delta)$ 的邻域中心 a 去掉, 得到的数集称为**点a的δ去心邻域**, 记为 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便, 将开区间 $(a-\delta,a)$ 称为**点a的左δ邻域**, 开区间 $(a,a+\delta)$ 称为**点a的右δ邻域**.

1.1.2　函数的概念

1. 函数的概念

函数是描绘多个变量间相互依赖关系的一种数学模型. 我们先研究两个变量的情形 (多于两个变量的情况将在第 9 章中学习). 例如自由落体运动中, 物体的位移 s 与时间 t 之间的关系为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$(其中 g 为重力加速度), 这就是一种函数关系.

定义 1.1.3　设 D 是一非空数集, 如果对任意 $x\in D$, 按某一对应法则 f, 总有唯一确定的 y 值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**, y 称为**因变量或函数**, D 称为**定义域**, 记为 D_f. 当 $x_0\in D$ 时, 称 $f(x_0)$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值. 所有的函数值所构成的集合称为函数的值域, 记作 R_f, 即

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

平面上的点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**. 函数的定义域是使表达式有意义的一切实数的集合. 在实际问题中, 应根据问题的实际意义来确定. 如 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中, 设开始下落时刻为 $t=0$, 落地时刻为 $t=T$, 则它的定义域为 $D=[0,T]$.

例 1.1.1　求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$ 的定义域.

解　要使函数有意义, 则

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases} \Rightarrow -4 \leqslant x < -\pi \text{或} 0 < x < \pi.$$

所以, 函数 $y = \sqrt{16 - x^2} + \ln \sin x$ 的定义域为 $[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

2. *函数的表示*

函数通常用以下三种方法来表示:

(1) **解析法 (公式法)** 用数学解析式表示自变量 x 与因变量 y 之间关系的方法.

(2) **表格法** 因变量与自变量的关系可用一表格表示.

(3) **图象法** 因变量与自变量的关系由平面直角坐标系中的曲线给出.

3. *分段函数*

在实际应用中通常遇到这样的函数: 在定义域的不同范围内, 函数分别用不同的解析表达式来表示, 这类函数称为**分段函数**. 例如, $y = \begin{cases} x-1, & x \geqslant 0, \\ x+1, & x < 0. \end{cases}$

下面介绍几个常用的分段函数.

(1) **符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{1, 0, -1\}$(图 1.2).

(2) **取整函数**

$$y = [x],$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 如 $[-3.12] = -4$, $[3.9] = 3$. 它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$(图 1.3).

(3) **狄利克雷 (Dirichlet) 函数**

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

它的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = \{0, 1\}$.

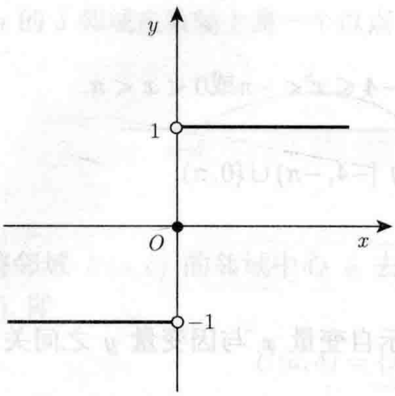

图 1.2

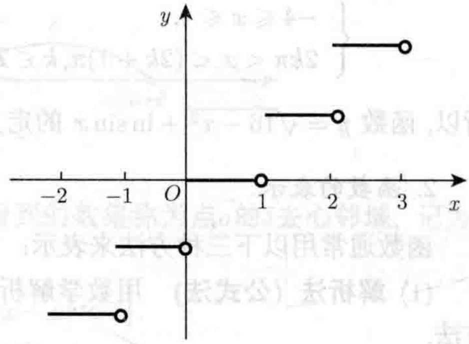

图 1.3

1.1.3　函数的特性

1. 有界性

定义 1.1.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $X\subset D$. 如果存在正实数 M, 使得对任意 $x\in X$, 有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $y=f(x)$ 为 X 上的**有界函数**, 否则称为**无界函数**.

注 1.1.1　有界性与区间有关. 例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界, 但在区间 $(0,1)$ 内无界. 事实上, 对于任意 $x\in(1,2)$, 都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$, 所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界. 而对于任意正实数 M(不妨设 $M>1$), 取 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$, 有

$$|f(x_0)|=\left|\frac{1}{x_0}\right|=2M>M.$$

所以, 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

2. 单调性

定义 1.1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任意的 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 如果有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上为**单调增加**(或**单调减少**)**函数**.

单调增加函数、单调减少函数统称为**单调函数**(也称**函数具有单调性**).

在几何上, 单调增加 (或减少) 函数的图形是沿 x 轴的正向渐升的 (或渐降的)(图 1.4、图 1.5).

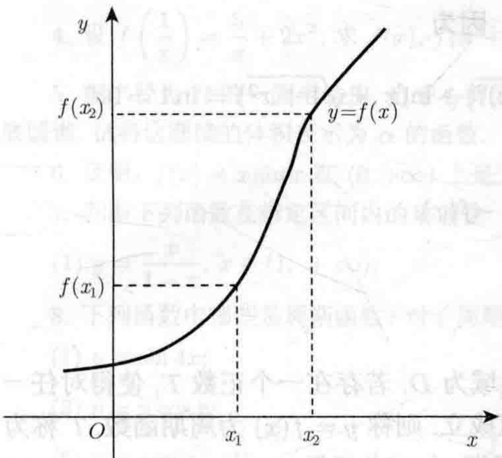

图 1.4

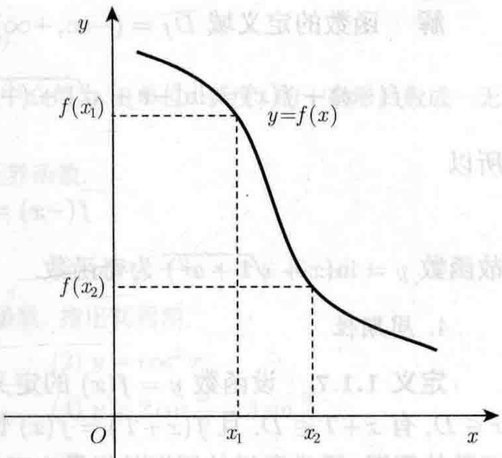

图 1.5

3. 奇偶性

定义 1.1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (若 $x\in D$, 则 $-x\in D$), 如果对任意的 $x\in D$, 有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$), 则称函数 $y=f(x)$ 为**偶函数**(或**奇函数**).

如 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为奇函数, $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为偶函数, $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称 (图 1.6); 偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1.7).

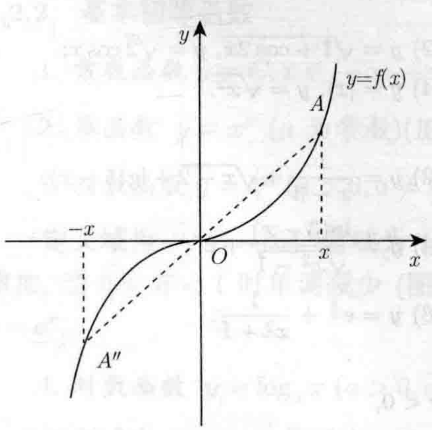

图 1.6

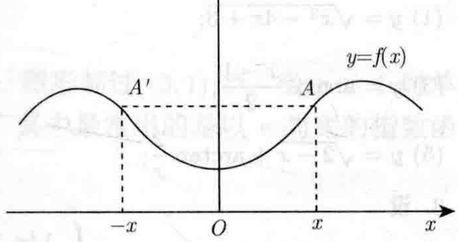

图 1.7

例 1.1.2 判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　函数的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$. 因为

$$f(-x)+f(x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]+\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln 1=0.$$

所以

$$f(-x)=-f(x),$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

4. 周期性

定义 1.1.7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 若存在一个正数 T, 使得对任一 $x\in D$, 有 $x+T\in D$, 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**, T 称为函数的**周期**. 通常所说的周期是指**最小正周期**. 如三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$,$\omega\neq 0$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

周期函数图形的特点: 周期为 T 的周期函数, 在每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状. 并非每个周期函数都有最小正周期, 例如

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

任何正有理数都是它的周期, 但是它没有最小正周期.

习　题　1.1

1. 下列各题中两个函数是否相同? 为什么?

(1) $y=3x-1$, $y=3t-1$;　　(2) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$, $y=\sqrt{2}\cos x$;

(3) $y=\ln x^2$, $y=2\ln x$;　　(4) $y=|x|$, $y=\sqrt{x^2}$.

2. 确定下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x-2}+\lg(5-x)$;

(3) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}$;　　(4) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{x^2-1}}+2^x$;

(5) $y=\sqrt{2-x}+\arctan\dfrac{2}{x}$;　　(6) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & x<0,\\ x-3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -2x+1, & x>1.\end{cases}$$

求分段函数的定义域及 $f(-3)$, $f(0)$, $f(5)$, 并画出其图形.

4. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{5}{x}+2x^2$, 求 $f(x)$, $f(x^2+1)$.

5. 把半径为 R 的一圆形铁皮, 自中心剪去中心角为 α(单位: 弧度) 的一扇形后做成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表示为 α 的函数.

6. 证明: $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数.

7. 判断下列函数在指定区间内的单调性

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(1,+\infty)$; (2) $y=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

8. 下列函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期.

(1) $y=\sin 4x$; (2) $y=\cos^2 x$;

(3) $y=x\cos x$; (4) $y=2\cos\dfrac{x}{2}-3\sin\dfrac{x}{3}$.

(5) $y=\cos(x-2)$; (6) $y=1+\sin\pi x$.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R_f. 如果对任意 $y\in R_f$, 有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应, 且满足 $f(x)=y$, 这样 x 也是 y 的函数, 称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上, 将其记为 $y=f^{-1}(x)$. 称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

直接函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 1.8).

1.2.2 基本初等函数

1. 常数函数 $y=C, x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数)(图 1.9).

3. 指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$.

定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(0,+\infty)$, 图形都过 $(0,1)$ 点. 当 $a>1$ 时单调增加, 当 $0<a<1$ 时单调减少 (图 1.10). 其中最常用的是以 e 为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

4. 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$.

定义域为 $(0,+\infty)$, 值域为 $(-\infty,+\infty)$. 它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数, 两类函数的单调性相同 (图 1.11). 其中最常用的是以 e 为底的对数函数 $y=\ln x$, 称其为**自然对数函数**.