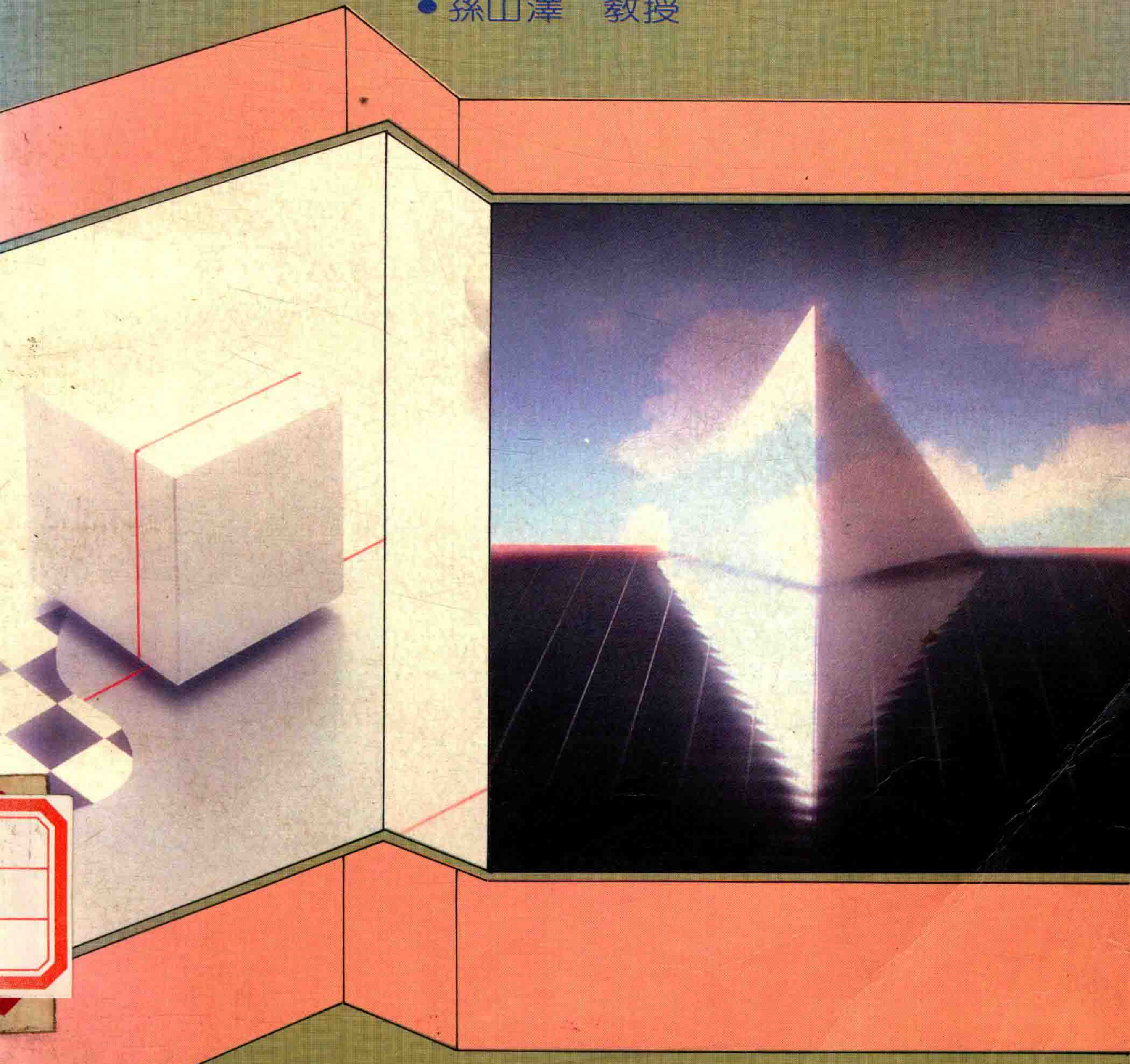
日本 全國大學數學入試問題

第 1 輯 ■ 昭和 63 年度 1988 年度》

北京大學數學系

- 周民強　教授
- 胡德琨　教授　翻譯及校訂
- 孫山澤　教授

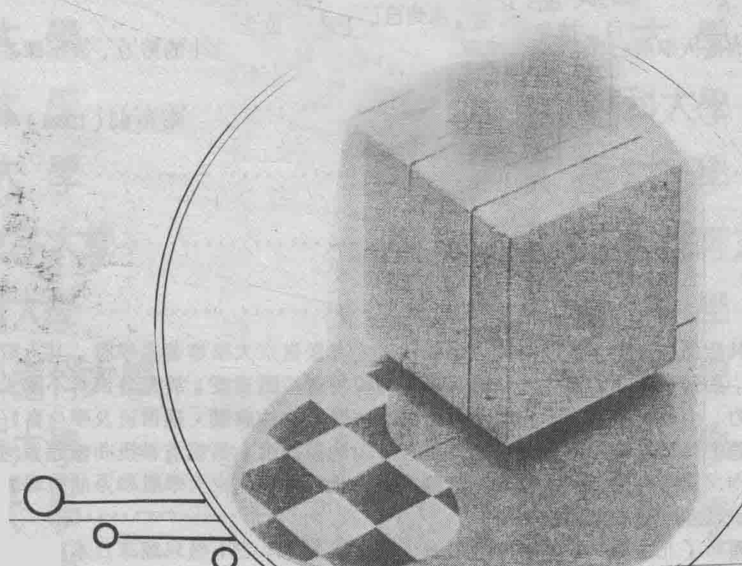


九章出版社

日本 第1輯 《昭和63年度 1988 年度》

全國大學數學入試問題

北京大學數學系
- 周民強 教授
- 胡德琨 教授 翻譯及校訂
- 孫山澤 教授



九章出版社

前　　言

昭和63（1988）年度大學入學考試已經結束了。

本年度是按現行課程進行考試的第四年，對於國立、公立大學而言，本年度又是實行按A、B、C三組進行考試，使考生有多個參考機會的第二年。由於一個學院可以跨A、B兩組等原因，考試制度本身變得複雜起來了。因爲恢復了在第一次考試之後申請參加第二次考試這種「事後申請」辦法，沒有出現去年那樣公佈考試合格情況後的大混亂，但是應當說，對於每年都有所變化的考試制度而言，需要研究的課題還很多。

在這樣考試變革的年代，加之競爭率的提高，人們曾料想數學的難度多少會有些提高，但是由於存在文科、理科分別出題及按學院分別出題的情況，故對包括私立大學在內的整體而言，可以說難度大體上和去年相當。

從過去的經驗看來，可以預想，今後難度不會降低，內容也不會發生大的變化。

以上，我們很粗略地分析了大學入學考試的傾向和特徵，並認爲它們在明年的入學考試中仍將保持下去。應當說，可以根據它們去進行入學考試的準備。

爲了參加入學考試，自然要分析、研究過去的入學考試題目。在本年度的大學入學考試業已結束的現在，本書收錄的各大學入學試題自然是最好的直接資料，仔細地、從多種角度研究這些資料是很必要的。

在昭和64（1989）年度國立、公立大學入學考試中，將在現行的連續方式考試之外增加分離、分割考試；從65（1990）年度開始將以包括私立大學在內的「公共考試」取代持續了10年的公共第一次考試。如此等等表明大學入學考試將迎來變動時期。可以很有把握地預測，在這樣的入學考試中，第二次考試的比重將要增大。因此分析傾向、研究內容就變得更加重要了。

敝社長年以來，連續發行的分科目，按年度「大學入學試題詳解」序列，有幸得到各方人士的好評。今年考慮到上述的各種情況，更加充實了內容，現已進入發行階段。如若本書能對諸位讀者達到自己的目標而有所幫助的話，我們將感到十分榮幸。

最後對提供試題及各種資料的各大學所給予的支持，對執筆解說，解答的各位先生的努力，表示深甚的謝意。

昭和63（1988）年4月

出版者的話

日本的大學入學考試競爭，其激烈程度不下於我國的大學聯考，尤其像東京大學等著名學府，其入取率幾乎只有千分之一。由於競爭的激烈，如何從衆多的考生中，篩選眞正的優秀者益顯重要。於是各校無不講求高度的命題技巧，以求鑑別出考生的實力。由於日本試題的命題十分嚴謹，廣受本地的教師、補習班及學生喜好，常可在參考書，模擬考試甚至聯考考題中見其被採用，但都只是零星、片段地被錄用，甚或有被扭曲原題意的情形。爲了讓讀者能窺得其全貌，而國內又苦無精通日文的數學家之情況下，我們特聘北京大學數學系胡德琨教授，組織一個翻譯小組，將日本各校入學試題嚴謹地翻譯成書。

胡教授所組成的翻譯小組，囊括了北大數學系的三位教授及十數位研究生，它不僅只翻譯日本試題及其解答，並校訂了其錯誤，且注入了其個人的專業學識，詮釋了某些題目，給予其它不同方式的解法，實爲教師教學，學生準備考試，不可多得的好教材。現在胡教授又應本社之聘正著手於翻譯平成元年之試題中，預定79年9月出版，請拭目以待！

九章出版社
孫文先
78.11.20.

目 錄

本書的構成和使用方法 …… 1
公共第一次學力測驗 …… 2
公共第一次學力補充考試 …… 7
北海道大學 …… 12
室蘭工業大學 …… 17
秋田大學 …… 19
岩手大學 …… 23
東北大學 …… 26
山形大學 …… 31
茨城大學 …… 37
筑波大學 …… 40
宇都宮大學 …… 44
群馬大學 …… 48
埼玉大學 …… 52
千葉大學 …… 58
御茶水女子大學 …… 61
電氣通信大學 …… 64
東京醫科齒科大學 …… 67
東京學藝大學 …… 69
東京大學 …… 73
東京工業大學 …… 78
東京商船大學 …… 81
東京水產大學 …… 83
東京農工大學 …… 86
一橋大學 …… 91
橫濱國立大學 …… 94
新潟大學 …… 99
山梨大學 …… 103
信州大學 …… 109
富山大學 …… 115
金澤大學 …… 119
福井大學 …… 123
福井醫科大學 …… 126
靜岡大學 …… 128
濱松醫科大學 …… 131
岐阜大學 …… 134
名古屋大學 …… 139
名古屋工業大學 …… 145
三重大學 …… 148
滋賀醫科大學 …… 152
京都大學 …… 154
京都工藝纖維大學 …… 160
大阪大學 …… 163
大阪教育大學 …… 169
神戶大學 …… 172
岡山大學 …… 177
廣島大學 …… 181
鳥取大學 …… 185
島根大學 …… 190
島根醫科大學 …… 193
山口大學 …… 196
愛媛大學 …… 198

德島大學 201
高知大學 203
九州大學 208
九州藝術工科大學 214
九州工業大學 217
佐賀大學 220
長崎大學 223
熊本大學 228
大分大學 230
大分醫科大學 232
宮崎大學 235
鹿兒島大學 239
東京都立大學 243
東京都立科學技術大學 246
橫濱市立大學 249
岐阜藥科大學 252
名古屋市立大學 254
京都府立醫科大學 259
大阪市立大學 262
大阪府立大學 265
和歌山縣立醫科大學 268
自治醫科大學 271
青山學院大學 280
學習院大學 283
慶應義塾大學 285
工學院大學 292
芝浦工業大學 294
上智大學 297
成蹊大學 302
玉川大學 304
中央大學 306
津田塾大學 309
東海大學 311
東京電機大學 313
東京理科大學 316
東洋大學 319
日本大學 321
日本醫科大學 326
法政大學 331
武藏工業大學 334
明治大學 336
明星大學 339
立教大學 341
早稻田大學 343
神奈川大學 348
關東學院大學 351
同志社大學 354
立命館大學 356
大阪工業大學 358
大阪電氣通訊大學 360
關西大學 362
近畿大學 365
攝南大學 367
關西學院大學 370

本書的構成和使用方法

❶ 試題排列　試題是按大學收錄的，各大學按國立、公立和私立的順序分成先後三組，各組內又按由北到南的順序編排。

❷ 試題難易程度的表示　每個試題的末尾標有表明其難易程度或趨勢的標誌，諸如：基本，標準，稍難，難，頻出，新傾向等。以茲作爲考生判定自己的實力，製定學習計劃之資料。另外所謂難易程度，是按各大學自己的標準來衡量的。

❸ 試題所屬科目、項目　對各試題用諸如「數Ⅰ　整式的計算」，「代幾　向量的內積」等，這種方式表示試題相應的科目名、項目名。如試題由若干屬於不同項目的子試題組成，則按子試題表示其項目。

此外，科目名用如下記號表示

數Ⅰ……數學Ⅰ，代幾……代數、幾何，解析……基礎解析，微積……微分、積分，概統……概率、統計。

❹ 提示　說明試題解法的著眼點及應當特別注意的事項。在讀懂了試題但想不出解法時，請不要立即看解答，可以先參考有關的〔提示〕欄。

❺ 解答　採用的解答，原則上是據高中生的學習能力可得到的標準解答。如篇幅允許，當存在其他不太難的解法時，則將其錄於〔別解〕欄內。如果需要，將在〔研究〕或〔注意〕欄內，對解答的補充、深入分析進行解說，以期得到徹底的理解。

❻ 要點　在試題解答之後，常設〔要點〕欄，簡潔地顯示解答中使用的解法之關鍵或主要的定理、公式等。這樣不僅有助於理解和確切掌握基礎知識，也可使試題的意義和趨勢變得更加明瞭。

「應試的數學」編輯部

公共第一次學力試驗

考試日期：1月24日　　　　時間：100分鐘

考試科目：數Ⅰ必作，數Ⅱ（電子計算機和流程圖除外）中選作2題

一數學Ⅰ：

❶ 今有關於 x 的兩個方程

$$2x^2-2ax-a+1=0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^2-2(a-1)x-2a+1=0 \quad \cdots\cdots ②$$

(1) 當 $a=\boxed{1}\boxed{2}\pm\sqrt{\boxed{3}}$ 時，方程①有重根 $x=\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}a$。

(2) 方程②的解爲$\boxed{6}\boxed{7}$，$\boxed{8}a-\boxed{9}$。又使方程①②有公共解的 a 與相應的公共解構成的（a，x）爲（$\boxed{10}$，$\boxed{11}$）（$\boxed{12}\boxed{13}$，$\boxed{14}\boxed{15}$），$\left(\dfrac{\boxed{16}}{\boxed{17}},\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}\right)$。　　（40分）〔基本〕

❷ 在拋物線 C：$y=x^2-3x$ 的軸上取一點 A，其 y 座標爲 a。又點 $P(x, y)$ 爲 C 上一動點，且當 P 位於點 $B(b, c)$ 處時，AP 達到最小。則：

(1) 拋物線 C 的頂點的 y 座標爲 $-\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$。

(2) $AP^2=\left(y-a+\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\right)^2+a+\boxed{5}$。

(3) 當 $a>\dfrac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}}$ 時，$c=a-\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$；當 $a\leqq\dfrac{\boxed{6}\boxed{7}}{\boxed{8}}$ 時，$c=\dfrac{\boxed{9}\boxed{10}}{\boxed{11}}$。

(4) 當 $a=-\dfrac{3}{4}$ 時，$b=\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}$ 或 $\dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}}$，且 $AB=\dfrac{\sqrt{\boxed{16}}}{\boxed{17}}$。　　（40分）〔標準〕

❸ 在三角形 ABC 中，設 $AB=5$，$BC=8$，$\angle ABC=60°$。

(1) 三角形 ABC 的面積爲$\boxed{1}\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$。

(2) $AC=\boxed{4}$，$\cos\angle ACB=\dfrac{\boxed{5}\boxed{6}}{\boxed{7}\boxed{8}}$。

(3) 在邊 AB，AC 上分別取一點 P，Q，以 PQ 爲折痕折三角形 ABC，這時如 A 與 BC 的中點重合，則

$AM=\sqrt{\boxed{9}\boxed{10}}$，$MP=\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$，$MQ=\dfrac{\boxed{13}\boxed{14}}{\boxed{15}\boxed{16}}$。　　（40分）〔標準〕

二數學Ⅱ：在問題❹❺❻中選答2題

❹ 在三角形 OAB 中，設邊 OA 的中點爲 C，線段 BC 的 4：3 內分點爲 D，則有

(1) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}\overrightarrow{OB}$。

(2) 設延長 OD 交 AB 於 E，延長 AD 交 OB 於 F，則

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{6}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{7}}{\boxed{8}}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{FE}=\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}}\overrightarrow{OA}$。

(3) $\dfrac{\triangle CEF\text{面積}}{\triangle OAB\text{面積}}=\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}\boxed{13}}$。　　（40分）〔標準〕

❺ 拋物線 C：$y=ax^2$（$a>0$）與直線 $y=1$ 交於2點 P、Q，且點 P 的 x 座標小於 Q 點的 x 座標，則

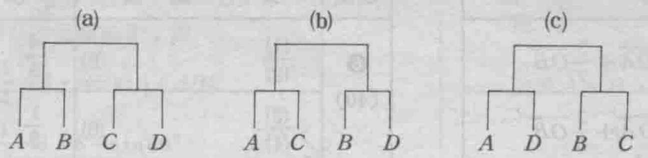
(1) 拋物線 C 在點 Q 處的切線方程爲 $y=\boxed{1}\sqrt{\boxed{2}}x-\boxed{3}$。

(2) 拋物線 C 在點 P、Q 處的切線交於點 R（$\boxed{4}\boxed{5}$，$\boxed{6}\boxed{7}$）。

(3) 拋物線 C 和線段 PR，RQ 圍成的圖形面積爲$\dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}\sqrt{\boxed{10}}}$。

(4) 拋物線 C 關於直線 $y=1$ 的對稱曲線 C' 的方程式爲：$y=\boxed{11}\boxed{12}x^2+\boxed{13}$。且曲線 C' 和線段 PR，RQ 圍成的圖形繞 y 軸迴轉所得立體之體積爲$\dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}\boxed{16}}\pi$。　　（40分）〔標準〕

❻ A、B、C、D爲 4 個隊，按下面(a)、(b)、(c) 3 種程序進行馬上比武。且設A勝其他任何一隊的概率都是



$\frac{2}{3}$，B勝其他任何一隊的概率都是$\frac{1}{3}$，又C勝D的概率爲$\frac{1}{2}$。此外假定不會出現平局。則

(1) 不論採用那種程序，A獲冠軍的概率均爲$\frac{\boxed{(1)}}{\boxed{(2)}}$。$B$獲冠軍的概率均爲$\frac{\boxed{(3)}}{\boxed{(4)}}$。

(2) 對不同的比賽程序，C獲冠軍的概率分別爲：

(a)$\frac{\boxed{(5)}}{\boxed{(6)(7)}}$，(b)$\frac{\boxed{(8)}}{\boxed{(9)(10)}}$，(c)$\frac{\boxed{(11)}}{\boxed{(12)(13)}}$。因此採用程序$\boxed{(14)}$時，$C$獲冠軍的概率最大。

(3) 如用抽簽方式決定採用(a)、(b)、(c)中那種程序，則A與D能相遇進行比賽的概率爲

$\frac{\boxed{(15)(16)}}{\boxed{(17)(18)}}$。

（40 分）〔標準〕

【試題項目】 ❶數Ⅰ 2次方程，❷數Ⅰ 圖形和最大、最小值問題，❸數Ⅰ 圖形和三角比，❹代幾 向量和圖形，❺解析 曲線的切線，面積，體積，❻概統 概率的計算。

【提示】 ❷ (3) 考慮y的取値範圍並按a的値分情況討論。

❸ (2)、(3) 有效地利用餘弦定理。

❹ 利用 3 點共線的條件。

❺ (4) 求曲線廻轉體的體積與圓錐體的體積之和。

❻ 對各種比賽程序分別討論。

解 答

題號	解答記號		解答
❶ (40)	(1)(2)$\pm\sqrt{(3)}$	(7)	$-1\pm\sqrt{3}$
	$\frac{(4)}{(5)}$	(6)	$\frac{1}{2}$
	(6)(7)	(6)	-1
	(8) a −(9)	(6)	$2a-1$
	((10)，(11))	(5)	(1，1)
	((12)(13)，(14)(15))	(5)	(-3，-1)
	$\left(\frac{(16)}{(17)},\frac{(18)}{(19)}\right)$	(5)	$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$
❷ (40)	$\frac{(1)}{(2)}$	(5)	$\frac{9}{4}$
	$\frac{(3)}{(4)}$，(5)	(10)	$\frac{1}{2}$，2
	$\frac{(6)(7)}{(8)}$	(10)	$\frac{-7}{4}$

題號	解答記號		解答
	$\frac{(9)(10)}{(11)}$	(5)	$\frac{-9}{4}$
	$\frac{(12)}{(13)}$，$\frac{(14)}{(15)}$	(6)	$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$或$\frac{5}{2}$，$\frac{1}{2}$
	$\frac{\sqrt{(16)}}{(17)}$	(4)	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
❸ (40)	(1)(2)$\sqrt{(3)}$	(7)	$10\sqrt{3}$
	(4)	(6)	7
	$\frac{(5)(6)}{(7)(8)}$	(7)	$\frac{11}{14}$
	$\sqrt{(9)(10)}$	(6)	$\sqrt{21}$
	$\frac{(11)}{(12)}$	(7)	$\frac{7}{2}$
	$\frac{(13)(14)}{(15)(16)}$	(7)	$\frac{49}{18}$

題號	解答記號		解答
❹ (40)	$\frac{(1)}{(2)}\overrightarrow{OA}+\frac{(3)}{(4)}\overrightarrow{OB}$	(12)	$\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$
	$\frac{(5)}{(6)}\overrightarrow{OA}+\frac{(7)}{(8)}\overrightarrow{OB}$	(12)	$\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$
	$\frac{(9)}{(10)}\overrightarrow{OA}$	(6)	$\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$
	$\frac{(11)}{(12)(13)}$	(10)	$\frac{6}{25}$
❺ (40)	$(1)\sqrt{(2)}\,x-(3)$	(10)	$2\sqrt{a}\,x-1$
	$((4)(5),(6)(7))$	(5)	$(0,-1)$
	$\frac{(8)}{(9)\sqrt{(10)}}$	(10)	$\frac{2}{3\sqrt{a}}$
	$(11)(12)x^2+(13)$	(5)	$-ax^2+2$
	$\frac{(14)}{(15)(16)}\pi$	(10)	$\frac{7}{6a}\pi$

題號	解答記號		解答
❻ (40)	$\frac{(1)}{(2)}$	(6)	$\frac{4}{9}$
	$\frac{(3)}{(4)}$	(6)	$\frac{1}{9}$
	$\frac{(5)}{(6)(7)}$	(6)	$\frac{2}{9}$
	$\frac{(8)}{(9)(10)}$	(6)	$\frac{5}{27}$
	$\frac{(11)}{(12)(13)}$	(6)	$\frac{7}{27}$
	(14)	(2)	c
	$\frac{(15)(16)}{(17)(18)}$	(8)	$\frac{16}{27}$

註：1.對上面標準答案以外的解答也可能給分。
2.❹，❺，❻中選答2題。
3.( )內爲相應的分數。

解說：

❶ (1) 方程式①有重根的條件爲

$$\frac{D}{4}=a^2-2(-a+1)=a^2+2a-2=0,$$

即 $a=-1\pm\sqrt{3}$，此時重根爲 $x=\frac{1}{2}a$ 。

(2) 由方程②知 $(x+1)(x-2a+1)=0$，故解爲

$$x=-1,\ 2a-1$$

當 $x=-1$ 爲公共解時，將其代入①式，

得 $2+2a-a+1=0$， $\therefore a=-3$

$x=2a-1$ 爲公共解時，將其代入①式，

得 $2(2a-1)^2-2a(2a-1)-a+1=0$，

即 $(a-1)(4a-3)=0$，

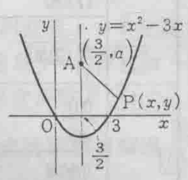
$$\therefore a=1,\ \frac{3}{4}$$

此時公共解分別爲 1，$\frac{1}{2}$，故而

$$(a,x)=(1,1),\ (-3,-1),\ \left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)。$$

❷ (1) 將拋物線 C 的表達式變形爲

$$y=x^2-3x$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\cdots①$$



由此知其頂點的 y 座標爲 $-\frac{9}{4}$ 。

(2) 由 $A\left(\frac{3}{2},a\right)$，$P(x,y)$ 及①式的變形

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=y+\frac{9}{4}$$

知

$$AP^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-a)^2$$
$$=y+\frac{9}{4}+(y-a)^2$$
$$=y^2+(-2a+1)y+a^2+\frac{9}{4}$$
$$=\left(y-a+\frac{1}{2}\right)^2+a+2$$

(3) 由①知 $y\geqq-\frac{9}{4}$，即 $y+\frac{1}{2}\geqq-\frac{7}{4}$ 。因此

當 $a>-\frac{7}{4}$ 時，$y=a-\frac{1}{2}$ 處 AP^2 最小，且使 AP 長度最小的點 B 之 y 座標爲 $c=a-\frac{1}{2}$。

當 $a\leqq-\frac{7}{4}$ 時，$y=-\frac{9}{4}$ 處 AP^2 最小，這時點 B 和拋物線的頂點一致，即有 $c=-\frac{9}{4}$。

(4) $a=-\frac{3}{4}$ 時，$AP^2=\left(y+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$，故 $y=-\frac{5}{4}$ 時 AP^2 最小，即 AP 的長度最小。再由①知

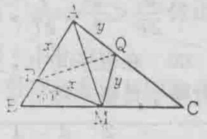
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=1,$$

或 $x-\frac{3}{2}=\pm1$，即 $x=\frac{1}{2},\frac{5}{2}$，從而 $b=\frac{1}{2}$，$b=$

$\frac{5}{2}$。此時 AP 長度之最小值爲 $AB=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$。

❸ (1) 設 $\triangle ABC$ 的面積爲 S，則

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot\sin 60^\circ$$
$$=10\sqrt{3}$$



(2) 對 $\triangle ABC$ 用餘弦定理，得

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$$
$$=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=49$$

故 $AC=7$，又 $\cos\angle ACB=\frac{8^2+7^2-5^2}{2\cdot 8\cdot 7}=\frac{11}{14}$

(3) 在 $\triangle ABM$ 中

$$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos\angle ABM$$
$$=5^2+4^2-2\cdot 5\cdot 4\cos 60^\circ=21$$
$$\therefore\quad AM=\sqrt{21}$$

由於 PQ 是折痕，故 $MP=AP$，如記 $MP=AP=x$，則有 $BP=5-x$。對 $\triangle BMP$ 使用餘弦定理，可得

$$MP^2=BP^2+BM^2-2BP\cdot BM\cos\angle PBM,$$

即

$$x^2=(5-x)^2+4^2-2\cdot(5-x)\cdot 4\cos 60^\circ,$$

或 $\quad x^2=25-10x+x^2+16-20+4x$

$$\therefore\quad 6x=21,\ x=\frac{7}{2}$$

同樣，令 $MQ=AQ=y$，且對 $\triangle CMQ$ 用餘弦定理，得

$$MQ^2=CQ^2+CM^2-2CQ\cdot MQ\cos\angle QCM$$

即 $\quad y^2=(7-y)^2+4^2-2(7-y)\cdot 4\cdot\frac{11}{14}$

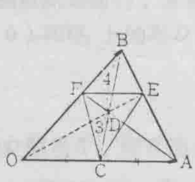
$$\therefore\quad y=MQ=\frac{49}{18}$$

別解：(3) 據中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ 知

$$5^2+7^2=2(AM^2+4^2)$$
$$\therefore\quad AM=\sqrt{21}$$

❹ (1) 由 $BD:DC=4:3$ 知，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}}{4+3}$$
$$=\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$$



(2) 由 O、D、E 共線及(1)知，

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OD}=\frac{2}{7}k\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}k\overrightarrow{OB}\text{。}(k\text{ 爲實數})$$

又因 E 在線段 AB 上，故 $\frac{2}{7}k+\frac{3}{7}k=1$，即 $k=\frac{7}{5}$，

故 $\quad\overrightarrow{OE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

此外如設 $\overrightarrow{OF}=\ell\overrightarrow{OB}$（$\ell$ 爲實數）並代入(1)的結果，

則 $\quad\overrightarrow{OD}=\frac{2}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\ell}\overrightarrow{OF}$

由於 A、D、F 共線，故 $\frac{2}{7}+\frac{3}{7\ell}=1$，即

$$\ell=\frac{3}{5},\ \overrightarrow{OF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$$

依此有

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}$$
$$=\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}\right)-\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$$

(3) 由(2)之結果，知 $EF\,/\!/\,OA$，且

$$OF:FB=AE:EB=3:2,$$

故 $\quad\triangle CEF=\triangle OEF$

$$=\frac{3}{5}\triangle OBE=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\triangle OAB,$$

$$\therefore\quad\frac{\triangle CEF}{\triangle OAB}=\frac{6}{25}$$

研究：A、B、C 三點共線的條件爲

$$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB},\ \alpha+\beta=1$$

❺ (1) 由於 $C: y=ax^2$，故 $y'=2ax$。拋物線 C 和直線 $y=1$ 的交點之 x 座標滿足

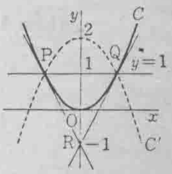
$$ax^2=1,\quad\therefore\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$$

從題意知 $Q=\left(\frac{1}{\sqrt{a}},1\right)$，故 Q 點處切線方程爲

$$y-1=2a\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right),$$

即 $\quad y=2\sqrt{a}\,x-1$

(2) 因爲拋物線之圖形關於 y 軸對稱，故 $P\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},1\right)$ 處的切線方程爲 $y=-2\sqrt{a}\,x-1$，所以兩切線的交點爲 $R(0,-1)$。



(3) 拋物線 C 與線段 PR、RQ 圍成的圖形面積 S 爲：

$$S=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\{ax^2-(2\sqrt{a}\,x-1)\}dx$$
$$=2\left[\frac{a}{3}x^3-\sqrt{a}\,x^2+x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}$$
$$=2\left[\frac{1}{3\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right]=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

(4) C 關於 $y=1$ 對稱的拋物線 C' 是上凸的，且其頂點爲 $(0,2)$，故

$$C':\ y=-ax^2+2$$

C' 與線段 PR、RQ 圍成的圖形環繞 y 軸迴轉所得之立體的體積 V，是 C' 與線段 PQ 圍成圖形的迴轉體體積與 $\triangle PQR$ 的迴轉體體積之和，即有

$$V=\pi\int_1^2 x^2dy+\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\cdot 2$$

$$=\pi\cdot\int_1^2\frac{2-y}{a}dy+\frac{2}{3a}\pi$$

$$=\frac{\pi}{a}\left[2y-\frac{1}{2}y^2\right]_1^2+\frac{2}{3a}\pi$$

$$=\frac{1}{2a}\pi+\frac{2}{3a}\pi=\frac{7}{6a}\pi$$

❻ (1)　不論採用(a)、(b)、(c)中那種程序，A在初賽、決賽中取勝的概率都是$\frac{2}{3}$，故A獲冠軍的概率爲$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$。

同樣不論採用(a)、(b)、(c)中那種程序，B在初賽、決賽中取勝的概率都是$\frac{1}{3}$，故B獲冠軍的概率爲$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$。

(2)　在程序(a)中，C獲冠軍相當於在初賽中A、C或者B、C取勝，且在決賽中C取勝，其概率爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

在程序(b)中，C獲冠軍相當於在初賽中C、B或者C、D取勝，且在決賽中C取勝，其概率爲

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{27}$$

在程序(c)中，C獲冠軍相當於在初賽中A、C或者D、C取勝，且在決賽中C取勝，其概率爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{27}$$

由於$\frac{5}{27}<\frac{2}{9}<\frac{7}{27}$，故在程序(c)中，$C$獲冠軍的概率最大。

(3)　在程序(a)中，A和D相遇相當於他們在初賽中分別取勝，其概率爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

在程序(b)中，A和D相遇相當於他們在初賽中分別取勝，其概率爲

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

在程序(c)中，A和D相遇的概率爲1。

因爲採用(a)、(b)、(c) 3種程序的那一種是由抽籤決定的，即其中任一程序被採用的概率都是$\frac{1}{3}$，故A和D相遇的概率爲

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot1=\frac{16}{27}。$$

公共第一次學力補充考試

考試日期：1月31日　　　時間：100分鐘
所屬科目：數Ⅰ必作，數Ⅱ（電子計算機和流程圖除外）中選作2題

一、數學Ⅰ

❶ 設 a，b，c 爲常數（$a \neq 0$），且 x 的4次多項式 $f(x)=ax^4+bx^3+2c(x^2+x+1)$ 滿足如下條件：

(A) $f(x)$ 被 $x+2$ 除之餘式爲38。

(B) $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除之餘式爲 $-8x-5$。

則由(A)知　$\boxed{(1)}a-\boxed{(2)}b+\boxed{(3)}c=\boxed{(4)(5)}$　……①

由於 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除之餘式爲

$-(\boxed{(6)}a-\boxed{(7)}b+\boxed{(8)}c)x-(\boxed{(9)}a-\boxed{(10)}b)$，

則由(B)知　$\boxed{(6)}a-\boxed{(7)}b+\boxed{(8)}c=\boxed{(11)}$　……②

$\boxed{(9)}a-\boxed{(10)}b=\boxed{(12)}$　……③

再由①、②、③知　$a=\boxed{(13)}$，$b=\boxed{(14)}$，$c=\boxed{(15)}$　（40分）〔基本〕

❷ 在2次函數 $f(x)=x^2+ax+b$ 中，設係數 a，b 的範圍由條件 $-2 \leqq f(0) \leqq 4$，$4 \leqq f(2) \leqq 8$ 確定，試考察 $f(1)$，$f(3)$ 的取值範圍：

(1) 令 $g(x)=ax+b$，則 $g(0)$，$g(2)$ 的取值範圍是 $\boxed{(1)(2)} \leqq g(0) \leqq \boxed{(3)}$，$\boxed{(4)} \leqq g(2) \leqq \boxed{(5)}$。

(2) $g(1)$ 的取值範圍爲 $\boxed{(6)(7)} \leqq g(1) \leqq \boxed{(8)}$，故 $f(1)$ 的取值範圍是 $\boxed{(9)(10)} \leqq f(1) \leqq \boxed{(11)}$。

(3) $g(3)$ 的取值範圍是 $\boxed{(12)(13)} \leqq g(3) \leqq \boxed{(14)(15)}$，故 $f(3)$ 之取值範圍是 $\boxed{(16)(17)} \leqq f(3) \leqq \boxed{(18)(19)}$。

（40分）〔標準〕

❸ 設 C 爲座標平面上以原點爲圓心，以 $\sqrt{10}$ 爲半徑的圓。從點 $P\left(\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)$ 引圓 C 的兩條切線，設2切點爲 Q，R 且 Q 點的 x 座標小於 R 點的 x 座標。則

(1) 圓 C 在其上點 $S(a,b)$ 處的切線方程爲 $ax+by=\boxed{(1)(2)}$。如該切線通過 P 點，則 $a+\boxed{(3)}b=\boxed{(4)}$。

(2) 點 Q，R 的座標分別爲 $(\boxed{(5)(6)},\boxed{(7)})$，$\left(\frac{\boxed{(8)(9)}}{\boxed{(10)}},\frac{\boxed{(11)}}{\boxed{(12)}}\right)$。

(3) $\cos\angle QPR=\frac{\boxed{(13)(14)}}{\boxed{(15)(16)}}$。

(4) 三角形 PQR 之面積爲 $\frac{\boxed{(17)(18)}}{\boxed{(19)(20)}}$。　（40分）〔標準〕

二、數學Ⅱ　從❹、❺、❻題中選答2題

❹ 設 O_1，O_2 是座標平面上以座標原點爲圓心，分別以1及2爲半徑的兩個圓，又設 O_1 上的3點 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(x,y)$（$y>0$）和 O_2 上的點 D 滿足 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，則

(1) $x=\frac{\boxed{(1)(2)}}{\boxed{(3)}}$，$y=\frac{\sqrt{\boxed{(4)(5)}}}{\boxed{(6)}}$。

(2) 設線段 AD 與 O_1 的異於 A 的交點爲 E，則 E 的 x 座標爲 $\frac{\boxed{(7)(8)}}{\boxed{(9)(10)}}$，且

$\overrightarrow{AE}=\frac{\boxed{(11)(12)}}{\boxed{(13)(14)}}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{\boxed{(15)(16)}\overrightarrow{AB}+\boxed{(17)(18)}\overrightarrow{AC}}{\boxed{(19)(20)}}$　（40分）〔標準〕

❺ 設取正值的變量 x，y 滿足 $\log_3(729x^2y)=a$。又令 $A=(\log_3(xy))^2+\log_3(x^a)+\log_3(y^3)$，則

(1) $\log_3 y=\boxed{(1)(2)}\log_3 x-\boxed{(3)}+\boxed{(4)}$，且 $A=(\log_3 x)^2+(\boxed{(5)}-\boxed{(6)})\log_3 x+(\boxed{(7)}-\boxed{(8)})(\boxed{(9)}-\boxed{(10)})$。

(2) A 對一切正值的 x，y 其值爲正，等價於下面4組不等式中標號爲 $\boxed{(11)}$ 的不等式成立。

① $a<\boxed{(12)}$，$\boxed{(13)}<a$　② $a \leqq \boxed{(12)}$，$\boxed{(13)} \leqq a$　③ $\boxed{(12)}<a<\boxed{(13)}$　④ $\boxed{(12)} \leqq a \leqq \boxed{(13)}$。

(3) 當 $a=5$ 時，使 A 的值爲0的 (x,y) 爲 $(x,y)=\left(\frac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)}},\boxed{(16)(17)}\right)$，$\left(\boxed{(18)},\frac{\boxed{(19)}}{\boxed{(20)(21)}}\right)$。　（40分）〔標準〕

❻ 反復擲一骰子，直到有一種點數出現 3 次爲止，將到結束爲止出現的全部點數之和作爲得分。例如依次出點爲 3，6，1，3，3，則結束時得 16 分。

(1) 最小可能得分爲 $\boxed{(1)}$ 分，最大可能得分爲 $\boxed{(2)(3)}$ 分。

(2) 到結束爲止共擲 3 次的概率爲 $\dfrac{\boxed{(4)}}{\boxed{(5)(6)}}$，共擲 4 次的概率爲 $\dfrac{\boxed{(7)}}{\boxed{(8)(9)}}$。

(3) 得分爲 5 分以下的概率爲 $\dfrac{\boxed{(10)}}{\boxed{(11)(12)(13)}}$，得分恰爲 8 分的概率爲 $\dfrac{\boxed{(14)}}{\boxed{(15)(16)(17)}}$。　　（40 分）〔標準〕

【試題項目】 ❶數Ⅰ　整式的計算，❷數Ⅰ　不等式和取值範圍，❸數Ⅰ　圓和直線，圖形和三角比，❹代幾　向量的分量，❺解析　對數函數和對數方程，❻概統　概率的計算。

【提示】 ❶　用 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$，求其餘式。另外還有利用微分的方法。

❷ (1)，(2)可用不等式的基本計算來求解，而(3)宜先畫出滿足條件中不等式的 (a, b) 的區域後再進行分析。

❸ (1)　利用切線公式，(3)在數Ⅰ範圍中的解法是利用餘弦定理，但用向量等的解法更簡單。

❹ (1)　由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，知 $ABDC$ 爲平行四邊形，因此用座標計算的方法較之用向量的解法更容易理解。

❺　利用"對所有實數 x，$ax^2+bx+c>0 \rightleftarrows a>0$，$b^2-4ac<0$"。

❻　仔細分析可能出現的各種情況。

解　答

題號	解答記號		解答
❶ (40)	$(1)a-(2)b+(3)c=(4)(5)$	(10)	$8a-4b+3c=19$
	$-((6)a-(7)b+(8)c)x$	(9)	$-(4a-3b+2c)x$
	$-((9)a-(10)b)$	(6)	$-(3a-2b)$
	(11)，(12)	(3)	8，5
	(13)，(14)，(15)	(12)	3，2，1
❷ (40)	(1)(2)，(3)	(6)	-2，4
	(4)，(5)	(6)	0，4
	(6)(7)，(8)	(8)	-1，4
	(9)(10)，(11)	(6)	0，5
	(12)(13)，(14)(15)	(8)	-2，7
	(16)(17)，(18)(19)	(6)	7，16
❸ (40)	(1)(2)	(5)	10
	(3)，(4)	(5)	3，8

題號	解答記號		解答
❸ (40)	((5)(6)，(7))	(5)	$(-1, 3)$
	$\left(\dfrac{(8)(9)}{(10)}, \dfrac{(11)}{(12)}\right)$	(5)	$\left(\dfrac{13}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$
	$\dfrac{(13)(14)}{(15)(16)}$	(10)	$\dfrac{-7}{25}$
	$\dfrac{(17)(18)}{(19)(20)}$	(10)	$\dfrac{27}{10}$
❹ (40)	$\dfrac{(1)(2)}{(3)}, \dfrac{\sqrt{(4)(5)}}{(6)}$	(14)	$\dfrac{-1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}$
	$\dfrac{(7)(8)}{(9)(10)}$	(12)	$\dfrac{53}{68}$
	$\dfrac{(11)(12)}{(13)(14)}$	(6)	$\dfrac{11}{17}$
	$\dfrac{(15)(16)\overrightarrow{AB}+(17)(18)\overrightarrow{AC}}{(19)(20)}$	(8)	$\dfrac{-6\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{AC}}{17}$
❺ (40)	(1)(2)，(3)，(4)	(6)	-2，6，a
	((5)−(6))，((7)−(8))((9)−(10))	(8)	$(6-a)$，$(a-6)(a-3)$
	(11)，(12)，(13)	(12)	1，2，6
	$\left(\dfrac{(14)}{(15)}, (16)(17)\right)$	(7)	$\left(\dfrac{1}{9}, 27\right)$
	$\left((18), \dfrac{(19)}{(20)(21)}\right)$	(7)	$\left(3, \dfrac{1}{27}\right)$

題號	解　答　記　號		解　　答
❻ (40)	(1)，(2)(3)	(10)	3 ，48
	$\frac{(4)}{(5)(6)}$，$\frac{(7)}{(8)(9)}$	(14)	$\frac{1}{36}$，$\frac{5}{72}$
	$\frac{(10)}{(11)(12)(13)}$，$\frac{(14)}{(15)(16)(17)}$	(16)	$\frac{1}{144}$，$\frac{1}{216}$

註： 1.對上面標準答案以外的解答也可能給分。

2.❹，❺，❻中選答 2 題。

3.( )內爲相應的分數。

解說：

❶ 據條件(A)，用剩餘定理得

$$f(-2)=(-2)^4a+(-2)^3b+2c\{(-2)^2+(-2)+1\}=38,$$

即 $\quad 8a-4b+3c=19 \quad\cdots\cdots①$

用 $(x+1)^2=x^2+2x+1$ 除 $f(x)$ 所得商式及餘式分別爲

$$ax^2+(b-2a)x+(3a-2b+c),$$
$$-(4a-3b+2c)x-(3a-2b)$$

再由條件(B)得

$$-(4a-3b+2c)x-(3a-2b)=-8x-5$$

$$4a-3b+2c=8, \quad\cdots\cdots②$$

$$3a-2b=5 \quad\cdots\cdots③$$

解①、②、③得 $\quad a=3$，$b=2$，$c=1$。

【參考】 設 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得之商爲 $Q(x)$，且餘式爲 $px+q$，則

$$ax^4+bx^3+2c(x^2+x+1)=(x+1)^2Q(x)+px+q \quad\cdots\cdots(*)$$

取 $x=-1$，得

$$a-b+2c=-p+q$$

對(*)式微分後，再取 $x=-1$ 得

$$-4a+3b-2c=p,$$

$$\therefore\ q=-3a+2b$$

故餘式爲

$$-(4a-3b+2c)x-(3a-2b)。$$

❷ 因 $f(x)=x^2+ax+b$，故由 $-2\leqq f(0)\leqq 4$ 知

$$-2\leqq b\leqq 4 \quad\cdots\cdots①$$

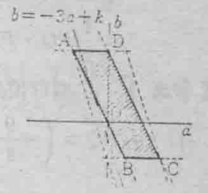
又由 $4\leqq f(2)\leqq 8$ 知 $4\leqq 4+2a+b\leqq 8$，故有

$$0\leqq 2a+b\leqq 4 \quad\cdots\cdots②$$

(1) 因 $g(0)=b$，故由①式得 $-2\leqq g(0)\leqq 4$，又因 $g(2)=2a+b$，故由②式得 $0\leqq g(2)\leqq 4$。

(2) 因 $g(1)=a+b$，故 $2g(1)=2a+2b=g(0)+g(2)$，又據(1)之結果知 $-2\leqq g(0)+g(2)\leqq 8$。故 $-2\leqq 2g(1)\leqq 8$，即 $-1\leqq g(1)\leqq 4$。又因 $f(1)=1+g(1)$，所以 $0\leqq f(1)\leqq 5$。

(3) 同時滿足不等式①、②的點 (a,b) 的變動範圍爲右圖中的平行四邊形 $ABCD$ 的內部及邊界。



記 $g(3)=3a+b=k$，則 $g(3)$ 的取值範圍同和平行四邊形 $ABCD$ 有公共點的那些直線 $b=-3a+k$ 之 y 截距 k 的取值範圍一致。由圖可見：

當直線通過點 $C(3,-2)$ 時，k 取最大值 7，

當直線通過點 $A(-2,4)$ 時，k 取最小值 -2。

故 $-2\leqq g(3)\leqq 7$。又因 $f(3)=9+g(3)$，所以 $7\leqq f(3)\leqq 16$。

【參考】 在(2)中，用和(3)中同樣的方法令 $g(1)=a+b=\ell$，只要分析那些和平行四邊形 $ABCD$ 有公共點的直線 $b=-a+\ell$ 之 y 截距 ℓ 的取值範圍，即可得 $-1\leqq \ell\leqq 4$。

❸ (1) 以原點爲圓心，以 $\sqrt{10}$ 爲半徑的圓 C 之方程爲

$$x^2+y^2=10$$

圓 C 在其上之點 $S(a,b)$ 處的切線方程，由公式得

$$ax+by=10$$

如該切線過 P 點，則有

$$\frac{5}{4}a+\frac{15}{4}b=10，即\ a+3b=8$$

(2) 切點 Q、R 的座標是下面關於 a，b 的方程之解

$$\begin{cases} a+3b=8 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$$

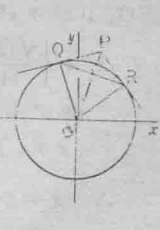
解該方程組，得

$$(a,b)=(-1,3),\ \left(\frac{13}{5},\frac{9}{5}\right)$$

又因 Q 的 x 座標小於 R 的 x 座標，故

$$Q(-1,3),\ R\left(\frac{13}{5},\frac{9}{5}\right)$$

(3) 由(2)之結果得



$$PQ=PR=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$QR=\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

故$PQ : PR : QR = 5 : 5 : 8$。在$\triangle PQR$ 中用餘弦定理得

$$\cos\angle QPR = \frac{5^2+5^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 5} = -\frac{7}{25}$$

(4) 由

$$\sin\angle QPR = \sqrt{1-\cos^2\angle QPR} = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$$

可知

$$(\triangle PQR\text{之面積}) = \frac{1}{2}PQ\cdot PR\cdot \sin\angle QPR = \frac{27}{10}\text{。}$$

【參考】 (3)還可用以下方法求解

(i) 由$\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{PR} = \left(\frac{27}{10}, -\frac{39}{20}\right)$，知

$$\cos\angle QPR = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|} = -\frac{7}{25}$$

(ii) 設$\angle QPO = \alpha$，由

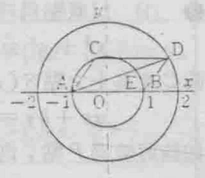
$$OP = \frac{5\sqrt{10}}{4}，\cos\alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{3}{5}$$

知 $$\cos\angle QPR = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{7}{25}$$

由此及$PM = PQ\cdot\cos\alpha = \frac{9\sqrt{10}}{20}$，故在(4)中有

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}PM\cdot QR = \frac{27}{10}$$

❹ (1) 因爲$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，故四邊形$ABDC$爲平行四邊形。由$AB=2$，$C(x, y)$，知$D(x+2, y)$。又因點$C$在圓$O_1$上，點$D$在圓$O_2$上，故有



$$\begin{cases} x^2+y^2=1, & \cdots\cdots① \\ (x+2)^2+y^2=4 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②−①得$4x+4=3$，$\therefore x=-\frac{1}{4}$。再由①知$y^2=\frac{15}{16}$。又據$y>0$，可求得$y=\frac{\sqrt{15}}{4}$。

(2) 由(1)知$D\left(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$，故直線$AD$的方程爲

$$y = \frac{\sqrt{15}}{11}(x+1)$$

它與圓O_1 : $x^2+y^2=1$的交點之座標滿足

$$x^2 + \left\{\frac{\sqrt{15}}{11}(x+1)\right\}^2 = 1$$

即 $$68x^2+15x-53=0$$

或 $$(x+1)(68x-53)=0$$

$$\therefore\quad x=-1,\ \frac{53}{68}$$

由此知，異於A的交點E之x座標爲$\frac{53}{68}$，進而有

$$AE : AD = \left(\frac{53}{68}+1\right) : \left(\frac{7}{4}+1\right) = 11 : 17$$

從而有 $\overrightarrow{AE} = \frac{11}{17}\overrightarrow{AD}$，

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB} = \frac{11}{17}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{11}{17}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB} = \frac{-6\overrightarrow{AB}+11\overrightarrow{AC}}{17}$$

別解：(1) 將$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$變形爲

$$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}，$$

故 $$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$
$$= -(-1, 0)+(1, 0)+(x, y)$$
$$= (x+2, y)$$

再由$|\overrightarrow{OC}|=1$，$|\overrightarrow{OD}|=2$，知$x^2+y^2=1$，$(x+2)^2+y^2=4$。解此方程組即可求出x，y。

(2) 令$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AD}$，($k$爲實數)，則

$$\overrightarrow{OE} = (1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OD} = \left(-1+\frac{11}{4}k, \frac{\sqrt{15}}{4}k\right)$$

因$|\overrightarrow{OE}|=1$，即

$$\left(-1+\frac{11}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}k\right)^2=1$$

又由$k\neq 0$，可知 $k=\frac{11}{17}$

據此可求得E的座標及$\overrightarrow{BE}$。

❺ (1) 將$\log_3(729x^2y)=a$變形爲

$$\log_3 3^6+\log_3 x^2+\log_3 y = a$$

故 $$\log_3 y = -2\log_3 x - 6 + a \quad\cdots\cdots①$$

又 $$A = (\log_3(xy))^2+\log_3(x^a)+\log_3(y^3)$$
$$= (\log_3 x+\log_3 y)^2+a\log_3 x+3\log_3 y$$

將①代入該式得

$$A = (-\log_3 x-6+a)^2+a\log_3 x - 6\log_3 x - 18 + 3a$$
$$= (\log_3 x)^2+2(6-a)\log_3 x + (a-6)^2-(6-a)\log_3 x+3(a-6)$$
$$= (\log_3 x)^2+(6-a)\log_3 x + (a-6)(a-3)$$

(2) 令$\log_3 x = t$對t的所有實數取值，

$$t^2+(6-a)t+(a-6)(a-3)>0$$

都成立的條件爲

$$D=(6-a)^2-4(a-6)(a-3)<0$$

此即爲$(a-6)(a-2)>0$，或$a<2$，$6<a$。故應在備選答案①～④中選定①。

(3) 當$a=5$時，

$$A = (\log_3 x)^2+\log_3 x-2=0$$

即有 $$(\log_3 x+2)(\log_3 x-1)=0，$$

$$\therefore\quad \log_3 x = -2\text{或}1$$

如取$\log_3 x=-2$，則$\log_3 y = 4-6+5=3$

如取$\log_3 x=1$，則$\log_3 y=-2-6+5=-3$

故 $(\log_3 x,\ \log_3 y)=(-2,\ 3),\ (1,\ -3)$

$$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{9},\ 27\right),\ \left(3,\ \frac{1}{27}\right)$$

研究 $ax^2+bx+c>0$ 對所有實數成立的必要充分條件爲 $a>0$ 且 $D=b^2-4ac<0$ 或 $a=b=0$，$c>0$。

❻ (1) 最小得分是在骰子出點爲 1，1，1 時得到，故最小得分爲 3 分。

最大得分是在骰子，從 1 點到 6 點各出 2 次後在第 13 次出 6 點而結束時得到，故最高得分爲

$$(1+2+3+4+5+6)\times 2+6=48\text{分}$$

(2) 在第 3 次結束，相當於骰子在這 3 次出點都相同，因此所求之概率爲 $\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 6=\frac{1}{36}$。

在第 4 次結束，相當於在前 3 次中有 2 次和第 4 次出點相同，而另 1 次爲其他出點，其概率爲

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\times 6=\frac{5}{72}$$

(3) 得分在 5 分以下有如下幾種出點的情況：擲 3 次結束時的 1，1，1，擲 4 次結束時的 1，1，2，1；1，2，1，1；2，1，1，1。由此可知，其概率爲

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{216}+\frac{1}{432}=\frac{1}{144}$$

得分爲 8 分有如下幾種出點情況：

(i) 前 3 次出 2 次 1 點，1 次 5 點，第 4 次出 1 點。

(ii) 前 4 次出 2 次 1 點，2、3 點各 1 次，第 5 次出 1 點。

(iii) 前 4 次出 1、2 點各 2 次，第 5 次出 2 點。

由此知所求概率爲

$$3\times\left(\frac{1}{6}\right)^4+\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$=\frac{36}{6^5}=\frac{1}{216}。$$

北海道大學

理Ⅰ系、醫進・齒進課程

考試日期：3月5日　　時間：120分鐘

所屬科目：數Ⅰ、代幾、解析、微積、概統

❶ 將平面上由不等式 $y \leqq 3$，$y+x-4 \geqq 0$，$y+2x-8 \leqq 0$ 表示的區域記爲 D。

(1) 作 D 的圖。

(2) 當點 (x, y) 在 D 中變動時，求 $k=y+x^2-4x$ 的最大值和最小值。〔標準〕

❷ 空間中的球面 S 和平面 π 分別由下面2方程給定：

$$\begin{cases} S: x^2+y^2+z^2=4 \\ \pi: 3x+4y+5\sqrt{2}z-15=0 \end{cases}$$

(1) 設從點 $P(6, 3, 6\sqrt{2})$ 向 π 作的垂線之垂足爲 H，求 PH 的長度及 H 的座標。

(2) 記 S 與 π 的交圓爲 C，求點 P 與 C 上的點之距離的最小值。〔標準〕

❸ 將平面上的直線 $y=2x$ 及曲線 $y=\frac{1}{2}x^3$ 分別用 L 及 C 表示。又設 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 按以下方式依次給定

(i) $a_1=\frac{1}{2}$，

(ii) 當 a_n 給定後，過點 $(a_n, 0)$ 與 y 軸平行的直線和 L 的交點記爲 P_n，過 P_n 與 x 軸平行的直線和 C 的交點記爲 Q_n，a_{n+1} 定義爲 Q_n 的 x 座標。

(1) 試求 a_{n+1} 和 a_n 的關係式。

(2) 求數列 $\{a_n\}$ 的通項。

(3) 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{2^n}$。〔標準〕

❹ 記曲線 $y=(x^2+ax-2a-3)e^{2x}$ 爲 C。試求滿足以下(i)(ii)的點 P 是唯一的（關於 a 的）條件。

(i) P 在 C 上。

(ii) C 在 P 點處的切線通過原點。〔標準〕

❺ 設曲線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ 記爲 C，C 和 y 軸的交點記爲 P，C 和直線 $x=ab$ 的交點記爲 Q，點 $(ab, 0)$ 記爲 R，且 $a>0$，$b>0$。

(1) 試求曲線 C 的弧 PQ 與線段 QR 的長度之和 L。

(2) 當 a，b 在滿足 $ab^3=1$ 的條件下變動時，求 L 的最小值。〔標準〕

【試題項目】 ❶數Ⅰ　不等式與區域，❷代幾　直線、平面、球面方程，❸微積　遞推式和極限，❹微積　曲線的切線，❺微積　曲線的長度、最大值、最小值問題。

【提示】 ❶ (2) 借助圖形考察區域中的最大值、最小值問題。

❷ (2) 首先討論 H 是在 C 的內部還是在 C 的外部。

❸ (2) 取以2爲底的對數。

❺ 弧的長度爲 $L=\int_b^a\sqrt{1+y'^2}\,dx$

解答

❶ (1) D：$y \leqq 3$，$y \geqq -x+4$，$y \leqq -2x+8$，即 D 爲下頁右圖的斜線部份（含邊界）。

(2) 將 $k=y+x^2-4x$ 變形爲

$$y=-(x-2)^2+k+4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

由圖看出當 $(x, y)=(1, 3), (4, 0)$ 時 k 達到最大，此時