九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版 · 吴传生主编

经济数学

——微积分（第三版）同步辅导及习题全解

主编 高源

一书两用

同步辅导 + 考研复习

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

经济数学——微积分（第三版）同步辅导及习题全解

主编　高源

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版、吴传生主编的《经济数学——微积分》（第三版）一书配套的同步辅导和习题解答辅导书。

本书共有十一章，分别介绍函数，极限与连续，导数、微分、边际与弹性，中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分、三重积分，微分方程与差分方程，无穷级数。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括知识网络图、知识点归纳、历年考研真题评析、课后习题全解四部分内容。针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，内容详尽，简明易懂，循序渐进地帮助读者分析并解决问题。

本书可作为高等院校学生学习《经济数学——微积分》（第三版）课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学微积分（第三版）同步辅导及习题全解 / 高源主编. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2017.4
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-5278-4

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第065415号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：高双春　封面设计：梁　燕

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **经济数学——微积分（第三版）同步辅导及习题全解** JINGJI SHUXUE——WEIJIFEN（DI-SAN BAN）TONGBU FUDAO JI XITI QUANJIE
作　　者	主编　高源
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　20.5 印张　410 千字
版　　次	2017 年 4 月第 1 版　2017 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	32.80 元

前 言
PREFACE

吴传生主编的《经济数学——微积分》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《经济数学——微积分(第三版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到《经济数学——微积分》(第三版)这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 知识网络图。系统全面地涵盖了本章的知识点,使学生能一目了然地浏览本章内容的框架结构。

2. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. 历年考研真题评析。精选历年研究生入学考试中具有代表性的试题进行了详细的解答,以开拓广大同学的解题思路,使其能更好地掌握该课程的基本内容和解题方法。

4. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题能从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给出了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正(yapai2004@126.com或微信JZCS15652485156)。

编者

2017年2月

目录

contents

目录
contents

目 录

contents

第一章

函　数

知识网络图

- 集合
  - 集合的概念
  - 集合的运算
    - 并集、交集、差集、余集
    - 运算律
  - 区间和邻域
- 映射与函数
  - 映射 $f:x\to y$ 的三个要素：X,Y,f
  - 函数的定义
  - 函数的基本性态：奇偶性、周期性、单调性、有界性
- 复合函数与反函数、初等函数
  - 复合函数 $f[g(x)]$
  - 反函数：反函数存在定理
  - 函数的运算：和、差、积、商
  - 五类基本初等函数
- 经济学中的常用函数
  - 需求函数 $Q_d=Q_d(P)$
  - 供给函数 $Q_s=Q_s(P)$
  - 库存函数
  - 成本收益利润函数
  - 戈珀兹曲线 $y=k\cdot a^{b^t}$

知识点归纳

1. 集合的概念

集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体，集合简称**集**．组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**．

由有限个元素构成的集合，称为**有限集**，由无限多个元素构成的集合，称为**无限集合**．

不含有任何元素的集合称为**空集**．

表示方法：一是列举法，二是描述法．

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

2. 集合的运算

集合有三种基本运算，即并、交、差．

设 A,B 是两个集合，则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$
$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ 但 } x\notin B\},$$

分别称为 A 和 B 的**并集、交集、差集**.

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

　　　　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

3. 区间和邻域

实数集 $\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$ 称为**开区间**；$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$ 称为闭区间；$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$，$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$ 称为半开半闭区间，a,b 称为区间的端点．

实数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$，称为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$. 点 a 叫做**邻域的中心**，δ 叫做**邻域的半径**，它在数轴上表示以 a 为中心，长度为 2δ 的对称开区间，如图 1-1 所示．

实数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的**去心** δ **邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左** δ **邻域**，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

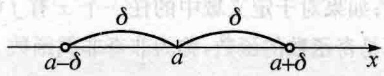

图 1-1

4. 映射的概念

定义 1 设 X,Y 是两个非空集合,若对集合 X 中的每一个元素 x,均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**,记为 f,或者更详细地写为 $f:X\to Y$.

将 x 的对应元 y 记作 $f(x):x\to y=f(x)$. 并称 y 为映射 f 下 x 的**像**,而 x 称为映射 f 下 y 的**原像**(或称为逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 $D_f=X$,而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y\mid y\in Y,y=f(x),x\in X\}$$

称为映射 f 的值域,记为 R_f(或 $f(X)$).

构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

(1)集合 X,即定义域 $D_f=X$;

(2)集合 Y,即限制值域的范围:$R_f\subset Y$;

(3)对应规则 f,使每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

定义 2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射,若在映射 f 下像的逆像也具有唯一性,即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$,则称 f 为**单射**,如果映射 f 满足$R_f=Y$,则称 f 为**满射**;如果映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为双射(又称一一映射).

5. 逆映射与复合映射

设 $f:X\to Y$ 是单射,则由定义 2,对任一 $y\in R_f\subset Y$,它的逆像 $x\in X$(即满足方程 $f(x)=y$ 的 x)是唯一确定的,由定义 1,对应关系

$$g:R_f\to X$$

$$y\to x(f(x)=y)$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射,称为 f 的**逆映射**,记为 f^{-1},其定义域为 $D_f^{-1}=R_f$,值域为$R_f^{-1}=X$.

6. 函数的概念

定义 设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数,通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$.

7. 函数的基本性态

设函数 $y=f(x)$的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任一个 x,都有 $f(x)=f(-x)$,

则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；如果对于定义域中的任一个 x 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数．

8. 复合函数

定义 设有函数 f 和 g，$D_f\cap R_g\neq\varnothing$，则称定义在 $\{x|x\in D_g,g(x)\in D_f\}$ 上函数 $f\circ g$ 为 f 和 g 的**复合函数**，其中 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$．

对复合函数 $f\circ g$，称 $u=g(x)$ 为**中间变量**，其中 $x\in D_{f\circ g}$ 为**自变量**．

9. 反函数

作为逆映射的特例，我们有以下反函数的概念：

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射 f^{-1} 为函数 f 的**反函数**．

定理（反函数存在定理） 单调函数 f 必存在反函数，且其具有与 f 相同的单调性．

10. 函数的运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

函数的和（差）$f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$.

函数的积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$.

函数的商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D\{x|g(x)=0\}$.

11. 戈珀兹曲线

戈珀兹(Gompertz)曲线是指指数函数 $y=ka^{b^t}$ 所表示的曲线．在经济预测中，经常使用该曲线.

历年考研真题评析

真题 1 设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域

逻辑推理 先确定 $\varphi(x)$ 的表达式，再求 $\varphi(x)$ 的定义域．

解题过程 $\because f[\varphi(x)]=1-x$，$\therefore e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，解得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$

定义域 $\ln(1-x)\geqslant0$，得 $1-x\geqslant1$，即 $x\leqslant0$.

真题 2 设 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant1\\0,|x|>1\end{cases}$，则 $f(f(f(x)))$ 等于（　　）.

(A)0　　(B)1

(C)$\begin{cases}1,|x|\leqslant1\\0,|x|>1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0,|x|\leqslant1\\1,|x|>1\end{cases}$

解题过程 $f(x)=\begin{cases}1\\0\end{cases}\Rightarrow|f(x)|\leqslant1\Rightarrow f(f(x))=1\Rightarrow f(f(f(x)))=f(1)=1$,因此B选项正确.

真题3 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x},-\infty<x<+\infty$是(　　)

(A)有界函数　　(B)单调函数

(C)周期函数　　(D)偶函数

逻辑推理 函数基本性态的考察,主要是根据定义来判断.

解题过程 $|f(x)|\leqslant|x|\cdot|\sin x|\cdot|e^{\cos x}|\leqslant|x|\cdot1\cdot e=e|x|$,由于$X$无限制,

则$f(x)$不是有界函数;

$f(-1)=|-1\cdot\sin(-1)|e^{\cos(-1)}=|1\cdot\sin1|e^{\cos1}=f(1)>0,f(0)=0$,

则$f(x)$不是单调函数;

$f(x)$表达式中x不是周期函数,则$f(x)$不是周期函数;

$f(-x)=|-x\cdot\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\cdot\sin x|e^{\cos x}=f(x)$,则$f(x)$是偶函数.

综上所述,D选项正确.

经典例题解析

例1 用描述法表示下列集合

(1)由方程$x^2+6x-27=0$的根所组成的集合.

(2)由非负数全体组成的集合.

解 (1)$A=\{x|x^2+6x-27=0\}$.

(2)$B=\{x|x\geqslant0\}$.

例2 集合的三种基本运算——并、交、补.

(1)设集合$A=\{1,2,3,4\},B=\{2,4,7,8\}$,求$A\cup B,A\cap B,A-B$.

(2)设集合$A=\{x|-1\leqslant x<2\},B=\{x|x\geqslant0\},C=\{x|-1<x<3\}$,求$A\cup(B\cap C)$.

(3)设$U=\{-1,0,1,2,3,4\},M=\{x|x^2-5x+6=0\},R=\{1,3\}$,求$M',R'M'\cup R',M'\cap R',(M\cup R)'\cap M$.

解 (1)$A\cup B=\{1,2,3,4,7,8\},A\cap B=\{2,4\},A-B=\{1,3\}$.

(2)$\because B\cap C=\{x|0\leqslant x<3\}$

$\therefore A\cup(B\cap C)=\{-1\leqslant x<3\}$.

(3)$\because M=\{2,3\}$

$\therefore M'=U-M=\{-1,0,1,4\}$

$R'=U-R=\{-1,0,2,4\}$

$M'\cup R'=\{-1,0,1,2,4\}$

$M'\cap R'=\{-1,0,4\}$

又 $M\cup R=\{1,2,3\}$.

例 3 集合的笛卡乘积.

(1)设 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,5\}$，求 $A\times B$，$B\times B$.

(2)设 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，求 $A\times B$.

解 (1)$A\times B=\{(1,2),(1,5),(3,2),(3,5),(5,2),(5,5),(7,2),(7,5)\}$

$B\times B=\{2,5\}\times\{2,5\}=\{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}$.

(2)$A\times B=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$. 它表示平面直角坐标系中如图 1-2 所示的矩形区域.

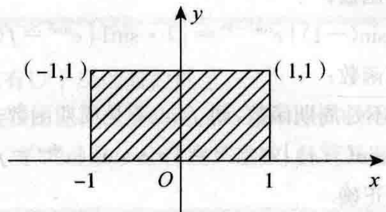

图 1-2

例 4 已知集合 $A=\{x\mid \log_2 x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid -\infty<x<a\}$，若 $A\subset B$. 且实数 a 的取值范围是 $(c,+\infty)$，求 c 的最小值.

解 解不等式 $\log_2 x\leqslant 2$，得 $0<x\leqslant 4$，即 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 4\}$，由 $A\subset B$，知 $a>4$. 故 $c\geqslant 4$. 即 c 的最小值为 4.

一个实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

绝对值及其运算的性质：

(1)$|x|\geqslant 0$；$|-x|=|x|=\sqrt{x^2}$；$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(2)$|xy|=|x|\cdot|y|$，$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

(3)$|x|\leqslant y\Rightarrow -y\leqslant x\leqslant y(y\geqslant 0)$，$|x|\geqslant y\Rightarrow x\geqslant y$ 或 $x\leqslant -y(y\geqslant 0)$.

(4)$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(5)$|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

(6)$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$.

例 5 解不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$.

解 原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases}x\geqslant 2\\ 2x-1-(x-2)<0\end{cases} \qquad ①$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<2\\ 2x-1+x-2<0\end{cases} \qquad ②$$

或 $$\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2}\\-(2x-1)+x-2<0\end{cases}$$ ③

不等式组①无解，不等式组②的解集为$\frac{1}{2}<x<1$，不等式组③的解集为$-1<x\leqslant\frac{1}{2}$.

综上，$-1<x<1$，原不等式的解集为$\{x\mid -1<x<1\}$.

例 6 若对任意 $x>0$，$\dfrac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解 对任意 $x>0$，$\dfrac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$，即对任意 $x>0$，恒有$\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant a$.

又由均值不等式$\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3}=\dfrac{1}{4}$，所以 a 的取值范围为$\frac{1}{4}\leqslant a<+\infty$.

例 7 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1)$|x|<2$；(2)$|x-5|\leqslant1$；(3)$|x-x_0|<\varepsilon(\varepsilon>0, x_0$ 为常数)；

(4)$|x|>1$；(5)$|x+2|\geqslant3$；(6)$|x|>|x-2|$.

解 (1)即$-2\leqslant x\leqslant2$，区间为$[-2,2]$.

(2)由$-1<x-5\leqslant1$知$4\leqslant x\leqslant6$，区间为$[4,6]$.

(3)由$-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon$知$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，区间为$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

(4)即 $x>1$ 或 $x<-1$. 区间为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(5)由 $x+2\geqslant3$ 或 $x+2\leqslant-3$ 知 $x\geqslant1$ 或$\leqslant-5$，故区间为$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

(6)由$|x|>|x-2|$知 $x^2>(x-2)^2$，即 $4x-4>0$，$x>1$，故区间为$(1,+\infty)$.

例 8 求函数 $y=\dfrac{1}{x(1-x^2)}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 x 需满足$\begin{cases}x(1-x^2)\neq0,\\1-x^2\geqslant0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\neq0,\\1-x^2>0\end{cases}$，也即$\begin{cases}x\neq0,\\-1<x<1.\end{cases}$

故定义域为 $D=\{x\mid -1<x<1$，且 $x\neq0\}$.

例 9 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$的定义域为 B. (1)求 A；(2)若 $B\subset A$. 求实数 a 的取值范围.

解 (1)要使函数 $f(x)$ 有定义，需满足 $2-\dfrac{x+3}{x+1}\geqslant0$，即$\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant0$，也即 $x<-1$ 或 $x\geqslant1$，故 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2)要使函数 $g(x)$ 有定义，需满足$(x-a-1)(2a-x)>0$，因 $a<1$，故 $a+1>2a$，所以上面不等式的解集为 $2a<x<a+1$，故 $B=(2a,a+1)$.

因 $B\subset A$，故 $2a\geqslant1$ 或 $a+1\leqslant-1$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $a\leqslant-2$. 又因为 $a<1$，所以$\frac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant-2$.

例 10 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), & x\leqslant0,\\f(x-1)-f(x-2), & x>0\end{cases}$ 求 $f(2009)$.

解 由已知得 $f(-1)=\log_2 2=1, f(0)=0, f(1)=f(0)-f(-1)=-1$,

$f(2)=f(1)-1f(0)=-1, f(3)=f(2)-f(1)=0$,

$f(4)=f(3)-f(2)=1, f(5)=f(4)-f(3)=1, f(6)=f(5)-f(4)=0$,

所以函数 $f(x)$ 的值以 6 为周期重复性出现，所以 $f(2009)=f(5)=1$.

例 11 从甲地到乙地的火车票的全价为 q_0（元），按铁路部门的规定 1.1 米以下的儿童免票，身高超过 1.1 米但不足 1.4 米的儿童购买半价票，身高超过 1.4 米者购买全票，试写出从甲地到乙地票价 q 作为身高 s 的函数的表达式.

解 依题意，q（单位：元）作为 s（单位：m）的函数关系，可以表示为如下分段函数

$$q=\begin{cases} 0, & \text{当 } 0<s<1.1 \\ \dfrac{1}{2}q_0, & \text{当 } 1.1\leqslant s<1.4 \\ q_0, & \text{当 } s\geqslant 1.4 \end{cases}$$

例 12 证明函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

证明 $|f(x)|=\left|\dfrac{x^2+1}{x^4+1}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4+1}=\dfrac{x^4+1+2x^2}{x^4+1}=1+\dfrac{2x^2}{x^4+1}\leqslant 1+1$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，且 2 是上界.

例 13 设 $f(x), g(x), h(x)$ 在它们的公共定义域 D 上都是单增函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，若 $f(f(x)), g(g(x)), h(h(x))$ 都有意义，试证 $f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

证明 任到 D 上一点 x_1，由题设知 $f(x_1)\leqslant g(x_1)\leqslant h(x_1)$,

从而 $f(f(x_1))\leqslant f(g(x_1))\leqslant f(h(x_1))$.

又 $f(g(x_1))\leqslant g(g(x_1)), g(g(x_1))\leqslant g(h(x_1))\leqslant h(h(x_1))$,

故 $f(f(x_1))\leqslant g(g(x_1))\leqslant h(h(x_1))$.

例 14 设 $a<b$，函数 $f(x)$ 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(a-x)=f(a+x) f(b-x)=f(b+x)$. 证明：$f(x)$ 是周期函数.

解 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\because f(x+2b-2a)=f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a))$$
$$=f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x).$$

$\therefore f(x)$ 是周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

例 15 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$ 在 R 上有界.

解 因为 $f(x)=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$,

所以，当 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ 时，函数取到最大值 $y_{\max}=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时,函数取到最小值 $y_{\min}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故可取 $M=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,则有 $|f(x)|\leqslant M$,即函数 $f(x)$ 有界.

例 16 (1)下列函数为基本初等函数的是( ).

(A) $y=2x+\tan x$　(B) $y=\sqrt[3]{x^2}$　(C) $y=1+|x|$　(D) $y=\ln(1+x^2)$

(2)函数 $y=2\pi+\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是( ).

(A)有界函数　(B)无界函数　(C)偶函数　(D)周期函数

(3)函数 $f(x)=\begin{cases}2x,|x|\leqslant 1\\ 1+x,1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 为( ),

(A)基本初等函数　(B)初等函数　(C)分段函数　(D)复合函数

解 (1)由排除法易知,选项(A)、(C)、(D)均不正确,因 $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ 为幂函数,即基本初等函数,故应选(B).

(2)由反正切函数的定义及性质知,选项(A)正确.

(3)由基本初等函数、初等函数及复合函数的定义知,选项(A)、(B)、(D)不确,故应选(C).

课后习题全解

习题 1-1

1. **解题过程** 略.

2. **知识点窍** 集合的描述法,指用数学语言表明集合中元素具有的性质.

解题过程 (1) $\{x|x>5\}$;

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$;

(3) $\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x-y=0\}$.

3. **知识点窍** 集合的列举法,将所有元素列举出来.

解题过程 (1) $x^2-7x+12=0\Rightarrow(x-4)(x-3)=0\Rightarrow x_1=4,x_2=3$,题中所指集合为 $\{3,4\}$;

(2) $\begin{cases}y=x^2\\ x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ y_1=0\end{cases},\begin{cases}x_2=1\\ y_2=1\end{cases}$,题中所指集合为 $\{(0,0),(1,1)\}$;

(3) $|x-1|\leqslant 5$ 的整数 $\Rightarrow x=6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4$,题中所指集合为 $\{6,5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3,-4\}$.

4. **知识点窍** 空集,不含任何元素的集合,记为 ϕ.

解题过程 $A=\{-1\},B=\phi,C=\phi,D=(0,1),E=\phi$.

5. 知识点窍 集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，称 A 是 B 的子集．

解题过程 $\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$.

6. 知识点窍 A 是 B 的子集，若 B 中至少有一个元素不属于 A，称 A 是 B 的真子集．

解题过程 子集的个数：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$，真子集的个数：$2^n-1$.

7. 知识点窍 元素，集合，属于，包含的概念．

解题过程 (1)对；(2)对；(3)不对，修正为 $\{1\}\subset A$；(4)不对，修正为 $1\in A$；(5)对；(6)不对，修正为 $0\in A$；(7)对；(8)不对，修正为 $\{0\}\not\subset B$；(9)不对，修正为 $A\neq B$；(10)对；(11)对；(12)对．

8. 知识点窍 集合的基本运算．

解题过程 (1)$A\cup B=\{1,2,3,5\}$；(2)$A\cap B=\{1,3\}$；(3)$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$；(4)$A\cap B\cap C=\phi$；(5)$A\backslash B=\{2\}$.

9. 知识点窍 补集．

解题过程 (1)$A^c=\{4,5,6\}$；(2)$B^c=\{1,3,5\}$；(3)$A^c\cup B^c=\{1,3,4,5,6\}$；(4)$A^c\cap B^c=\{5\}$.

10. 解题过程 $A\cup A=A,A\cap A=A,A\cup\varnothing=A,A\cup I=I,A\cap I=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A\backslash A=\varnothing$ 是对的，其余错误．

11. 知识点窍 直积 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$.

解题过程 $A\times B=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,a),(d,b),(d,c)\}$

12. 解题过程 $A\times B\times C=\{(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_2,z_1),(x_1,y_1,z_2),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_1),(x_2,y_1,z_2),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_1,z_1),(x_3,y_2,z_1),(x_3,y_1,z_2),(x_3,y_2,z_2)\}$

13. 知识点窍 区间的表示方法．

解题过程 (1)$[-3,3]$；

(2)$[1,3]$；

(3)$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$；

(4)$(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$；

(5)$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

14. 解题过程 (1)$|x+3|<2\Rightarrow-5<x<-1$，区间表示：$(-5,-1)$.

(2)$1<|x-2|<3\Rightarrow-1<x<1$ 或 $3<x<5$，区间表示：$(-1,1)\cup(3,5)$.

习题 1－2

1. 知识点窍 映射三要素．

解题过程 该对应关系是映射．每个三角形都有唯一的重心，因此对于 X 中的任一元素，在 Y 中都有唯一确定的元素与之对应．

2. 知识点窍 初等函数定义域 6 个基本原则．

解题过程 (1)$9-x^2\geqslant0\Rightarrow$定义域为$[-3,3]$；

(2)$\begin{cases}1-x^2\neq0\\x+2\geqslant0\end{cases}\Rightarrow$定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；