

交通科技译丛
Translations of Transportation
Science & Technology



PUBLIC TRANSPORTATION SYSTEMS:

BASIC PRINCIPLES OF SYSTEM DESIGN OPERATIONS PLANNING
AND REAL-TIME CONTROL

公共交通系统规划 及运营原理

[美] 卡洛斯·达冈佐 (Carlos F. Daganzo) 著

李 萌 欧阳彦峰 编译



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

交通科技译丛

公共交通系统规划及运营原理

卡洛斯·达冈佐(Carlos F. Daganzo) 著
李 萌 欧阳彦峰 编译



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co.,Ltd.

内 容 提 要

本书共分8章,内容包括公共交通规划概论、摆渡系统规划、交通廊道规划、二维系统规划、灵活的公共交通运输规划、公交车队的管理、公共交通人员配备、可靠的运输管理。

本书可作为高等学校高年级本科生及研究生教学参考用书,亦可供交通规划人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

公共交通系统规划及运营原理 / (美) 卡洛斯·达冈佐 (Carlos F. Daganzo) 著; 李萌, 欧阳彦峰编译. —
北京: 人民交通出版社股份有限公司, 2017. 5

ISBN 978-7-114-13217-9

I. ①公… II. ①卡… ②李… ③欧… III. ①城市交通运输—公共交通系统—交通规划—研究②城市交通运输—交通运输管理—研究 IV. ①U491.1②F57

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 169646 号

著作权合同登记号:01-2017-3562

交通科技译丛

书 名: 公共交通系统规划及运营原理

著 译 者: 卡洛斯·达冈佐 (Carlos F. Daganzo) 著

李 萌 欧阳彦峰 编译

责任编辑: 刘永超 张 洁

出版发行: 人民交通出版社股份有限公司

地 址: (100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号

网 址: <http://www.ccpres.com.cn>

销售电话: (010)59757973

总 经 销: 人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京鑫正大印刷有限公司

开 本: 720 × 960 1/16

印 张: 8.75

字 数: 160 千

版 次: 2017年5月 第1版

印 次: 2017年5月 第1次印刷

书 号: ISBN 978-7-114-13217-9

定 价: 55.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书由本公司负责调换)

译者序

随着全球经济和人口的不断增加,交通出行需求呈现爆发式的增长,然而由于土地资源、道路基础设施资源、能源和环境资源有限,我们看到了因供需矛盾尖锐而造成的一系列交通问题,如交通拥堵常态化、安全事故频发、交通尾气和噪声污染等,特别是在以我国为代表的发展中国家,矛盾更加尖锐。在探索可持续的交通发展之路的进程中,我们已经能够清楚地看到以公共交通为主导的绿色出行必然是未来交通系统中不可替代的核心,但当前关于公共交通系统规划及运营的基本理论书籍还非常匮乏。

卡洛斯·达冈佐(Carlos F. Daganzo)教授,美国工程院院士,历任加利福尼亚大学伯克利分校土木与环境工程系 Robert Horonjeff 讲座教授、校长讲席教授,获国际运筹学和管理学研究协会(INFORMS)2013年交通物流科学 Robert Herman 终身成就奖、2012年西班牙巴塞罗那理工大学名誉博士学位、两次 Fulbright 基金高级研究者奖。他是美国交通科学领域的泰斗级人物,论著丰富,影响极为深远。在过去的几十年间,达冈佐教授在交通科学领域做出了众多大师级的开创性的贡献,包括20世纪70年代的交通计量经济学与需求预测模型、80年代的物流与港口运营模型、自90年代以来著名的一系列交通流理论、21世纪早期的供应链模型与公共交通和多模式城市交通系统模型。他的大师级研究成果在多个角度开创式地建立了交通科学的基础思维方式,广泛地被学者引用(Google Scholar 引用近20000次),且被作为经典教科书。他也在2003—2009年期间担任国际交通科学论坛(International Symposium on Transportation and Traffic Theory,被誉为交通领域的“奥运会”)的召集人。国际运筹学和管

理学研究协会在 2013 年授予他 Herman 终身成就奖时, 高度赞扬他为交通物流科学做出的“持续不断的重大贡献”。

2007 年 11 月在达冈佐教授访问伊利诺伊大学香槟分校期间, 我们初次听说他计划出版一本关于公共交通的新书。2010 年 10 月, 译者收到了一封附有这本书链接的电子邮件: “终于, 《公共交通课程笔记》这本书完成了……我希望大家可以好好利用它。”就在那时, 伊利诺伊大学香槟分校和清华大学都在酝酿一门全新的关于公共交通的课程。2011 年春天, 译者先后四次访问伯克利, 对本教材在课堂上的实际运用进行考察。

2011 年秋天, 香槟分校首次开设“公共交通系统”课程。到 2013 年春天, 清华大学开设了一门类似的、名为“绿色交通系统”的课程。这两门课程都沿用了本书中的内容。此外, 译者还开发了一系列适合两校学生交流合作的国际联合项目。每个授课学期, 教师和学生首先进行远程协作, 然后通过一次为期一周的前往中国或美国的访问交流, 完成一个涉及规划、设计、运营、控制或绩效评估的交通系统设计项目。2013 年 5 月, 11 名伊利诺伊大学香槟分校学生到访北京, 第二年 4 月, 清华大学 12 名学生前往伊利诺伊。2016 年 5 月, 12 名伊利诺伊大学香槟分校学生再次到访北京。

在交流合作的过程中, 我们逐渐意识到出版本书的中文译本的必要性, 其将能大大促进本书中的知识和观念在中国读者中的传播。这一想法很快得到了达冈佐教授的支持。翻译工作主要于 2012—2014 年进行, 并得到了以下机构学生的支持与帮助: 清华大学的张灿、朱逸文、仝祎楠、于海啸、许定源、孙婷、崔骁捷、陈婕妤, 伊利诺伊大学的 Yiwei Mao 和 Liqun Lu。对他们的帮助我们表示由衷的感谢。翻译本书时, 我们也加入了自由评论和注释。译文及编写中如有不当之处, 恳请大家不吝指正。最后, 译者也要感谢美国国家科学基金会、中国国家自然科学基金委员会以及清华—戴姆勒可持续交通联合研究中心的支持。

译 者

2016 年 5 月

前 言

这本书是基于一组在 2007—2010 年加利福尼亚大学伯克利分校研究生课程的讲稿来完成的。研究生课程“CE259 - 公共交通系统”的对象是不同学术背景的交通方向研究生一年级学生。

本书不同于其他公共交通类书籍的原因是它采用一种创新性的视角,更加通俗、更聚焦分析交通系统,内容包括公共交通的规划、管理和运营。也有很多重要的题目没有被涵盖,如融资、管理策略以及城市交通政策,因为这些题目不是专注于运输系统的,而且其他课程和书籍已经深入地介绍了很多。本书的另外一大特点是它不以实际数据建模,因为各方面的统计数据是在持续变化的,官方的统计数据并没有被包括在本书中。

本书看事物的方式和结构与作者另一本书《物流系统分析》(Logistics Systems Analysis. Springer, 4th edition, 2005)很相似,很多想法也是借鉴于这本书。毕竟公共交通运输系统本质是一种运输人的物流系统。两本书都依托于一个两步规划方法,用理想化模型来发掘可实施方案中的最大可行解空间。两本书的逻辑思路也很像,都采用循序渐进的方式去寻找事物发展的本质,这样对于学生来说也可以像搭积木一样逐渐建立系统学习的基本方法。

本书由 8 个模块组成:5 个规划模块(概论、摆渡系统、廊道系统、二维系统、灵活服务系统);2 个管理模块(车辆和员工);1 个运营模块(如何让公交车准时)。规划模块考察公众看得见的方面,比如线路与行程安排。管理模块和运营模块主要分析应采取哪些措施、实施哪些政策以保

证系统能按照设计情况运行。还有 2 个模块也正在编写中:特殊事件的管理(如疏散及奥运会)以及交通的运营。

尽管本书包括了很多学术和专业的新想法,其主要目的还是用于对教学的补充。因此,本书还有一个配套的附录,包括 7 组练习作业和 3 个专项课题,都是与本书直接相关的。这些练习作业和微型试验项目曾安排在 2009 年和 2010 年的 CE259 课程中:共计 14 周的课程中每周有两个一小时的授课和一个一小时的讨论课。

本书最开始是由几个上课的研究生整理的,包括 Eric Gonzales、Josh Pilachowski 和 Vikash Gayah。逐渐地,我的同事 Mike Cassidy 教授把这些模块用于 CE259 的授课,并给出了很多建议。出版的这个版本来自很多人的努力,对此表示感谢。如果有不当和错误,我承担所有责任,同时也欢迎读者批评指正。最后还要感谢沃尔沃基金的大力支持。

作者

2010 年 9 月

目 录

第1章 规划——概论	1
1.1 本章提要	1
1.2 课程内容和结构	1
1.3 公共交通运输规划	2
本章附录 建议的课程教学大纲.....	9
第2章 规划——摆渡系统	11
2.1 本章提要.....	11
2.2 摆渡系统.....	12
本章附录 早通勤高峰的 Vickrey 模型	20
第3章 规划——交通廊道	22
3.1 本章提要.....	22
3.2 理想分析.....	22
3.3 时空效应下的实际分析.....	27
第4章 规划——二维系统	43
4.1 本章提要.....	43
4.2 理想情况.....	43
4.3 现实情况——无交通分级.....	48
4.4 二维系统:现实情况(分级系统)	54
4.5 二维系统:时间相关性与适应性	55
4.6 车辆容量约束.....	57
4.7 公共交通和个体交通的比较.....	57
第5章 规划——灵活的交通运输	60
5.1 本章提要.....	60
5.2 公共交通运输提供灵活性的方法.....	60
5.3 出租汽车.....	61

5.4	拨号服务	64
5.5	公共车辆共享	67
	本章附录 怎样决定出租汽车预期距离	69
第6章	管理——车队	71
6.1	本章提要	71
6.2	介绍	72
6.3	只包含1条公交线路的日程安排	73
6.4	包含 N 条公交线路的日程安排	77
6.5	讨论:空回头车的影响	80
	本章附录 车辆线路问题(VRP)及元启发式解决方法简介	81
第7章	管理——人员配备	84
7.1	本章提要	84
7.2	要点回顾	84
7.3	单个运行的人员配置	85
7.4	多个运行的人员配置	87
7.5	选择工作的类型	90
7.6	旷工处理	91
7.7	未完成的工作	92
第8章	可靠的运输管理	94
8.1	本章提要	94
8.2	可靠性	94
8.3	多系统的系统	94
8.4	非受控的公交运输	99
8.5	常规的进度控制	100
8.6	动态/自适应控制	103
附录	课后习题及专项课题	107
	关键词	127
	参考文献	131

第 1 章 规划——概论

1.1 本章提要

本章将针对本课程的相关信息进行简要介绍,分别从课程内容及课程结构方面展开详细的描述。此外,本章还会从定义、价值取向、交通需求、规划及设计方法等方面对公共交通的规划问题展开讨论。

1.2 课程内容和结构

1.2.1 课程目标

- 了解公共交通能或不能完成的任务
- 掌握完成(大/小规模)任务的方法
- 从工程角度出发,学习如何切实地完成任务

1.2.2 教学大纲的简要说明(见本章附录)

- 规划部分研究可行的公共交通服务建模方法,并循序渐进地增加模型的复杂度和对实际情况的考量;该部分将揭示公共交通系统的局限性,并介绍交通系统规划的基本工具。

- 管理与运营部分探索公共交通背后的支持系统。这部分包括用户不直接面对的管理事项,如车队规模/部署和人员配备,也包括与用户相关的运营事项,如自适应的时刻表管理和交通管理。

- 本书中的规划理念和建模将通过两个实验项目和五个作业练习来巩固提升,管理/运营理念和建模将通过一个实验项目和两个作业练习来巩固提升。

想象一个单一维度城市中的公共交通。许多人在不同的时间从不同的出发点前往各自的目的地(见图 1-1 中的细箭头)。为了使用公共交通(图 1-1 中粗箭头),人们会根据车站的位置和公交时刻表安排调整出行计划。若要减少这

种调整,就需要考虑如何提供更多的公交服务(更多的粗箭头)。但是,更多的粗箭头意味着增加成本。成本和需求的权衡常常是交通运输规划的核心问题,也将是本课程的主题。

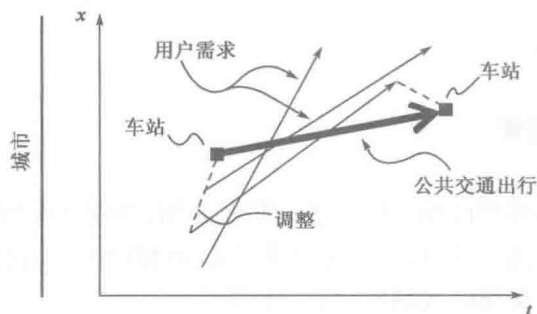


图 1-1 公共交通出行 $x-t$ 图

1.3 公共交通规划

1.3.1 定义

- 导轨设施——公共交通系统的固定部分(基础设施),以线段和节点的方式建模

- 网络——线段和节点的集合,对应单个或多个出行方式

- 路径——线段和节点序列

- 起讫点——网络中路径的起点和终点

- 枢纽——出行者可以改变交通出行方式的节点

- 规划——制订未来长期/大规模发展计划的艺术

- 移动性——人们在一定时间内能移动的距离(如车公里 VKT/车小时 VHT)

- 可达性——人们在一定时间内实现出行的机会(取决于土地利用情况)

我们可以通过提高移动性,并且/或者改变土地利用来提高可达性。但是如果土地利用是固定的,那么改变移动性与改变可达性是等效的。

如图 1-1 所示,公共交通本质上存在一个权衡,因为用户会为了经济性放弃出行灵活性(牺牲“服务水平”)。为实现个体交通出行方式(如高速公路、自行车道、人行道)的服务水平(LOS)和供应成本之间的平衡,规划者只能改变基础

设施。但是对公共交通,规划者还能控制车辆的行驶线路和行驶时刻表。

规划的目标是实现高效率。在这里,效率用服务水平(LOS)和成本共同进行衡量。成本有不同的形式,如时间、舒适度、安全性和金钱,并且需要折算成相同的单位。这个结果被称为广义成本或负效用,对个体和群体都适用。并且这个成本通常表示为各种成本的线性组合,如对个体花费时间 T 和金钱,则广义成本为:

$$\text{广义成本} = \beta_T T + \beta_S S \quad (1-1)$$

式中: β_T ——出行者时间价值参数;

β_S ——出行者金钱价值参数;

T ——出行所花费的时间;

S ——出行所花费的金钱。

1.3.2 如何考虑价值取向

注意到 β_T 和 β_S 对于每个个体都不同,因此即使对个体完整定义了广义成本,在定义一个多样群体时,选择恰当权重是通常一个无法客观地解决的价值取向问题。

同时注意到公交运输系统涉及与非使用者相关的成本——能耗、污染、噪声等——人们对这些成本价值衡量观点不一致,这更增大了决策的复杂性。

很明显,我们需要简化问题(但是不能忽略政策的影响)。为此,在本课程中假设通过政治决策我们已经设定了一些反映价值取向的标准,适用于公共交通系统中所有非货币的效用输出值,例如:

T ——门到门旅行时间,即从离开出发地到到达目的地花费的总时间(不超过标准值 T_0);

E ——消耗的能源(不超过 E_0);

M ——通行性(至少 M_0);

A ——可达性(至少 A_0)。

我们的目标是在满足标准的前提下,使费用 S 最小化;例如:

$$\text{数学规划(MP): } \min \{ S : T \leq T_0 ; E \leq E_0 ; M \geq M_0 ; A \geq A_0 ; \dots \} \quad (1-2)$$

注意每个标准是如何与每个不等式联系起来的,这些不等式限制了系统效用输出值的允许范围。由于这些输出值通常直接与4个关键总体指标相联系:车小时数(VHT)、车公里数(VKT)、乘客小时数(PHT)、乘客公里数(PKT),我们常常可以用乘客时间(距离)和车辆时间(距离)重新建立标准。

或者,由于数学规划 $y = \{S, T, E, M, A\}$ 中的所有变量(包括货币的和非货币的)都是系统设计 x (如整个系统的线路和时刻表)和需求 α (假设为给定的)的函数,我们可以用 x 和 α 来表示上述数学规划。

为使这个表示更加具体,我们将该关系定义为向量函数 F_m :

$$y = F_m(x, \alpha) \quad (1-3)$$

式中: y ——整个系统的效用输出(包括货币的和非货币的);

m ——交通出行方式;

x ——整个系统设计变量集;

α ——需求。

接下来我们寻找一个 x 值,使得在 y 的其他变量都满足标准限制时, S 取得最小值。这个结果就是最优设计 $x^*(\alpha)$, 此时有 $y^*(\alpha) = F_m[x^*(\alpha), \alpha] = G_m(\alpha)$ 。这个函数表示了在给定的需求 α 时,交通出行方式 m 的最佳效用。在本书中,我们将对不同交通出行方式的 $G_m(\alpha)$ 进行比较。

为更具体地说明,假设一个最简单的交通系统,所有用户都聚集在两个点上(图 1-2)。



图 1-2 最简单交通系统示意图

这种情况下有:

x ——服务频率(单一设计变量:发车数/小时);

α ——需求(单一需求变量:乘客数/小时)。

现在定义 F_m 的参数。假设每辆车的调度花费 c_f 个货币单位。因此有:

$$S = F_m^S(x, \alpha) = \frac{c_f x}{\alpha} \text{ (元/乘客数)} \quad (1-4)$$

注意: S 定义为每位乘客的平均花费。我们也可将其定义为系统每小时的总费用。两种定义仅仅相差一个恒定的因子——需求 α , 因此他们的结果是相同的。如果假设发车的时距是固定的,但时刻表并不知晓,则可假设车外的等候延误时间为出发点处 $1/2$ 发车时距加上目的地处 $1/2$ 发车时距。由此,我们有:

$$T = F_m^T(x, \alpha) = \frac{1}{x} \text{ (h)} \quad (1-5)$$

最后,如果每辆车行驶消耗 c_e 焦耳的能量,则:

$$E = \frac{c_e x}{\alpha} \quad (\text{J/乘客数}) \quad (1-6)$$

如果政治决策忽略能耗,而只是规定了时间的标准 T_0 ,然后我们选择货币单位使得 $c_f = 1$,则上述数学规划(MP)问题变成:

$$\min \{x/\alpha; \frac{1}{x} \leq T_0\} \quad (1-7)$$

注意到 x 取最小值将使目标函数最小。因此,该约束应取等号,而且:

$$x^* = \frac{1}{T_0} \quad (1-8)$$

因此每个乘客“最优”的货币成本为:

$$S^* = G_m^S(\alpha) = \frac{1}{\alpha T_0} \quad (1-9)$$

我们称上述寻找有效规划的方法为“标准法”。

还有另一种方法,我们称之为“拉格朗日法”。该方法涉及选取影子价格 β ,在没有任何限制的情况下选取“价格”来使广义成本最小。尽管这些价格的选取不能做到完全客观,但总可以找到可以满足一系列标准的价格。因此拉格朗日法与标准法是等效的。例如,我们建立方程:

$$\min_x \left\{ S + \beta_T \equiv \frac{x}{\alpha} + \beta \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \quad (1-10)$$

解为:

$$x^* = \sqrt{\alpha\beta} \quad (1-11)$$

可以证明,当 $\beta = (1/T_0^2)(1/\alpha)$ 时,解即为“标准法”的解 [$x^* = 1/T_0, S^* = x^*/\alpha = 1/(\alpha T_0)$]。因此不管选取什么标准值,总有一个价格来实现它。

总之,有以下两种方法来计算最低成本设计以满足决策目标。

(1) 标准法: $\min \{ S \text{ s. t. } T \leq T_0, E \leq E_0 \dots \}$

这种方法在满足出行时间、能耗等输出值的决策标准限制下,使货币成本最小。如上例所示,通常情况下问题的解在约束取临界值时达到: $T = T_0, E = E_0$ 。

(2) 拉格朗日法: $\min \{ S(x, \alpha) + \beta_T [T(x, \alpha)] + \beta_E [E(x, \alpha)] \}$

这种方法使得广义成本最小,当影子价格 β_T 和 β_E 选取恰当时,拉格朗日法得出的解与标准法相同。影子价格可以通过如下方法找到:任意选取一些价格并求解拉格朗日方程,求得对应的 T 和 E 的最优解,然后调整价格,直到 T 和 E

满足标准。对一些简单的情况,如上例,可以直接通过分析得出解析解。

1.3.3 如何考虑需求:对交通需求不确定性和内生性的一些讨论

到目前为止,我们都假设需求 α 是给定的,读者可能会提出这与实践或交通研究中的实际情况不相符。但是,如果我们给出的设计方案恰好是在实际需求下最优的方案,就不存在上述问题了。假设我们基于给定的需求 α 得出设计变量 x ,而这个需求成为未来某个时刻的实际需求。正常情况下,我们预期实际需求随时间而改变,并且在一个不断提高服务质量、设计良好的系统里,这个需求是不断增长的。因此,系统设计能否实现实际的最优(采用假设的需求 α_0)只是个时间的问题,因为需求 α_0 最终肯定会成为现实。并且,我们将在很多交通系统中看到,用 α_n 求出的最优所对应的成本在一个较宽的 α 取值范围(与 α_0 的差别在 50% 到 200% 以内)都是接近最优的。因此,如果实际需求随时间变化不快,系统设计将在较长的时间内都是近似最优的。

同时,我们应该认识到长远的需求是很难预测的。因此在我们看来,为精确预测需求值 α 而建立复杂的内生模型是不值得的。对设计而言,粗略估计未来的需求已经足够。这不是说对未来的预测不重要,而是没有必要做精确的预测。下述例子将说明缺乏长远目光的后果。

1.3.4 短视的恶果

这个例子表明,当需求随着时间变化时,我们为追求短期收益而不断取得的最优解,远不如一开始就有远期目标和长远眼光的设计。

现在,对一个交通投资决策考虑两种方案,分别对应两种出行方式:

- 公共汽车——兴建的交通容量可连续取值,单位交通容量成本为 c_g ;
- 地铁——兴建的交通容量非常大且不可连续取值(二元取值),成本为 c_0 。

政治家在决定投资交通基础设施时,由于其相对较短的任职周期,往往倾向于有短期回报的方案。如果一个城市每过几年就选一次领导,那么政治家仅仅有动力去关心近期的成本。这将可能造成恶果。

假设一个城市的交通需求随时间增长,并预期在长期也如此(这基本代表了所有发展中国家的情况)。同时假设目标是使得在任何时候,交通容量的供给都能满足需求。政治家需要决策是否投入一大笔钱 c_0 ,来挖掘隧道与铺设地铁轨道,以满足未来几十年巨大的交通容量需求;或者不断增加道路设施以满足

下一个任职周期 i 内的需求 α_i , 这将花费 $c_i = c_g \alpha_i$ 货币单位。如果 $c_i < c_0$, 这个方案就会被采纳(假设成本是政治决策的主要问题)。这个“周期性评审”决策的结果如图 1-3 所示。

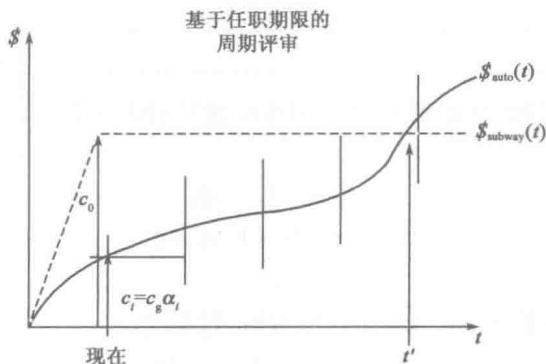


图 1-3 公共交通长期成本图

如果基础设施投资决策的规则是选择下一个任职周期内(需求缓慢增长)的最低成本,那么投资汽车交通总是会获选,因为需求的阶段增长结果: $c_i < c_0$ 。但从长远来看,汽车基础设施的投资成本是没有上限的。如果决策是基于长远的目光($t > t'$),那么应该选择地铁(长远成本更低)。

另一个关于“未来需求预见性”的观点是,系统本身会创造需求;在制定设计目标时应该充分考虑(甚至利用)这一点。具有长远意义的规划应该具有长远的视野和眼光。

1.3.5 规划和设计方法

比较分析法——这种方法是指观察并且效仿相似的城市是如何运作的。尽管这种方法很有效、不容易出差错,也经常使用,但它可能错过一个创新机会,即想出仅适用于该城市的解决方案。(本课程中不会用到这种方法,我们将从头开始,系统地进行创新性设计)

分步法——这是系统规划所必须做的——问题往往很大,无法一步完成。我们首先对整体情况进行大致的勾画;然后逐一完成设计/工程步骤。

对大型问题进行全面广泛的规划时,简化分析非常有用。决策涉及的变量,诸如公交车辆数、车站数、线路数等在实际中都是整数,但我们将其视为可除的(连续型)变量。这使得问题大大简化,例如将整数规划问题转变成了线性规划,因此复杂问题更容易解决。只要没有大的错误,这种简化就是有效的。

表 1-1 所示为规划与设计的区别。

规划与设计的区别

表 1-1

	决策	方法
规划	大规模/长期	简化/广泛
设计		详细/具体

对一个简单的数学(整数)规划,例如在预算的限制条件下最大化个人的出行距离:

$$\max \{z = 22x + 18y\} \quad (1-12)$$

$$\text{s. t. } 2.1x + 1.9y \leq 2 \quad (1-13)$$

$$x, y \in Z \quad (1-14)$$

这个问题非常简单,可以直接作图求解,结果为:

$$x^* = 0, y^* = 1, z^* = 18$$

接下来,我们采用上述规划方法对问题进行简化,即将 x, y 视为连续型变量。问题就转变成一个线性规划,并有解(乐观解):

$$x^* = 0.952, y^* = 0, z^* = 20.95$$

(这个解是乐观的,因为它是在约束条件较少的情况下的最优值。)为获得一个可行的解,需将上述结果向上或向下进行取整。由于限制条件是预算,必须向下取整,因此有:

$$x^* = 0, y^* = 0, z^* = 0$$

这个解很悲观,因为它保证可行,而不一定最优。实际上,这个解比最优解要差很多。因此,分布法的简化假设对小规模的问题是不适用的。

如果我们做同样一个问题,但是规模大很多(例如预算是对整个城市而言的),我们用下面的数学规划来求解:

$$\max \{z = 22x + 18y\} \quad (1-15)$$

$$\text{s. t. } 2.1x + 1.9y \leq 200 \quad (1-16)$$

$$x, y \in Z \quad (1-17)$$

然后开始规划步骤,假设变量可以取非整值(线性规划),解(乐观解)为:

$$x^* = 95.2, y^* = 0, z^* = 2095$$

四舍五入取整(即设计步骤)得到一个最终的目标函数值:

$$x^* = 95, y^* = 0, z^* = 2090$$

现在,整数规划中用分步法得出的悲观解就跟乐观解非常接近了,因此跟实际能取到的最优解更加接近。可见,将大型规划问题简化对分析的结果而言,并