朱德祥代数与几何讲义

第2卷

朱德祥 著

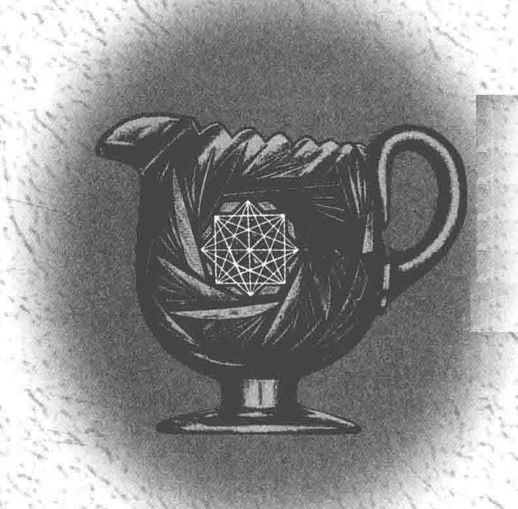
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ZHUDEXIANG DAISHU YU JIHE JIANGYI

朱德祥代数与几何讲义

第2卷

朱德祥 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

该书是昆明师范学院数学系1951—1957年使用的自编讲义.1954年经教育部批准,作为全国高等师范院校交流教材.作者为国立清华大学十级(1934—1938)杰出校友、著名几何学家、数学教育家朱德祥教授.本书共三章,分别论述:切线或切面方程,包线或包面、对于二次曲线之格与格线、对于二次曲面之格与格面.

该书可作为高等院校数学与应用数学专业的教学参考用书,也可作为数学爱好者学习射影几何的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

朱德祥代数与几何讲义.第2卷/朱德祥著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.4

ISBN 978-7-5603-6185-7

Ⅰ.①朱… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①代数-高等学校-教学参考资料②几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O15②O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第211428号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 9 字数 92 千字
版 次 2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6185-7
定 价 28.00元

前　　言

1° 此書係以 René Garnier 氏所著代數與幾何 (Leçons d'Algèbre et de Géométrie, Gauthier-Villas, Paris) 上中兩冊為藍本加以增刪寫成. 一九五一年開始在昆明師範学院數学系試教.

2° 前四章係代數預備知識, 祇作徵引之便, 讀過高等代數的可以不讀.

3° 倘時間不敷, 可略去一部份材料, 比方略去 5·23, 5·44, 6I·8, 7I (而將其中重要概念分散在 7II 中講), 8I·10, 8II·4 的 4°, 5°, 6°; 9·9, 9·11, 10·11, 11·7, 12·3, 12·4, 13·10—13·104, 大致無損於系统上的啣接.

4° 每一章必須配合適当习題, 能聯繫平面幾何及解析幾何尤佳. 書中例題較少, 宜適当增加.

5° 编者学識浅薄, 錯误必难免, 敬希教正.

朱德祥

一九五一年八月於昆明師範学院

此項講義前曾以初等幾何学講義, 於一九五四年中央人民教育部批准, 作為高等師範学校交流教材, 寄各师範学院及师範专修科.

◎ 目录

第七章　切线或切面方程，包线或包面　//1

Ⅰ. 切线或切面方程式　//1

7Ⅰ.1　平面代数曲线在其上一单点之切线　//1
7Ⅰ.2　重点之款　//3
7Ⅰ.3　推广于代数曲面　//5
7Ⅰ.4　平面曲线之切线方程，曲面或空间曲线之切面方程　//7
7Ⅰ.5　一次的切线或切面方程　//12
7Ⅰ.6　适合切线或切面方程之直线或平面，其特征点之决定　//14
7Ⅰ.7　由切线或切面方程求点方程　//17
7Ⅰ.8　级与等　//18

Ⅱ. 二次曲线之切线方程及二次曲面之切面方程　//20

7Ⅱ.1　二次曲线或二次曲面之异点　//20
7Ⅱ.2　无异点性之二级曲线或二级曲面之切线方程或切面方程　//21
7Ⅱ.3　有异点性之款　//23
7Ⅱ.4　试求无异线性之二等曲线及无异面性之二等曲面之点方程　//24
7Ⅱ.5　有异线性或异面性之款　//25
7Ⅱ.6　例　//29
7Ⅱ.7　二等包线及二等包面之分类　//32

第八章　对于二次曲线之格与格线　//43

Ⅰ. 定义及基本性质　//43

8Ⅰ.1　格方式　//43
8Ⅰ.2　对于一二次曲线之相配点　//44

8Ⅰ.3　一点对于一二次曲线之格线　//46
8Ⅰ.4　基本逆问题　//47
8Ⅰ.5　给定一点,求作其格线　//49
8Ⅰ.6　对于二次曲线之自格三角形　//50
8Ⅰ.7　基本定理　//51
8Ⅰ.8　对偶的推广　//53
8Ⅰ.9　二次曲线之中心及直径　//54
8Ⅰ.10　关于有心二次曲线之 Apollonius 氏定理　//59
Ⅱ.对于二次曲线之对格变换　//61
8Ⅱ.1　仅含点及直线之图形　//61
8Ⅱ.2　对格曲线　//62
8Ⅱ.3　定理　//63
8Ⅱ.4　对格变换之应用　//65
第九章　对于二次曲面之格与格面　//87
9.1　格方式　//87
9.2　对于二次曲面之相配点　//87
9.3　一点对于二次曲面之格面　//88
9.4　逆问题,锥面之款　//89
9.5　对于二次曲面之自格四面形　//90
9.6　相配平面　//91
9.7　相配直线　//92
9.8　秩为 4 之二次曲面的中心,直径及径面　//95
9.9　关于有心二次曲面之 Apollonius 氏定理　//100
9.10　对格变换　//102
9.11　对格变换之应用　//103
附录　主要术语说明　//109
后记　//113
编辑手记　//117

第七章

切線或切面方程，包線或包面

I. 切線或切面方程式（tangential equations）

7I·1 平面代數曲線在其上一單點之切線. 案一代數曲線（algebraic curve）C[①]，即為 m 次齊次多項式

(1) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

所定之曲線，其中 x_i 為齊次或三線坐標. 設 x_1, x_2, x_3 為曲線上一點 M 之坐標，而 y_1, y_2, y_3 為其平面上任一點 M_1 之坐標，則直線 MM_1 上任一點之坐標為

$$x_1+\lambda y_1,\quad x_2+\lambda y_2,\quad x_3+\lambda y_3.$$

若此點為 MM_1 與曲線 C 之交點，則 λ 必滿足方程

$$f(x_1+\lambda y_1,\ x_2+\lambda y_2,\ x_3+\lambda y_3) = 0.$$

此式左端以 Taylor 氏公式展開之，遂可書為

(2) $$f(x_1,x_2,x_3)+\lambda(y_1f'_{x_1}+y_2f'_{x_2}+y_3f'_{x_3})+\sum_{k=2}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(k)}f=0.$$

因 $M(x_1,x_2,x_3)$ 在 C 上，故第一項為零. 故 λ 為左端之因子. $\lambda=0$ 所定之點即 M 本身，故可置而不論. 以 λ 除此式左端. 欲 MM_1 在 M 之鄰近與 C 另有一交點 M'，則必需亦祇需此新方程有一無窮小根. 故 $y_1f'_{x_1}+y_2f'_{x_2}+y_3f'_{x_3}$ 应為無窮小. 今祇討論在 M 點 f'_{x_1}，f'_{x_2}，f'_{x_3} 不同時為零之款，如是之 M 称為 C 之一單點（simple point）或規則點（regular point）. 以 X_1, X_2, X_3 表流動坐標（running coordinates），則在單点 M，方程式

① 切線，規則点，k 級重点（multiple point of order k）諸观念，並不需曲線為代數的. 但在非代數曲線（non-algebraic curve），級（order）與等（class）之观念，不復有意義. 此按语亦適用於曲面及空间曲線.

(3) $$X_1 f'_{x_1} + X_2 f'_{x_2} + X_3 f'_{x_3} = 0$$

表一確定之直線．由上所云，此直線為MM′当M′沿曲線C趋於M之極限位置．故(3)即為C在單點M之切線之方程，而$(f'_{x_1}, f'_{x_2}, f'_{x_3})$即此切線之坐標．

此结果亦易核驗之，設曲線C（图14）之齊次坐標係以参數表為

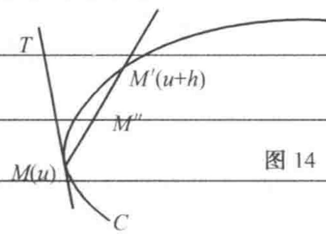


图 14

C: $$x_i = x_i(u) \quad , \quad i = 1, 2, 3,$$

其中$x_i(u)$假設在任一值u之鄰域可展為Taylor氏級數．M(u)點之切線MT由定義為联M至C上一鄰点M′(u+h)之弦当$h \to 0$時之極限位置．由Taylor氏定理，

$$x_i(u+h) - x_i(u) = x'_i(u) h + \frac{x''_i(u)}{2!} h^2 + \cdots \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

但坐標為

$$\frac{x_i(u+h) - x_i(u)}{h} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

之點M″在弦MM′上，令$h \to 0$，可知以$(x'_1(u), x'_2(u), x'_3(u))$為坐標之點，為M″之極限位置，因之在切線MT上．明乎此，遂易核驗上之結果．

f既係m次齊次函數，故適合Euler氏恒等式

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + x_3 f'_{x_3} = mf.$$

既設曲線C：$f(x_1, x_2, x_3) = 0$之参數表示為$x_i = x_i(u)$，$i = 1, 2, 3$，則無论u為何，將有恒等式

$$f(x_1(u),\ x_2(u),\ x_3(u))=0.$$

對於参數u求紀，得

(4) $$x_1'f'_{x_1}+x_2'f'_{x_2}+x_3'f'_{x_3}=0.$$

另一方面，$M(x_1,x_2,x_3)$在C上，故有$f(x_1,x_2,x_3)=0$，而Euler氏関係變為

(5) $$x_1f'_{x_1}+x_2f'_{x_2}+x_3f'_{x_3}=0.$$

方程(4)和(5)表明直線(3)通過曲線C上之$M(x_1,x_2,x_3)$點，及C在M之切線MT上之一點(x_1',x_2',x_3')。故直線(3)即切線MT.

71.2 重點之款. 今察例外之款，即f之三偏紀數在$M(x_1,x_2,x_3)$同時為零者：

(6) $$f'_{x_1}=f'_{x_2}=f'_{x_3}=0.$$

此時(2)之左端可以λ^2除尽，故凡過M之直線，至少割曲線C於兩點，重合於M. 如是之點，称為曲線C之非規則點(non-regular point)，或異點(singular point)，或重點(multiple point)(通常為双點(double point)).

設曲線C以笛氏坐標表之為$F(x,y)=0$，則重点之條件為

$$F'_x=0\ ,\quad F'_y=0,$$

讀者可参閱Goursat-Hedrick, Mathematical Analysis, Vol. I, Chap. III. 茲核驗此兩條件(6)有等性.

首先注意，條件(6)不因(行列式$\neq 0$之)投影變換而變. 蓋设

$$x_i=\sum_{j=1}^{3}c^i_j z_j\ ,\quad i=1,2,3,\quad |c^i_j|\neq 0,$$

為一投影變換，并命

$$g(z_1,z_2,z_3)\equiv f\Big(\sum_{j=1}^{3}c^1_j z_j\ ,\ \sum c^2_j z_j\ ,\ \sum c^3_j z_j\Big),$$

则有 $$\frac{\partial g}{\partial \xi_j}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_k}c_j^k.$$

因 $|c_j^i|\neq 0$，故 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$ 与 $\frac{\partial g}{\partial \xi_1}=\frac{\partial g}{\partial \xi_2}=\frac{\partial g}{\partial \xi_3}=0$ 有等性. 由是可知，條件(6)与坐標系(system of reference)無関. 此乃從方程(2)於一重點之幾何性質可以預知者.

於是可設在(1)中 $x_3=0$ 表無窮遠線. 假設M在有限空间，則恒可設其齊次坐標為 $x,y,1$，其中 x,y 為该點之笛氏坐標；且曲線之笛氏坐標方程將為

$$F(x,y)\equiv f(x_1,x_2,1)=0\qquad(x=x_1,\ y=x_2).$$

由Euler氏恒等式有

$$x_1f'_{x_1}+x_2f'_{x_2}+f'_{x_3}=mF,$$

故 $f'_{x_1}=0,\ f'_{x_2}=0,\ f'_{x_3}=0$ 与 $F'_x=0,\ F'_y=0,\ F=0$ 有等性.

若M係在無窮遠線上，則條件(6)即取為無窮遠重點之定義.

今往定一代數曲線 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 在一非規則點 $M_0(x_{10},x_{20},x_{30})$ 之切線之集體. 為普遍計，此後假定在(2)中 $\lambda^0,\lambda^1,\cdots,\lambda^{k-1}$ 之係數為零而無论 y_1,y_2,y_3 為何，但 λ^k 之係數則否. 易言之，f 及其直至 $k-1$ 級偏纪數在 M_0 均為零，而其 k 級偏纪數至少有一在 M_0 不為零. 此時稱 M_0 為一 k 級重點(multiple point of order k). 於是變動 $M_1(y_1,y_2,y_3)$ 點，俾 λ^k 之係數為無窮小；則方程(2)將有 k 根等於零，而第 $k+1$ 根為無窮小：直線 M_0M_1 截C於 k 點重合於 M_0，且截C於第 $k+1$ 點在 M_0 之極近. 此即言，在 M_0 點曲線C切線之全體，其方程可在(2)中命 λ^k 之係數為零而得，y_1,y_2,y_3 則視為流動坐標. 故此方程即

$$\left(y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(k)}f=0.$$

兹往核验此方程表k条直線，發自M_0，互異或重合．普遍言之，在一m級方式$f(x_1,\cdots,x_n)$中，实行一线性替换$x_i=\varphi_i(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$或简书为$x_i=\varphi_i(\bar{x})$；仿此命$y_i=\varphi_i(\bar{y})$，且注意

$$x_i+\lambda y_i=\varphi_i(\bar{x})+\lambda\varphi_i(\bar{y})=\varphi_i(\bar{x}+\lambda\bar{y}),$$

右端表$\varphi_i(\bar{x}_1+\lambda\bar{y}_1,\cdots,\bar{x}_n+\lambda\bar{y}_n)$．命

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f[\varphi_1(\bar{x}),\cdots,\varphi_n(\bar{x})]\equiv F(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n),$$

其中F表一m級新方式．則有

$$(7)\qquad f(x_1+\lambda y_1,\cdots,x_n+\lambda y_n)=f[\varphi_1(\bar{x}+\lambda\bar{y}),\cdots,\varphi_n(\bar{x}+\lambda\bar{y})]$$
$$=F(\bar{x}_1+\lambda\bar{y}_1,\cdots,\bar{x}_n+\lambda\bar{y}_n).$$

此式不论λ为何恒真確，故两端λ各冪之係數為恒等．

回到本题，於x_1,x_2,x_3实行一线性替换，使M_0之新坐標為$0,0,1$，而設M_1之坐標為$\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3$．$f(x_1,x_2,x_3)$將變為

$$F(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=\bar{x}_3^m G_0(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\bar{x}_3^{m-1}G_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\cdots+\bar{x}_3G_{m-1}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+G_m(\bar{x}_1,\bar{x}_2),$$

其中G_i表$\bar{x}_1,\bar{x}_2$之i級齊次式．由(7)及(2)，在$F(\lambda\bar{y}_1,\lambda\bar{y}_2,1+\lambda\bar{y}_3)$中，$\lambda^0,\lambda^1,\cdots,\lambda^{k-1}$之係數应恒等於零，此要求$G_0\equiv0$，$G_1\equiv0$，$\cdots$，$G_{k-1}\equiv0$，而切線之全體在新坐標系中之方程可書為$G_k(\bar{y}_1,\bar{y}_2)=0$，$\bar{y}_1,\bar{y}_2$表流動坐標．若介紹以$(0,0,1)$為原點之笛氏坐標$\xi,\eta$，此方程將變為$G_k(\xi,\eta)=0$，即表發自$M_0$之$k$條直線．

71·3 推廣於代數曲面．上兩節之結果，甚易推廣於一代數曲面(algebraic surface) S：即以齊次式四面坐標為

$$(1)'\qquad f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$$

所定之曲面，其中f表一m級齊次多項式．設在一點$M(x_1,x_2,x_3,x_4)$，f'_{x_i} $(i=1,2,3,4)$不全為零，則M稱為單點或規則點．曲面在單點M有一切面，以

(3)′ $$\sum_{i=1}^{4}\xi_i f'_{x_i}=0$$

為其方程．仿前可驗此平面含有$M(x_1,x_2,x_3,x_4)$點以及S上過M任一曲線$x_i=x_i(u)$ $(i=1,2,3,4)$在M點之切線上之點(x_1',x_2',x_3',x_4')．

設在一點M，一級偏紀數f'_{x_i}均為零，則M稱為畢點或錐頂點(conical point)．故畢點之方程為

(6)′ $$f'_{x_i}=0,\quad i=1,2,3,4.$$

畢點之方程(6)′，和坐標系無関．

仿上可證，S上過畢點M各曲線在M點之切線，構成以M為頂點之一錐面Γ，此錐面之方程可在$f(x_1+\lambda y_1,x_2+\lambda y_2,x_3+\lambda y_3,x_4+\lambda y_4)$之展開式中，命其$\lambda$最低次之係數為零而得，$y_i$視為流動坐標．欲核驗此方程確表一錐面，可取笛氏坐標以M為原點，則曲面之方程呈下形

$$\varphi_k(\xi,\eta,\zeta)+\varphi_{k+1}(\xi,\eta,\zeta)+\cdots+\varphi_m(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

其中φ_j為j級齊次式．對於此坐標系，Γ將以$\varphi_k(\xi,\eta,\zeta)=0$為方程．因$\varphi_k$為齊次式，故$\Gamma$為一$k$級錐面(cone of order k)．若$\varphi_{k+1}\equiv0,\cdots,\varphi_m\equiv0$，則曲面$S$本身即變為$\Gamma$．当$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$之二級偏紀數在$M$点不全為零時，$\Gamma$為一二級錐面(cone of second order)．

今設M為S之一規則點，P為過M點之平面，截S成一截線(section) C．則C以M為規則點或否，視P不切於或切於S而定．欲

明此點，可選擇坐標系俾M之坐標為$(0,0,0,1)$而P之方程為$x_3=0$．若P不與S相切，則f'_{x_1}，f'_{x_2}二者在M點至少有一異於零（由Euler氏公式知$f'_{x_4}(0,0,0,1)=mf(0,0,0,1)=0$），因之M為C之規則點，蓋C在平面$x_3=0$上之方程為$f(x_1,x_2,0,x_4)=0$也．反之，若P切於S，則$f'_{x_1}$，$f'_{x_2}$，$f'_{x_4}$在M點均為零，從而M為C之異點．

71·4 平面曲線之切線方程，曲面或空間曲線之切面方程．

先論平面(x_1,x_2,x_3)上之曲線．今設一問題：在引用齊次式三線坐標x_1,x_2,x_3之一平面中，已知一直線(u_1,u_2,u_3)，試觀其是否切於一代數曲線C：$f(x_1,x_2,x_3)=0$．例如設$x_3=1$，將此式對於x_2解之，命為

$$x_2=g(x_1);$$

此曲線在一點$(x_1,g(x_1),1)$之切線，以下式為其方程

$$X_2-X_3g(x_1)=g'(x_1)(X_1-x_1X_3);$$

欲此與$u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3=0$全同，必須亦祇須有一x_1值存在，使

(E) $$g'(x_1)=-\frac{u_1}{u_2},\quad x_1g'(x_1)-g(x_1)=\frac{u_3}{u_2}.$$

初設$g''(x_1)\neq0$，則x_1在前方程中出現；對於x_1解之，設為$x_1=G(\frac{u_1}{u_2})$；代入第二方程得一關係

$$\frac{u_3}{u_2}=\Phi(\frac{u_1}{u_2}),$$

化為齊次式，設為

(8) $$\varphi(u_1,u_2,u_3)=0.$$

反之，將上之理論逆推之，則見若(8)已滿足，則(E)中x_1之兩方程為相容的，而直線(u_1,u_2,u_3)將切於曲線C．

次設 $g''=0$，或 $g=ax_1+b$；则得 $u_1=-au_2$，$u_3=-bu_2$；故 u_i 应適合两方程；此甚自然，盖曲线C变为一直线而祗有一切线也。

實用上，無需将 $f(x_1,x_2,1)=0$ 對於 x_2 而解之，祗需表示方程式

$$(9)\qquad \frac{u_1}{f'_{x_1}}=\frac{u_2}{f'_{x_2}}=\frac{u_3}{f'_{x_3}},\quad f(x_1,x_2,1)=0$$

（其中處々令 $x_3=1$）有一公解 (x_1,x_2)；應用消去法之理论，吾人知此问题祗需用有理運算，且所得之式 $\varphi(u_1,u_2,u_3)=0$ 将為 u_1,u_2,u_3 之一齊次多項式。注意，若多項式 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可分解為若干多項式 f_i 之乘積，则C由若干曲线 C_i 組成，其方程各為 $f_i=0$；吾人将分别處理此等曲线 C_i；特别，若其中之一為直线，则 (u_1,u_2,u_3) 欲切於 C_i，須满足两條件。除此款外，吾人可謂：欲切於代數曲线C，则 (u_1,u_2,u_3) 所受之限制，可表以方程(8)，其中 φ 為 (u_1,u_2,u_3) 之齊次多項式；$\varphi(u_1,u_2,u_3)=0$ 稱為曲线C之切线方程（tangential equation），直线之坐標 u_1,u_2,u_3 因之称為切线坐標（tangential coordinates），即§I·2之线坐標。為對待起見，$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 稱為C之點方程（point equation）。

設已知C之参數表示 $x_i=x_i(\lambda)$，$i=1,2,3$，欲得其切线方程，可寫出方程式

$$u_1x_1(\lambda)+u_2x_2(\lambda)+u_3x_3(\lambda)=0$$

對於λ有一個双根（double root）之條件。

例如欲得圆 $x=\cos\lambda$，$y=\sin\lambda$ 之切线方程，则可表出方程式

$$u_1\cos\lambda+u_2\sin\lambda+u_3=0$$

於λ有一双根，因之得 $u_1^2+u_2^2-u_3^2=0$。

II·41 空间(x_1,x_2,x_3,x_4)之曲面．試求平面(u_1,u_2,u_3,u_4)应满足何條件始可与一代數曲面S：$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$相切，S係以四面坐標表之，f為x_i之一齊次多項式．取$x_4=1$，對於x_3解出，命

$$x_3=g(x_1,x_2).$$

在一點$(x_1,x_2,x_3,1)$之切面之方程為

$$X_3-x_3X_4=p(X_1-x_1X_4)+q(X_2-x_2X_4),$$

其中$p=g'_{x_1}$，$q=g'_{x_2}$．欲此式与$u_1X_1+u_2X_2+u_3X_3+u_4X_4=0$全同，必需亦祇需有兩數$x_1,x_2$存在，俾有

(10) $$p=-\frac{u_1}{u_3},\quad q=-\frac{u_2}{u_3},\quad px_1+qx_2-x_3=\frac{u_4}{u_3}.$$

初設從(10)之前兩式可解出x_1,x_2，易言之，即假設函數行列式(functional determinant)

$$\frac{D(p,q)}{D(x_1,x_2)}=rt-s^2$$

不恒等於零，其中$r=g''_{x_1^2}$，$s=g''_{x_1x_2}$，$t=g''_{x_2^2}$；則從$(10)_1$及$(10)_2$得一解

$$x_1=G\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right),\quad x_2=H\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right),$$

代入$(10)_3$，即得所求之條件

$$\frac{u_4}{u_3}=\Phi\left(\frac{u_1}{u_3},\frac{u_2}{u_3}\right),$$

或以齊次形式表之，即

(11) $$\varphi(u_1,u_2,u_3,u_4)=0.$$

次設$rt-s^2\equiv0$（無論x_1,x_2為何），但二級紀數r,s,t不全恒等於零，例如設$r\neq0$．此時p,q間应有一函數関係$q=h(p)$，$h(p)$為表面不含x_1,x_2之一函數．但易求得

$$\frac{D(p,px_1+qx_2-x_3)}{D(x_1,x_2)}=x_2\cdot\frac{D(p,q)}{D(x_1,x_2)}\equiv0,$$

因之 $px_1+qx_2-x_3=-h(p)$，$h(p)$ 亦為表面上不含 x_1, x_2 之一函數. 故 S 之切面之方程為

$$\xi_3 = p\xi_1 + h(p)\xi_2 + h(p)\xi_4 .$$

故 S 之切面祇含一個參數 p，或祇有 ∞^1 切面，如是之曲面 S 稱為可展面 (developable surface)，而平面 (u_1, u_2, u_3, u_4) 須適合兩條件

$$\frac{u_2}{u_3} + h\left(\frac{-u_1}{u_3}\right) = 0, \quad \frac{u_4}{u_3} + h\left(\frac{-u_1}{u_3}\right) = 0$$

方可與一切面全同. 上兩方程化為較為對稱之形式，即得

(12) $\qquad \varphi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \quad \psi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0,$

其中 φ 及 ψ 表齊次多項式.

反之，正如於 (8) 所論，若方程 (11) 或 (12) 已满足，则平面 (u_1, u_2, u_3, u_4) 即與曲面 S 相切.

未設行列式 $\frac{D(p,q)}{D(x_1,x_2)}$ 之各元恒等於零，此時將有 $g(x_1,x_2) \equiv ax_1+bx_2+c$，$u_1=-au_3$，$u_2=-bu_3$，$u_4=-cu_3$；$u_1, u_2, u_3, u_4$ 應適合三方程式；此乃自然之道，因此時 S 為一平面，因之祇有一切面也.

實用上，無需將 $f(x_1, x_2, x_3, 1)=0$ 對於 x_3 解出，祇需表出下列方程

(13) $\qquad \dfrac{u_1}{f'_{x_1}} = \dfrac{u_2}{f'_{x_2}} = \dfrac{u_3}{f'_{x_3}} = \dfrac{u_4}{f'_{x_4}}, \quad f(x_1, x_2, x_3, 1) = 0$

(其中在求紀以後，處處令 $x_4=1$) 有一公共解 x_1, x_2, x_3，而消去法之理論表明此問題祇需有理運算. 總言之，欲平面 (u_1, u_2, u_3, u_4) 切於代數曲面 S (假設 S 既非平面，復不可約 (irreducible))，則当 S 為可展面時，其條件為兩方程 (12)；当 S 非可展面時，其條件為一方程 (11)；在此等方程中，φ 及 ψ 均表 u_i 之齊次多項式. (11) 稱為非可展面 S 之切面方程 (tangential equation)；(12) 兩式稱為可展面 S 之切面方程；u_i 稱

為切面坐標(tangential coordinates)，即6I·4所言之平面坐標. $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ 則稱為S之點方程(point equation).

由上可知，錐面(cone)有兩切面方程；其一表示平面 u_i 經過錐面之頂點，另一則係関於其方向(orientation)者. 例如錐面

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$$

之切面為 $x_1X_1+x_2X_2-x_3X_3=0$，使与 $\sum_{i=1}^{4} x_iX_i=0$ 全同，即得

$$u_4=0,\quad u_1^2+u_2^2-u_3^2=0.$$

同樣，柱面有兩切面方程；其一表示平面u与一固定方向δ平行；另一則表示，不平行於δ之一平面，与(u_1, u_2, u_3, u_4)之相交直線，及与柱面相截之截線，二者相切. 例如柱面 $x_1^2+x_2^2-x_4^2=0$ 有兩切面方程

$$u_3=0,\quad u_1^2+u_2^2-u_4^2=0.$$

若已知非可展面S之一參數表示法 $x_i=x_i(\lambda,\mu)$，$i=1,2,3,4$，欲得其切面方程，可表出S被平面(u_1,u_2,u_3,u_4)所截之截線，亦即

$$P(\lambda,\mu)=u_1x_1(\lambda,\mu)+\cdots+u_4x_4(\lambda,\mu)=0$$

所定之曲線有一個双點(7I·3)；欲其如是，通常①必需亦祇需在平面(λ,μ)上之曲線 $P=0$ 亦然；因之 $P=0$，$P'_\lambda=0$，$P'_\mu=0$ 三方程应為相容的，而切面方程可從此等方程中消去λ,μ而得.

7I·42 空間曲線之款. 一空間曲線即可以參數表為 $x_i=x_i(\lambda)$ $(i=1,2,3,4)$者. 欲一平面与之相切，則其坐標(u_1,u_2,u_3,u_4)应滿足

① 即假設在平面(λ,μ)上有半徑相当小之一圓C存在，包圍双點A之影點(image)(λ_0,μ_0)，而在S上有A之某鄰域D，使於D之任一點，有圓C內之一點且僅一點与之對应，且反之亦然；易言之，C与D之点有一一對应関係.