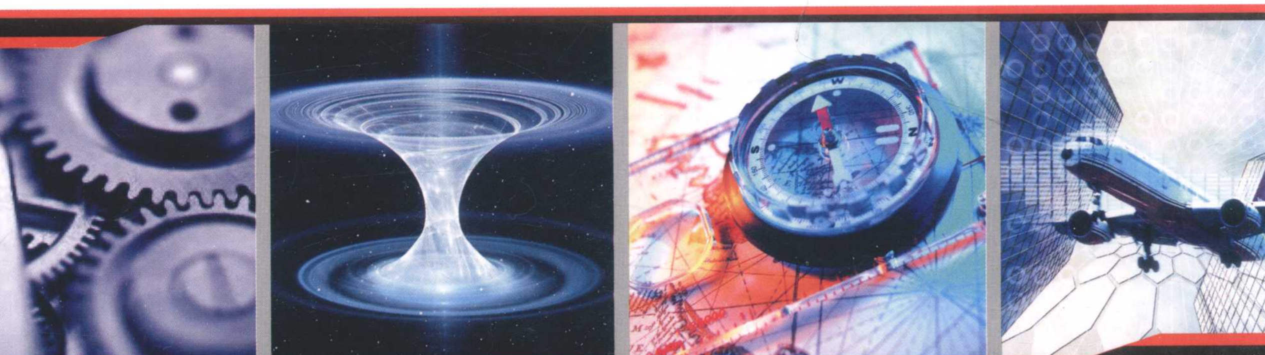
高等学校“十三五”规划教材

PLANNING TEXTBOOKS FOR HIGHER EDUCATION

西北工业大学研究生高水平课程体系建设丛书



高等结构动力学

贺尔铭 杨智春 编著

西北工業大學出版社

高等学校"十三五"规划教材

西北工业大学研究生高水平课程体系建设丛书

GAODENG JIEGOU DONGLIXUE

高等结构动力学

贺尔铭　杨智春　编著

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书的宗旨是从理论的高度介绍结构动力学分析中的基本概念、分析原理和计算方法。全书包括绪论和 9 章内容:第 1 章阐述线性振动系统理论的基本概念、振动特性及响应求解方法,第 2 章讲述复杂结构振动系统的理论建模方法,第 3 章讨论结构固有振动的特征值问题,第 4 章讨论结构振动模态理论及响应分析方法,第 5 章讨论结构动力学模型修正,第 6 章讨论结构动力学设计及优化,第 7 章和第 8 章讨论复杂结构响应求解的模态综合法和界面位移综合法,第 9 章为结构动力学理论知识在航空航天结构工程中的应用案例分析。

本书是高等院校飞行器设计与工程和固体力学学科的硕士、博士研究生专业基础课教材,所讲述的原理及分析方法对研究其他工程结构的动力学问题具有普遍的指导意义。

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/贺尔铭,杨智春编著.—西安:西北工业大学出版社,2016.11
ISBN 978-7-5612-5158-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①贺… ②杨… Ⅲ.①结构动力学 Ⅳ.①O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 275274 号

策划编辑: 卞 浩
责任编辑: 胡莉巾

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编:710072
电　　话: (029)88493844, 88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 兴平市博闻印务有限公司
开　　本: 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张: 15.25
字　　数: 370 千字
版　　次: 2016 年 11 月第 1 版 2016 年 11 月第 1 次印刷
定　　价: 38.00 元

前　言

所谓结构，就是可以承受和传递载荷的构件或其组合体，如飞机的机体结构、舰船的船体结构、火箭的箭体结构、卫星的星体结构、汽车的车体结构、桥梁结构和楼房结构等。随着先进运载装备等朝高性能、轻量化、长寿命方向发展，结构也设计得或者越来越精细、或者越来越复杂、或者越来越庞大。

工程结构在服役过程中，都不可避免地要受到动态载荷的作用，如楼房会受到地震载荷和风载荷的作用，飞机在地面要受到滑跑载荷的作用，在空中要受到突风载荷的作用。因为这些载荷都随时间变化，所以被称为动态载荷(简称动载荷)。

动载荷作用下结构的响应(振动)与静态载荷作用下结构的响应(静变形)是完全不同的，动态响应除了取决于外界动载荷的性质(如载荷幅值和频率)及作用点外，还取决于结构本身的固有动态特性(如固有振动频率和固有模态)及阻尼特性。结构的固有动态特性和结构在动态载荷下的响应，就是结构动力学研究的主要内容。

一般的结构动力学教材，通常是将结构简化为单自由度系统或多自由度系统，从振动力学的角度，介绍振动理论的基本概念、原理和方法，讲述振动的物理现象和一般分析方法，也涉及一些简单的结构如杆、梁结构的振动分析，不会涉及工程结构的动力学分析。

“高等结构动力学”课程正是根据这种情况为研究生开设的。本书的意图是要从理论的高度介绍结构动力学分析中的基本概念、分析原理和计算方法，研究对象包括多自由度振动系统、简单结构和复杂结构，所讲述的分析方法对研究结构动力学问题具有普遍指导意义。

本书的大部分内容来源于杨智春教授 2009 年撰写的讲义“高等结构动力学”，原讲义是针对具有结构振动理论基础的研究生而编写的，起点较高，叙述上侧重于理论的深度和方法、原理。本次改编正式出版时，考虑到目前研究生生源的基础差异，在保留原讲义的理论深度外，特地增加“线性振动系统分析基础”“工程结构案例分析”两章，补充大量例题，又为各章(除第 9 章外)设置针对性的习题，并对原有章节内容进行梳理调整，更加关注相关理论知识在实际结构工程中的具体应用，使全书内容系统性加强、教学内容直观易懂，便于学生自学领会。

本书包括绪论和 9 章内容：

绪论主要介绍高等结构动力学的基本任务、研究要素、研究范畴和研究方法。

第 1 章线性振动系统分析基础。作为结构动力学的理论基础，主要介绍多自由度系统的自由振动特性、固有频率、固有模态的特性以及确定结构基频的近似方法。

第 2 章振动系统数学模型的建立方法。介绍用拉格朗日方程建立结构动力学分析数学模型的方法，介绍用有限元方法建立结构振动数学模型的原理，典型结构的动力学有限元建模以及动力学有限元建模中的相关问题。

第 3 章结构固有振动特征值问题的数值解与摄动解。介绍结构振动特征值问题的性质、各种特征值数值求解方法及特征值的摄动解。

第 4 章结构振动的模态理论及响应分析方法。主要介绍实模态理论和复模态理论、结构振动响应求解的直接积分方法和模态叠加方法，对精细积分方法在结构振动响应计算中的应

用也给出简要的介绍。

第 5 章结构动力学模型的修正。主要介绍结构动力学模型修正的基本概念，结构实模态参数和复模态参数的灵敏度分析，结构动力学模型修正的经典方法。

第 6 章结构的动力学设计。主要介绍结构动力学优化设计的概念和经典优化方法，简要给出结构频率优化设计和频响函数优化设计的一般方法。

第 7 章模态综合方法。详细介绍模态综合方法的基本原理、基本步骤，模态综合方法中使用的各种分支模态及其物理意义，各种代表性的模态综合方法，着重介绍固定界面综合法，自由界面综合法和混合界面综合法。

第 8 章界面位移综合法。介绍界面位移综合法的基本思想和几种经典方法，着重介绍界面位移间接综合法，界面位移直接综合法以及聚缩阻抗矩阵综合法。

第 9 章工程结构案例分析。结合 8 个航空航天结构工程案例分析，反映高等结构动力学各章节理论知识在实际工程结构分析中的应用情况。

本书的正式出版获得西北工业大学研究生高水平课程建设项目的支持，在成稿过程中参考了国内外的相关著作及文献成果，在此一并致谢。

由于水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者不吝指正！

编著者

2016 年 8 月

目　　录

第 0 章　绪论 …… 1

第 1 章　线性振动系统分析基础 …… 4

1.1　概述 …… 4
1.2　单自由度系统的振动分析 …… 4
1.3　多自由度系统的振动分析 …… 19
习题 …… 31

第 2 章　振动系统数学模型的建立方法 …… 34

2.1　概述 …… 34
2.2　拉格朗日方程建立振动系统数学模型 …… 34
2.3　有限元法建立振动系统数学模型 …… 42
习题 …… 54

第 3 章　结构固有振动特征值问题的数值解与摄动解 …… 57

3.1　概述 …… 57
3.2　数值解 …… 57
3.3　摄动解 …… 72
习题 …… 77

第 4 章　结构振动的模态理论及响应分析方法 …… 78

4.1　概述 …… 78
4.2　实模态理论 …… 78
4.3　复模态理论 …… 87
4.4　求解振动响应的直接积分法 …… 92
4.5　求解振动响应的精细积分法 …… 96
习题 …… 98

第 5 章　结构动力学模型的修正 …… 100

5.1　概述 …… 100
5.2　结构动力学模型修正的若干问题 …… 101
5.3　实模态参数的灵敏度 …… 102
5.4　黏性阻尼系统的复模态参数灵敏度 …… 103
5.5　频响函数及频域响应的灵敏度 …… 105

5.6 结构振动灵敏度分析的基本规律 …… 106
5.7 结构动力学模型修正方法的分类 …… 107
习题 …… 113
附录 结构动力学有限元模型修正的研究进展 …… 113

第 6 章 结构的动力学设计 …… 127

6.1 概述 …… 127
6.2 优化方法 …… 128
6.3 多频优化的结构动力学设计 …… 134
6.4 频响优化的结构动力学设计 …… 136
习题 …… 138

第 7 章 模态综合法 …… 139

7.1 模态综合法的基本原理 …… 139
7.2 各种形式的分支模态 …… 142
7.3 固定界面模态综合法 …… 152
7.4 自由界面模态综合法 …… 161
7.5 混合界面模态综合法 …… 169
7.6 直接分支模态综合法 …… 173
习题 …… 175

第 8 章 界面位移综合法 …… 177

8.1 概述 …… 177
8.2 界面位移间接综合法 …… 177
8.3 界面位移直接综合法 …… 182
8.4 聚缩阻抗矩阵综合法 …… 184
8.5 聚缩阻抗矩阵综合超单元法 …… 187
习题 …… 187

第 9 章 工程结构案例分析 …… 189

9.1 飞机全机动力学初始建模及模型修正 …… 189
9.2 模态综合法分析飞机着陆动力学响应 …… 195
9.3 矩阵摄动法分析运载火箭附加约束阻尼层后的动力学特性 …… 198
9.4 界面位移综合法建立局部结构精细动力学有限元模型 …… 205
9.5 多阶频率及振型约束下的结构动力学优化设计 …… 211
9.6 飞机机翼的边界支撑优化设计及振型修正 …… 219
9.7 四边固支矩形开孔板的动力学优化设计 …… 226
9.8 高速飞行器热防护结构的有限元动力学模型修正 …… 229

主要参考文献 …… 237

第0章　绪　　论

一、高等结构动力学的基本任务

无论在设计或使用时，都需要对结构在动载荷作用下的动力学特性进行准确分析或预测。

基本任务：研究结构在动载荷作用下所表现出来的动态特性——结构振动特性。结构振动特性包括内在特性和外在特性两个方面。

内在特性：结构的固有振动特性，指结构的固有振动频率和固有振动模态。

外在特性：自由振动响应特性，与结构的初始条件、结构的阻尼特性有关。强迫振动响应特性，与结构所受的外激励特性及结构的阻尼特性有关。两者都与结构固有振动特性有关。

二、高等结构动力学研究的三个要素

高等结构动力学研究涉及的三个要素如下：

激励（输入）—结构（系统）—响应（输出）。

激励（输入）：动态的、随时间变化的，变化规律可以是周期的、瞬态的、随机的。形式上可以是力、位移、能量。空间分布上可以是离散的也可以是连续的，可以是单点输入也可以是多点输入。

结构（系统）：可以是线性的，也可以是非线性的；可以是保守的（无阻尼系统），也可以是非保守（耗散能量）的。

响应（输出）：结构对激励的振动响应，在时间域内可分为周期振动响应（简谐振动响应为其特例）、瞬态振动响应和随机振动响应，在频率域内可分为单频振动响应和多频振动响应，在空间形式上可分为结构的纵向振动响应、弯曲振动响应、扭转振动响应以及其他复杂形态的组合振动响应。

结构固有振动特性是结构产生各种振动的内因，结构所受的动载荷是结构产生振动的外因。结构产生振动的最基本原因是结构所具有的弹性特性和惯性特性。

三、高等结构动力学的研究范畴

高等结构动力学研究的三个问题如下：

响应预测：已知系统（结构）和输入（激励），求输出（响应）；

系统辨识：已知输入（激励）和输出（响应），确定系统（结构）的固有特性参数；

动载荷预计：已知系统（结构）和输出（响应），求输入（激励）。

常将第一个问题称为结构动力学正问题，将后两个问题称为结构动力学逆问题。

本书仅涉及结构动力学正问题及其相关问题，如结构动力学设计与结构动态特性修改。

四、高等结构动力学研究的基本方法

1. 结构动力学研究步骤

结构动力学的研究步骤为设计—分析—试验—再设计，如图 0－1 所示。

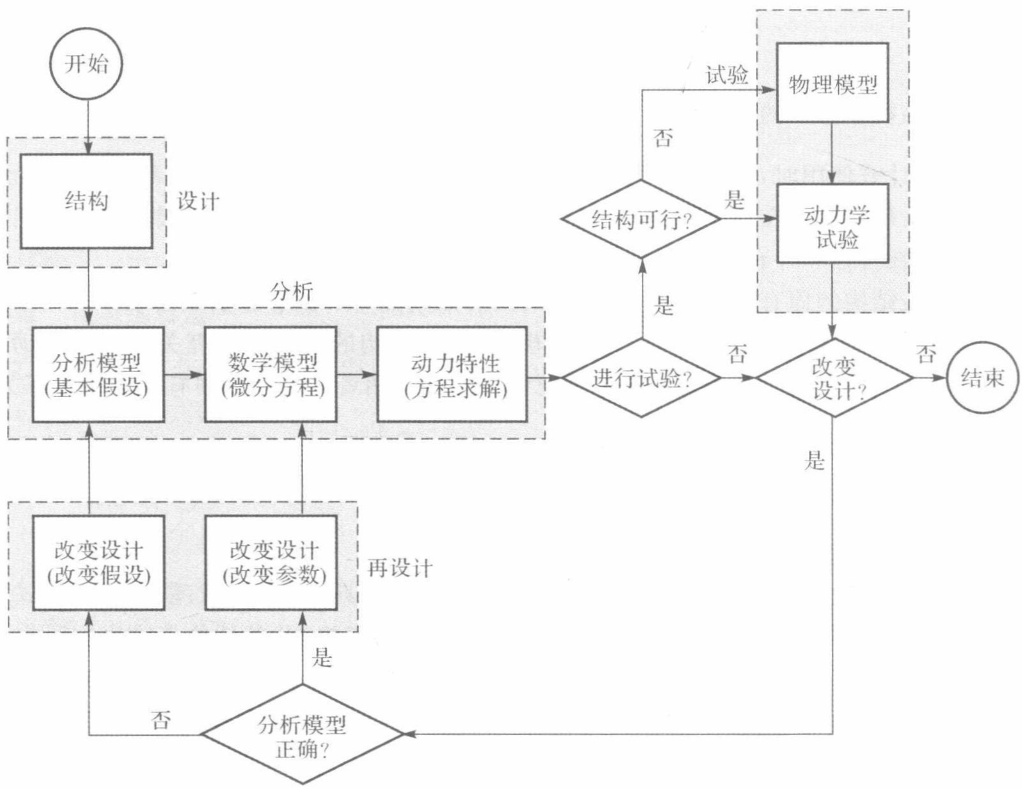


图 0－1　高等结构动力学的研究步骤

2. 高等结构动力学分析步骤

(1)建模。建模方法有实验建模方法(实验模态分析)、分析方法——力学原理和变分原理。

(2)分析求解。

3. 分析方法

微分方法：牛顿定律、达朗贝原理(以微元体为研究对象的微分原理方法)。

积分方法：能量守恒、动量守恒(以整个系统为研究对象的积分原理方法)。

微分变分方法：虚功原理。

积分变分方法：哈密尔顿原理。

有限元素方法——工程(复杂)结构的振动分析方法。

4. 分析模型

(1)连续参数模型。通常是以结构的一个局部作为分析对象，所建模型在数学上表现为一个偏微分方程。对于简单结构，连续参数模型可以给出其振动问题的精确解，但当结构稍微复杂，就难以建立其连续参数模型，求解一般比较困难，对复杂边界条件难以适应。

(2)离散(集中)参数模型。按某种合适的规律将结构离散为用弹性元件连接在一起的若干质量单元,利用牛顿定律建立振动方程,得到的集中参数模型的振动方程是常微分方程(组),求解相对容易。因此,集中参数模型动力学问题的分析计算,相对来说比较简单。

(3)有限元模型。求解工程结构动力学问题的最常用方法,结构的动力学有限元模型是全局结构模型,最终得到的是一个矩阵常微分方程,其优点是建模方法规范,对边界的适应性强。但用有限元方法建立结构动力学分析模型时,仍然需要有扎实的结构动力学理论基础和丰富的有限元建模经验。

5. 求解方法

(1)理论分析。通过解析解,获得结构动力学问题的一般性原理、重要性质,并通过结构的动力学特性分析,指导结构的动力学特性设计。理论分析的解答通常以代数式(初等函数、超越函数)的形式来表达。

(2)数值分析(数值计算、数值仿真)。对于复杂的工程结构,对其动力学特性和动力学响应的分析通常是用数值分析来获得的。数值分析方法使得对结构动力学特性和响应的求解更容易实现,而且更便于进行参数影响规律的分析,数值分析结果通常以图线、表格方式来表达,经过观察,可以直观地从中归纳出参数影响的规律。

(3)综合技术。结构动力学特性和响应分析的综合技术,主要应用于复杂大型结构的动力学特性或动力学响应分析。其主要有以下两类方法。

子结构方法(模态综合法、界面位移综合法)。求解结构固有特性或动力学响应的近似方法,即由结构部件(子结构)的动力学特性综合得出大型复杂的整体结构的动力学特性或求解出动力学响应。

模态叠加法。求解结构动力学响应的一种近似方法,即在截断的结构模态坐标空间中,对结构动力学方程进行解耦,基于展开定理用模态位移法或模态加速度法,求解得到结构的动力学响应。

第 1 章　线性振动系统分析基础

1.1　概　　述

确定某个机械振动系统几何位置的独立坐标的数目称为自由度数。如果独立坐标只有一个，称它为单自由度系统，图 1-1 所示是单自由度振动系统的 4 个例子，单自由度振动系统是最简单的振动系统，但它是研究更复杂的振动系统的基础。

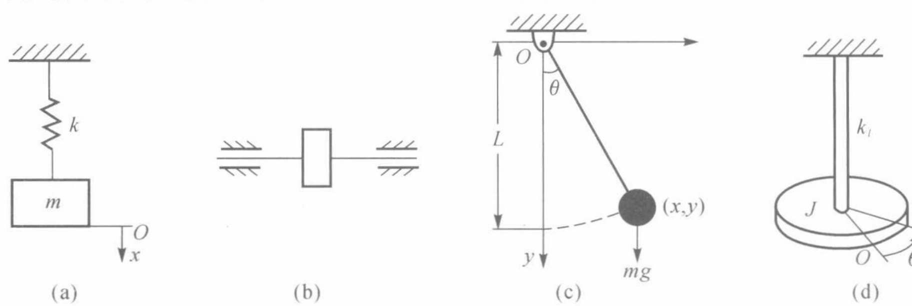


图 1-1　单自由度振动系统

(a)弹簧振子；(b)轴的横向振动系统；(c)单摆；(d)轴的扭转振动系统

需要用两个或两个以上独立坐标确定系统的几何位置时，则称该系统为 2 自由度系统或多自由度系统，或统称为多自由度系统。例如，多质点轴的横向振动系统，多圆盘轴的扭振系统等。对于连续弹性体，可以看成无穷多个质点组成的系统，需要用无穷多个坐标或一连续函数来确定系统位置，因此是无穷多自由度系统。实际工程结构的振动往往用一个有限的多自由度振动系统来描述，因此研究单自由度系统、多自由度系统的振动特性是研究复杂结构振动的基础和出发点。

1.2　单自由度系统的振动分析

1.2.1　单自由度无阻尼系统的自由振动

1. 单自由度系统的振动微分方程

图 1-2 所示弹簧振子是一典型的单自由度振动系统。设质点的质量为 m，弹簧的刚度为 k，阻尼器的阻尼系数为 c，作用在质点上的激振力为 $f(t)$，它是时间的函数。设在任一时刻 t，质点离开平衡位置的位移为 x，那么作用在质点上的弹性力为 $-kx$，称它为线性恢复力，阻尼力为 $-c\dot{x}$，称它为黏性阻尼力（viscous damping force）。根据牛顿(Newton)第二定律，可建立振动微分方程

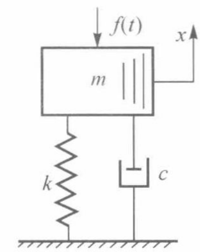


图 1－2　弹簧振子

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t) \quad \text{或} \quad m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+f(t) \tag{1-1}$$

如果激振力为简谐力，$f(t)=F_0\sin(\omega t)$，则式(1－1)可写为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin(\omega t) \tag{1-2}$$

式(1－1)左端各力关于位移、速度、加速度等状态变量是线性的，是一线性微分方程，由线性微分方程描述的振动称为线性振动。

2. 无阻尼自由振动

如果没有激振力(动荷载)作用，振动系统在初始扰动后，仅靠恢复力维持的振动称为自由振动。如果阻尼力也可忽略不计，则称为无阻尼自由振动(undamped free vibration)。从式(1－1)知，无阻尼自由振动的微分方程为

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1-3}$$

若引入 $\omega_n^2=k/m$，则式(1－3)可写为

$$\ddot{x}+\omega_n^2x=0 \tag{1-4}$$

式(1－4)是单自由度系统无阻尼自由振动的标准微分方程，它是二阶齐次线性微分方程。其通解为

$$x=C_1\sin(\omega_n t)+C_2\cos(\omega_n t) \tag{1-5}$$

从式(1－5)可看到运动具有周期

$$T_n=2\pi/\omega_n=2\pi\sqrt{m/k} \tag{1-6}$$

频率

$$f_n=\omega_n/(2\pi)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}=1/T_n \tag{1-7}$$

角频率或圆频率

$$\omega_n=\sqrt{k/m} \tag{1-8}$$

由于 ω_n 只与系统本身的参数 m，k 有关，而与初始条件无关，故称为固有角频率，简称为固有频率或自然频率(natural frequency)。

式(1－5)的常数 C_1 和 C_2 可根据运动的初始条件求出，设 $t=0$ 时 $x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$，代入式(1－5)，求出常数 C_1，C_2 后，得

$$x=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin(\omega_n t)+x_0\cos(\omega_n t) \tag{1-9}$$

若令 $x_0=A\sin\varphi$，$\dot{x}_0/\omega_n=A\cos\varphi$，上述方程变为

$$x=A\sin(\omega_n t+\varphi) \tag{1-10}$$

且有

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}, \quad \tan\varphi=\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0} \tag{1-11}$$

从式(1－10)知，无阻尼自由振动为简谐振动，其振幅 A 和相位角 φ 都与初始条件有关，而频率与初始条件无关。无阻尼自由振动的运动图线(时间历程曲线)如图 1－3 所示。

当系统作无阻尼自由振动时，由于没有能量输入与输出，系统的机械能守恒，即动能与势能之和保持不变，它们进行周期性的转换。

系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega_n^2A^2\cos^2(\omega_n t+\varphi) \tag{1-12}$$

势能为

$$U=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_n t+\varphi) \tag{1-13}$$

而最大动能为

$$T_{max}=\frac{1}{2}m\omega_n^2A^2 \tag{1-14}$$

最大势能为

$$U_{max}=\frac{1}{2}kA^2 \tag{1-15}$$

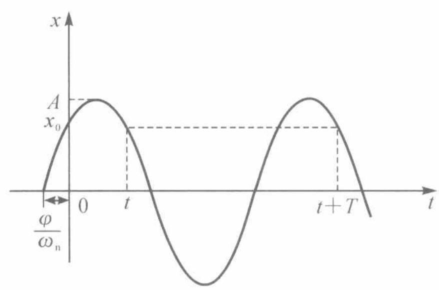


图 1-3　无阻尼自由振动曲线

根据机械能守恒定律，有 $T_{max}=U_{max}$，由此可得到与式(1-8)相同的频率公式：

$$\omega_n=\sqrt{k/m}$$

例 1.1　如图 1-4 所示，一长为 l，弯曲刚度为 EI 的悬臂梁，自由端有一质量为 m 的小球，小球又被支承在刚度为 k_2 的弹簧上，忽略梁的质量，求系统的固有频率。

解　根据材料力学公式，可求得悬臂梁的刚度为

$$k_1=3EI/l^3$$

k_1 与 k_2 为并联弹簧，其等效刚度为

$$k=k_1+k_2=3EI/l^3+k_2$$

固有频率为

$$\omega_n=\sqrt{k/m}=\sqrt{(3EI/l^3+k_2)/m}$$

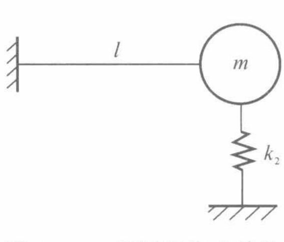


图 1-4　无阻尼振动系统

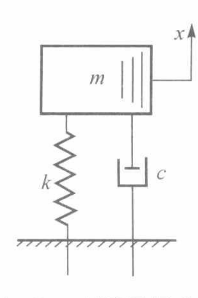


图 1-5　有阻尼振动系统

1.2.2　单自由度有阻尼系统的自由振动

前节讨论的无阻尼自由振动实际上并不存在，所有的自由振动都会因为存在阻尼而消耗振动能量，振动都会在或长或短的时间内衰减下来。图 1-5 所示为一个具有黏性阻尼器的弹簧振子，其中 c 为阻尼系数。

由牛顿第二定律可建立系统的振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1-16}$$

令

$$c/m = 2n, \quad k/m = \omega_n^2 \tag{1-17}$$

则式(1-17)可写为有阻尼自由振动方程的标准形式：

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1-18}$$

式(1-18)为二阶齐次线性微分方程，设其解为 $x = Ae^{st}$，将它代入式(1-18)后得特征方程

$$s^2 + 2ns + \omega_n^2 = 0 \tag{1-19}$$

解得特征根

$$s = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \tag{1-20}$$

下面讨论由于 n 的不同，s 为实数、复数等各种情形所对应微分方程的解。

1. $n > \omega_n$

这种情况称为过阻尼(over damping)，这时 s 为两个负实根，即

$$s_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2}$$

式(1-18)的解为

$$x = Ae^{(-n+\sqrt{n^2-\omega_n^2})t} + Be^{(-n-\sqrt{n^2-\omega_n^2})t} \tag{1-21}$$

式中，A，B 为初始条件决定的待定常数。

由式(1-21)知，这时运动曲线为一个负指数的衰减曲线，说明系统运动是稳定的，且不会发生多次往复振动，运动曲线如图 1-6 所示。根据初始条件 x_0，$\dot{x}_0$ 的不同，可出现如图 1-6 所示的(a)(b)(c)三种情况。

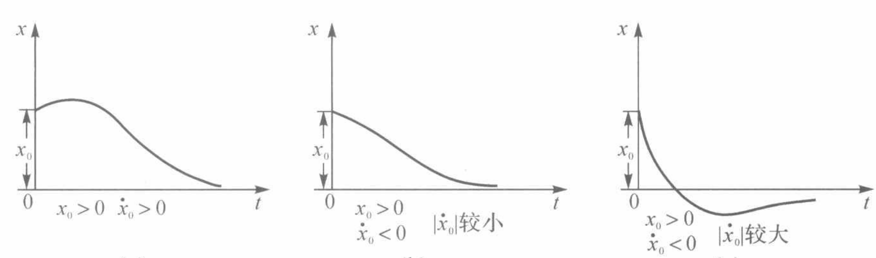


图 1-6　有阻尼振动响应

2. $n = \omega_n$

这种情况称为临界阻尼(critical damping)，这时 s 为两个相等的实根，有 $s = -n$，式(1-18)的解为

$$x = (A + Bt)e^{-nt} \tag{1-22}$$

式中，系数 A，B 是由初始条件待定的常数。

这时运动的时间历程曲线为如图 1-6(c)所示的一条衰减曲线。设临界阻尼情形的阻尼系数为 c_c，从 $n = \omega_n$ 可解得临界阻尼系数为

$$c_c = 2\sqrt{mk} = 2m\omega_n \tag{1-23}$$

今后将系统的阻尼系数 c 与其临界阻尼系数 c_c 之比称为阻尼比(damping ratio)ζ，有

$$\zeta = c/c_c = n/\omega_n \tag{1-24}$$

显然，在临界阻尼情况下，$\zeta=1$，在过阻尼情况下，$\zeta>1$。

3. $n<\omega_n$($c<c_c$ 或 $\zeta<1$)

这种情况称为欠阻尼(under damping)。此时 s 的两个根为复数，即

$$s_{1,2} = -n \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_n^2 - n^2} = -n \pm \mathrm{j}\omega_d \tag{1-25}$$

其中

$$\mathrm{j}=\sqrt{-1}, \quad \omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - n^2} = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{1-26}$$

ω_d 称为有阻尼固有频率，式(1-18)的解为

$$x = \mathrm{e}^{-nt}(C_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}) \tag{1-27}$$

根据欧拉(Euler)公式

$$\begin{cases} \sin(\omega_d t) = \dfrac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}) \\ \cos(\omega_d t) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_d t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}) \end{cases}$$

可将式(1-27)写为

$$x = \mathrm{e}^{-nt}[C_3\cos(\omega_d t) + C_4\sin(\omega_d t)] \tag{1-28}$$

或

$$x = A\mathrm{e}^{-nt}\sin(\omega_d t + \varphi) \tag{1-29}$$

设初始条件为 $t=0, x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$，将其代入式(1-29)，解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2} \tag{1-30}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}$$

式(1-29)表示在欠阻尼下的自由振动，它不是严格的周期振动，是一个减幅的往复运动，可称为准周期振动，其往复一次的时间(周期)为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-31}$$

衰减振动的振幅按指数规律减小，其时间历程曲线如图 1-7 所示。

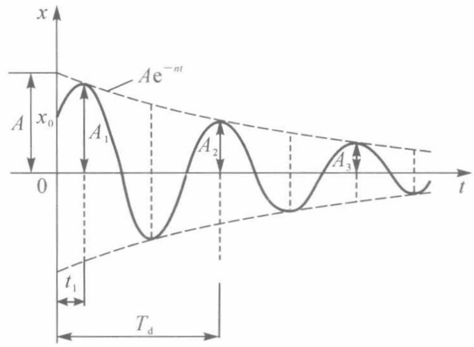


图 1-7　衰减振动曲线

在有阻尼自由振动中，由于阻尼不断消耗能量又没有外界能量补充，所以系统总能量不断减少，振幅不断衰减。一般来说，阻尼对振幅的影响较大，使其按指数曲线规律衰减。从式(1-26)看出，阻尼对频率有影响，它降低了固有频率。但一般材料的阻尼比 ζ 都很小，例如钢(0.01～0.03)，木材(0.04)，混凝土(0.08)等。所以说阻尼对固有频率的影响很小，一般可认为 $\omega_d \approx \omega_n$。

工程中常用对数衰减率(logarithmic decrement)来表征系统阻尼情况，定义为两个相邻的同号位移峰值之比的自然对数，即

$$\delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}} = \ln \frac{A e^{-nt}}{A e^{-n(t+T_d)}} = nT_d \tag{1-32}$$

考虑 $n = \zeta\omega_n$ 及式(1-31)，有

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta \tag{1-33}$$

从式(1-33)可看出，对数衰减率 δ 与阻尼比只差一个常数倍。工程中用于表征阻尼的还有一些其他物理量，如品质因子 Q(quality factor)为

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \tag{1-34}$$

它是从电振荡引入的物理量。还有损耗因子：

$$\eta = 1/Q = 2\zeta \tag{1-35}$$

它是从结构阻尼假设和能量损耗引入的。

例 1.2　某系统作自由衰减振动，得到的实验曲线如图 1-7 所示，如果经过 m 个周期，振幅正好减至原来的一半，求系统的阻尼比。

解　根据对数衰减率的定义可推出以下公式：

$$\delta = \frac{1}{m}\ln \frac{x_i}{x_{i+m}} \approx 2\pi\zeta \tag{1-36}$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi m}\ln \frac{x_i}{x_{i+m}} = \frac{1}{2\pi m}\ln 2$$

将 2π 及 $\ln 2$ 值代入，可得

$$\zeta = 0.110/m \tag{1-37}$$

式(1-37)可作为衰减振动实验求阻尼的公式，其中 m 可以是整数，也可以是分数或小数。

1.2.3　不同激励形式下单自由度系统的受迫振动

1. 简谐激振

工程中存在较多的是受迫振动(forced vibration)，即振动系统在外界干扰力或干扰位移作用下产生的振动。外界不断对振动系统输入能量，才能使振动得以维持而不至于因阻尼存在而随时间衰减。由于干扰力的形式不同，可将受迫振动分为简谐激振、周期激振、脉冲激振、阶跃激振和任意激振。本节研究一种最基本的受迫振动——在简谐激振力作用下产生的受迫振动。

(1) 振动微分方程及其解。

单自由度系统在简谐激振力作用下的受迫振动微分方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \tag{1-38}$$

式中，F_0 为激振力幅值；ω 为激振力角频率。

若将以下关系引入式(1-38)

$$n=\frac{c}{2m},\quad \omega_n^2=k/m,\quad h=F_0/m \tag{1-39}$$

则运动方程(式(1-38))可写为标准形式：

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega_n^2x=h\sin(\omega t) \tag{1-40}$$

根据微分方程理论，上述非齐次方程的解由两部分组成，即

$$x=x_1+x_2$$

其中 x_1 是齐次方程

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega_n^2x=0$$

的通解，在欠阻尼 $n<\omega_n$ 情况下，有

$$x_1=e^{-nt}(C_2\sin(\omega_d t)+C_1\cos(\omega_d t)) \tag{1-41}$$

式中，$\omega_d=\sqrt{\omega_n-n^2}=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$。而 x_2 是式(1-40)的特解，设

$$x_2=A\sin(\omega t-\alpha) \tag{1-42}$$

将式(1-42)代入式(1-40)后，解得

$$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}=\frac{x_{st}}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2+(2\zeta\bar{\omega})^2}} \tag{1-43}$$

$$\tan\alpha=\frac{2n\omega}{\omega_n^2-\omega^2}=\frac{2\zeta\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}^2} \tag{1-44}$$

$$\bar{\omega}=\omega/\omega_n \tag{1-45}$$

$$x_{st}=h/\omega_n^2=F_0/k \tag{1-46}$$

式中，$\bar{\omega}$ 称为频率比；x_{st} 称为静变形。

这样式(1-40)的解可写为

$$x=e^{-nt}(C_2\sin(\omega_d t)+C_1\cos(\omega_d t))+\frac{h}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}\sin(\omega t-\alpha)$$

如果初始条件为 $t=0,x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0$，则得方程的全解为

$$\begin{aligned}x=&e^{-nt}\left(\frac{\dot{x}_0+nx_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)+x_0\cos(\omega_d t)\right)+\\&Ae^{-nt}\left(\frac{n\sin\alpha-\omega\cos\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t)+\sin\alpha\cos(\omega_d t)\right)+A\sin(\omega t-\alpha)\end{aligned} \tag{1-47}$$

式(1-47)表示单自由度系统对简谐激振力 $F_0\sin(\omega_d t)$ 的位移响应。全式由三大项组成，前两项之和代表自由振动部分，这部分只在最初一段时间起作用，称为过渡过程。最后一项是激振力频率为 ω 的简谐振动，这部分振动不衰减，称为稳态响应。式中第一项只与初始条件有关，而与激振力无关，所以也称第一项为零输入响应，而第二项与第三项的组合称为零初始响应。

(2) 稳态响应的振幅和相位。

式(1-43)和式(1-44)表达了稳态响应中的振幅、相位与激振频率的关系。下面我们将这两个公式都写成无量纲形式，即

$$\beta=\frac{A}{x_{st}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\bar{\omega}^2)^2+(2\zeta\bar{\omega})^2}} \tag{1-48a}$$