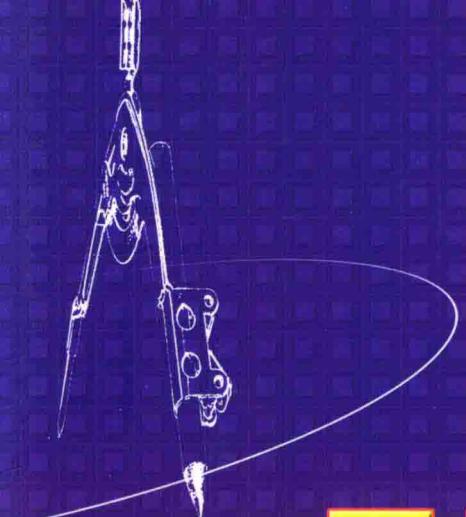


高等医药院校教材

供基础、临床、口腔、药学、影像等专业用



医用物理学实验

第2版

主编 王 岚
仇 惠
王晨光



人民卫生出版社

高等医药院校教材

供基础、临床、口腔、药学、影像等专业用

医用物理学实验

第2版

主编 王 岚 仇 惠 王晨光

编者 (以姓氏笔画为序)

于 新 (哈尔滨医科大学)	张淑丽 (齐齐哈尔医学院)
王 岚 (哈尔滨医科大学)	陈 平 (昆明医学院)
王晨光 (哈尔滨医科大学)	武晓杰 (齐齐哈尔医学院)
仇 惠 (牡丹江医学院)	周建莉 (昆明医学院)
卢 雁 (哈尔滨医科大学)	周鸿锁 (牡丹江医学院)
李 喆 (哈尔滨医科大学)	徐春环 (牡丹江医学院)
张中华 (哈尔滨医科大学)	鲍修增 (哈尔滨医科大学)

审 阅 鲍修增

人 民 卫 生 出 版 社

图书在版编目 (CIP) 数据

医用物理学实验/王岚等主编. —2 版. —北京:
人民卫生出版社, 2005. 9

ISBN 978-7-117-07022-5

I. 医… II. 王… III. 医用物理学-实验-医学
院校-教材 IV. R312-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 095435 号

门户网: www.pmph.com 出版物查询、网上书店
卫人网: www.ipmph.com 护士、医师、药师、中医师、卫生资格考试培训

版权所有, 侵权必究!

医用物理学实验

第 2 版

主 编: 王 岚 仇 惠 王晨光

出版发行: 人民卫生出版社 (中继线 010-59780011)

地 址: 北京市朝阳区潘家园南里 19 号

邮 编: 100021

E - mail: pmph@pmph.com

购书热线: 010-67605754 010-65264830

010-59787586 010-59787592

印 刷: 北京市卫顺印刷厂

经 销: 新华书店

开 本: 787×1092 1/16 印张: 10.5

字 数: 243 千字

版 次: 2001 年 10 月第 1 版 2013 年 1 月第 2 版第 7 次印刷

标准书号: ISBN 978-7-117-07022-5/R·7023

定 价: 20.00 元

打击盗版举报电话: 010-59787491 E-mail: WQ@pmph.com

(凡属印装质量问题请与本社销售中心联系退换)

再 版 前 言

本书是在鲍修增、徐春环、张淑丽主编的《医用物理学实验》(2001年10月第1版)一书的基础上修订而成。在基本保留原版实验内容的基础上,本书增加了“霍耳效应及其应用”的实验内容,并对部分实验内容进行了重新编写及调整。书中所涉及的物理名词和符号均依照1996年出版的《物理学名词》和1994年实施的《中华人民共和国国家标准——量和单位》进行了修订。

本书由哈尔滨医科大学、牡丹江医学院、齐齐哈尔医学院和昆明医学院编写,王岚进行了统一修改,王晨光绘制了全部插图,最后由鲍修增进行了审阅。

限于编者的水平,恳请使用本书的师生和读者对书中的错误和不当之处予以指教,以便再版时加以改进。

编 者

2005年5月

前 言

医用物理学是一门以实验为基础的自然科学，医用物理学实验课教学的目的是培养学生具有良好的实验素养，掌握基本的实验技能，熟悉和了解基本物理仪器的原理和使用方法，增强开展科研工作的能力，为将来的医疗和科研工作打下坚实的基础。随着科学技术的飞速发展，物理理论和实验手段在医学的诊断、治疗、预防和科研方面占有愈来愈重要的地位，从而更加显示出医用物理学实验课的重要性。为适应新形势下的教学需要，我们编写了这本实验教材。

本书包括误差理论、基本物理实验、影像物理实验、医用电子学实验四部分内容，共计 34 个实验。我们尽量选编了一些与医学密切相关的实验内容，在实验内容的书写方面力求简明易懂，避开详尽的数学推导，便于学生理解和掌握。由于课时所限，各院校可根据本校的具体情况选出部分实验内容进行课堂教学，部分内容可作为常设实验（如 A 超、B 超、人耳听力曲线的测定等）供学生课余时间演示。

限于编者的水平，恳请使用本书的师生对书中的错误和不当之处予以指教，以便再版时加以改进。

编 者

2001 年 5 月

目 录

绪 论	1
测量误差与数据处理	4
实验一 基本测量	18
实验二 弦本征振动的观测	25
实验三 液体表面张力系数的测定	27
实验四 液体粘度的测量	30
实验五 驻波法测空气中的声速	34
实验六 超声声速的测定	37
实验七 热敏电阻的特性和应用	42
实验八 人耳听阈曲线的测定	45
实验九 万用电表的使用	48
实验十 万用电桥的原理与使用	51
实验十一 交流电路的测量	55
实验十二 电子束在电场及磁场中的运动	58
实验十三 示波器及其应用	61
实验十四 补偿法测电动势	70
实验十五 电偶极子电场的测绘及心电图模拟	72
实验十六 人体阻抗的频率特性的测定	75
实验十七 霍耳效应及其应用	78
实验十八 摄影及暗房技术	82
实验十九 显微摄影	92
实验二十 分光计的调节和使用	95
实验二十一 旋光仪的使用	105
实验二十二 A 型超声诊断仪的原理及使用	109

实验二十三	B型超声波诊断仪的基本原理及其声像图观察	114
实验二十四	核磁共振	118
实验二十五	放射性测量	122
实验二十六	基本放大电路	124
实验二十七	电流源与电压源	127
实验二十八	场效应管特性曲线的测定	131
实验二十九	集成稳压电源	134
实验三十	集成运算放大器的应用	137
实验三十一	差分放大器	141
实验三十二	文氏电桥振荡器	146
实验三十三	医用换能器的使用	150
实验三十四	设计型实验——电流计的改装	153
附录	实验仪器索引	155

绪 论

医用物理学是一门以实验为基础的自然科学，是高等医学院校各专业学生必修的重要基础课程，而医用物理学实验则是理论课教学极为重要的有机组成部分。现代医学研究和临床诊断、治疗各方面都广泛应用着物理学的实验手段和物理学理论的指导，因此，医学院校的学生应努力学好医用物理学的理论课和实验课，为今后的学习和工作打下坚实的基础。

一、医用物理学实验的教学目的

1. 培养学生的动手能力，使学生在物理实验的基础知识、基本方法和实验技能等方面得到严格的训练，掌握基本物理量测量的原理和方法，学会正确选择和使用基本物理仪器、对实验数据进行正确判断和处理并对实验结果进行合理分析。

2. 通过对实验现象的观察、对物理量的测量和对实验结果的分析，使学生加深对物理学基本理论和定律的理解和掌握，逐步提高观察、分析实验现象和总结实验规律的能力。学习用所学过的理论知识分析和解决实验中所遇到的问题。

3. 通过实验课的教学使学生在运用理论知识、采取合理的实验方法和实验技术手段解决实际问题方面得到必要的基本训练，初步培养学生会用实验手段解决实际问题的能力，同时培养学生严肃认真、实事求是的工作作风。

二、如何学好医用物理学实验

1. 端正学习态度，充分认识物理学实验课的重要性。医用物理学实验课的教学时数少，需掌握的内容多。要想在短时间内学会一整套物理学实验的基本方法、知识和技能，没有严肃、认真的学习态度是很难做到的。因此，学生应充分利用短暂的实验课教学时间，实验前充分地预习；实验中按实验要求合理进行实验操作，仔细观察、思考实验现象，正确记录实验数据，并对实验结果加以全面分析；实验结束后认真写好实验报告，认真上好每一次实验课。

2. 实验前应认真预习好基本物理仪器的原理和使用方法，在大学的医用物理学实验室学生才有较多机会接触许多精密、贵重的物理实验仪器和设备，因此在实验过程中要更多地使用和熟悉物理仪器，做到熟练操作，为掌握复杂的医疗仪器打下基础。

3. 要注意养成良好的实验习惯，首先确保安全第一。根据实验场所的环境和实验所需的装置，正确合理地安排好各种装置、电源及导线的位置，做到实验线路一目了然，尽可能减少实验过程中可能发生的人为故障，使实验得以准确、无误、顺利进行。特别是进行电学实验时，一定要养成求稳不求快的习惯。对每一个连接点都要确保完好

连接,否则线路中只要有一个点虚接,就会浪费大量时间去反复检查线路,甚至使整个实验得出错误的结论。

4. 要注意掌握实验中所采用的基本测量方法。基本测量方法是复杂测量方法的基础,实验过程中不但要理解其原理,同时要尽力熟悉和牢记。

5. 真实记录原始实验数据,字迹一定要清楚、整洁。对原始实验数据一定要实事求是地进行记录,要用钢笔将原始数据、实验环境的温度、所使用仪器的名称、编号等准确无误地记在事先设计好的表格和预习报告上。对于原始数据绝不能随意更改,有些学生当看到自己的实验结果与所预期的不相符合时便随意改动原始数据,这是物理实验的大忌。历史上许多物理定律都是由于实验数据与根据已有理论所预期的结果不相一致才得以被发现的。所以真实地记录原始数据是取得正确实验结果的前提。

6. 培养对实验结果进行分析、判断的能力。当实验结果与所预期的不相符合时,先根据不符合程度的大小来判断问题可能存在的环节,加以改正后重做实验。若无法判断出问题的原因,则请教教师帮助解决,从中学会如何判断和解决问题,从而提高判断分析的能力。

7. 珍惜每次实验课的时间。有时在完成规定的测量内容后还有剩余的时间,这时不要忙于结束实验。首先重新回忆和检查一下自己的整个实验过程,分析一下实验可能存在的问题,找出本实验的关键步骤所在,怎样做才能使实验更准确。如果仍有剩余时间则多进行一些仪器的操作,进一步掌握仪器的原理和使用方法。

三、医用物理学实验课的三个教学环节

物理学实验课是学生在教师指导下独立进行实验的课程。因此在整个实验课过程中要充分发挥学生的主观能动性,通过以下三个教学环节培养学生独立的工作能力和严肃认真、实事求是的工作作风。

1. 课前认真预习 认真阅读实验教材,充分了解本次实验的目的、原理、方法、内容和注意事项,同时对实验所用的仪器、设备、元件及实验步骤有一个大概的了解,在充分预习的基础上写出预习报告,并设计好数据记录表格。

2. 实验中正确操作 实验时要遵守实验室的规章制度,仔细阅读仪器的使用方法和注意事项,在教师指导下正确使用仪器。对于电学实验,必须经教师检查电路的连接正确无误后方可接通电源进行实验(电学、电子学实验须执行“电学、电子学操作规程”,见后)。实验进行时应合理操作,认真思考、仔细观察,及时认真地把原始数据用钢笔记录在预先画好的表格内,如需删去已记入的数据,可用笔划掉,同时注明原因。测量完毕后请教师检查实验数据,合格后方可结束实验并请教师签字。

3. 写好实验报告 先对数据进行整理计算,然后用简洁的文字写好实验报告。实验报告应字迹清楚、文理通顺、图表正确、完整,逐步培养分析、总结问题的能力。实验报告的内容为:

(1) 实验题目、日期。

(2) 实验目的。

(3) 实验仪器及所用元器件(仪器应写出型号、编号、规格)。

(4) 简述实验原理、实验方法及步骤,并画出电路图。

- (5) 完成数据表格及图线、图表等。
- (6) 实验结果的表示及讨论：将实验结果用正确的形式表示清楚并对实验结果进行讨论。回答课后思考题。提出对本次实验的意见及建议。
- (7) 原始数据：将经教师检查并签字的原始数据附在实验报告后面。

四、医用物理实验室规则

1. 保持实验室内肃静和整洁，指导教师和学生一律穿白服进入实验室。
2. 实验前根据指导教师的讲述或实验书上的说明检查仪器、元器件，如有缺损应立即向指导教师报告。
3. 未了解仪器性能之前切勿动手操作，使用仪器时必须严守操作规程，不许拆卸仪器，不许做与本实验内容无关的实验。
4. 使用消耗品时要注意节约。
5. 实验完毕，要整理仪器及元器件，填写仪器使用登记表。关闭电源，做好卫生工作。
6. 如有损坏仪器或丢失器材，有关责任者要赔偿损失并提交书面检查。

五、电学、电子学操作规程

1. 首先确认实验仪器、元器件的名称、极性和标值等相关参数。
2. 断开开关，按电路图摆好各仪器及元器件位置，根据测量范围选好仪器的量程。一般用红色导线连接电源的“+”极输出。电表“+”极接高电势，“-”极接低电势。顺次连接电路。
3. 电路连接完毕后，必须请指导教师检查，确认无误后方可闭合开关。
4. 在实验测量过程中不许改变仪器、仪表的量程，如需改变量程时，要断开电路（切断电源），在整个电路不通电的情况下，重新选定量程。
5. 测量出实验数据后，经指导教师审阅许可后，方可拆卸电路。拆卸电路时、要先断开开关，关闭电源。再将实验仪器、各元器件及导线整理复原。

(王 岚)

测量误差与数据处理

一、测量与误差

1. 测量及其分类 物理实验内容包括两个重要的方面：一是对物理现象的细致观察，二是对物理量的精确测量。观察是对现象的定性了解，测量是定量的研究。测量是物理实验的基础，研究物理现象、了解物质特性、验证物理原理都要进行测量。

所谓测量就是将待测量与规定的同类标准单位量相比较，在允许的误差范围内测得该待测量的大小。例如长度的单位是米、厘米和毫米；质量的单位是千克、克和毫克；电流强度的单位是安培、毫安和微安；时间的单位是秒、毫秒和微秒等，而且每一个测量值都是由数值和单位构成。

根据获得测量结果的方法不同，测量可分为直接测量和间接测量。直接测量是指某些待测量可直接由仪器上读出。例如用米尺测物体的长度，用天平测物体的质量，用电流计测量线路中的电流，用秒表测量时间等都是直接测量。间接测量是指许多待测量往往不能直接测得，需要利用直接测量的量与待测量之间的已知函数关系进行运算，从而得到该待测量的测量结果。例如测量球体的体积 V 时，先直接测量球的直径 d ，再由公式 $V = \pi d^3 / 6$ 可计算出球体的体积。

根据测量条件的同异，测量可分为等精度测量和非等精度测量。实验中对同一待测量，用同一仪器（或精度相同的仪器），在同一条件下进行的各次测量是等精度测量，否则是非等精度测量。等精度测量的各个测得量的可靠程度是相同的，因此，只有等精度测量量才能进行误差计算。

2. 测量的数据 直接测量的数据是从仪器上直接读取，因此直接测量的数据称为读数或原始数据，它是测量的原始依据。在实验中，原始数据必须边测量边记录，不得事后补记。

间接测量的数据是通过对直接测量的原始数据进行某种数学运算得到的，因此有时把间接测量的数据称作得数。

3. 测量的误差及其分类 任何一个待测量在一定的条件下都存在着确定的客观真实值，这个值称为该待测量的“真值”。实际测得的量称为测量值。任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等都不能做到绝对严密，因此测得的结果只能准确到一定的程度，不能认为测量的结果就是它的真值，真值是不可能确切测得的。

测量误差就是测量值与真值之间的差值。实验证明：测量结果都有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程中。在实验中，每使用一种仪器，进行一次测量，都会引入误差。测量一个物理量用的仪器越多，引入误差的机会就越多，因此分析

测量中可能产生的误差,尽可能消除或减少其影响,并对测量结果中未能消除的误差做出估算,是物理实验和其他科学实验必不可少的工作,为此我们必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估算方法等有关知识。

测量误差的来源是多方面的,就其性质而言可分为系统误差和偶然误差。

在一定的测量条件下做多次重复测量时,误差的数值和正负号有较明显的规律,这种误差称系统误差。系统误差主要是由于仪器本身的缺陷或没有按规定条件使用仪器(如天平臂不等、砝码的质量不准、仪器零点未校准等)、定理或公式本身不够严密或实验方法粗糙、实验者技术不够熟练、有不良习惯、使测量值总是有规律地朝某一方偏离真值等。因此系统误差又称为恒定误差,可以通过校准仪器,改进实验装置和实验方法或对测量结果进行理论上的修正而加以消除或尽可能减少。

偶然误差又称随机误差,是指在一定的测量条件下做多次重复的测量,误差出现的数值和正负号没有明显规律。这种误差是由于许多不可预测的偶然因素造成的,如测量时外界温度或湿度的微小起伏、杂散电磁场的干扰、不规则的机械振动和电压的随机波动等使实验过程中的物理现象和仪器的性能时刻发生随机的变化,致使每一次测量值围绕着测量的平均值发生有涨落的变化。偶然误差的出现,就某一次测量值来说是没有规律的,其大小和方向都不能预知,但对一个量进行足够的多次测量,则会发现它们的偶然误差是按一定的统计规律分布的,并且正、负误差出现的机会相等。因此,增加重复测量的次数可以减小偶然误差,但是偶然误差是不可能消除的。

必须强调的是:误差与测量中的错误是根本不同的。测量中的错误是由于实验者在测量、记录或计算时读错、记错、算错或实验设计错误、操作不当等等造成的。测量中的错误不是误差,它完全可以且必须避免。

4. 对测量结果的评价,精密度、正确度、精确度三者之间的关系 测量结果的正确度与精密度分别是系统误差和偶然误差的描述。从测量中可以知道,系统误差越大,测量结果对其真值的偏差也越大。通常将系统误差的大小作为反映正确度高低的定量指标。另一方面,对同一被测量做多次重复测量时,各测量值之间的接近程度是对测量值的精密度的描述。因此,在测量中偶然误差越大,则多次重复测量同一被测量所得的各次测量值相互之间的偏离也越大,即越分散,表明测量值的精密度越低。可见偶然误差可以作为反映精密度高低的定量指标。精确度又称精度,用它来描述测量结果与真值的接近程度。精确度包含了正确度和精密度两方面的含义。只有当系统误差和偶然误差都小时才能认为精确度高。精确度描述了对同一被测量做多次重复测量时,所有测量值对其真值的接近程度以及各测量值之间的接近程度。

正确度、精密度和精确度三者之间的关系可以用打靶时弹着点的分布情况来说明。如图1所示,图中(a)显示弹着点集中,表示精密度高,即偶然误差小,但位置不正,所有弹着点均离靶心较远,表示有一较大的系统误差,正确度低;(b)显示弹着点较分散,表示精密度不如(a),但所有弹着点都在靶心附近,表示正确度较(a)高,即系统误差较(a)小;(c)显示所有弹着点都集中于靶心,表示精密度和正确度都高,即偶然误差和系统误差均小,精确度高。

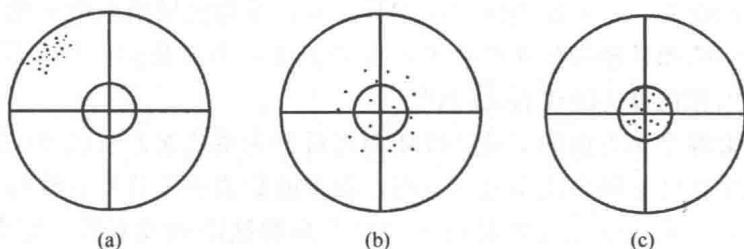


图1 正确度、精密度、精确度的形象描述

二、系统误差的修正

在许多情况下,系统误差是影响测量结果精确度的主要因素,然而它又常常不明显地表现出来,因此,找出系统误差并设法修正它或消除它的影响是误差分析的一个重要内容。系统误差的表现各式各样,必须认真地研究和分析测量原理、仪器及装置的配置、仪器的调整和使用方法,测量条件的选择以及环境因素等与实验全过程有关的各个环节,采取适当的手段去消除系统误差对测量结果的影响。

下面简单介绍几种修正系统误差的方法。

1. 对理论公式进行合理的修正。
2. 严格遵守仪器、装置的调节要求和使用条件。

3. 采用特殊的测量方法。例如用复称法消除天平臂长不等所引起的误差;用电桥测电阻时,采用比较方法,用标准电阻代替待测电阻使电桥重新达到平衡,这时标准电阻的数值就是待测电阻值,这样可避免桥臂的系统误差;对分光计则采用对称测量方法以消除偏心误差等等。以上只介绍了几种较简单的分析、修正系统误差的方法,但系统误差的问题往往都是很复杂的,解决它的方法也有多种多样,应该在实际工作中不断地学习和研究。

三、偶然误差的估计及测量结果的表示

现在我们假定在没有系统误差存在的情况下讨论偶然误差问题。

直接测量和间接测量都有误差,间接测量的数据依赖于直接测量,因此直接测量的误差也必然影响到间接测量的误差,二者之间存在一定的联系。我们首先讨论直接测量的误差,然后讨论间接测量的误差,最后介绍测量结果的表示法。误差的表示法有两种:一种是绝对误差,一种是相对误差,二者存在一定的联系。

(一) 直接测量的误差

1. 单次直接测量偶然误差的估计 实际工作中,有时测量不能重复,有时不需要精确测量,此时,我们可采取一次测量并估计误差。估计误差要根据仪器上注明的仪器误差以及测量条件来确定。没有注明仪器误差的仪器,可取仪器的最小分度的一半作为本次测量误差,例如用米尺测量物体的长度,米尺的最小分度为1mm时,误差可取0.5mm。从教学角度看,只做一次测量的误差值,可根据实验的不同情况以及学生的实验技巧的高低来具体对待。

2. 多次测量偶然误差的估计

(1) 以算术平均值代表测量结果：偶然误差在测量次数足够多的情况下服从统计规律，即测量值比真值大的几率和比真值小的几率几乎相等。在操作方法正确的情况下，各次测量的结果都应在真值附近。

设被测量的真值为 n ，测量次数为 k ，各次测量值分别为 $N_1, N_2, \dots, N_k$ ，则各次测量值与真值之差分别为：

$$\Delta n_1 = N_1 - n, \Delta n_2 = N_2 - n, \dots, \Delta n_k = N_k - n$$

根据前面的分析，这些差值有正有负，在测量次数足够多的情况下

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta n_1 + \Delta n_2 + \dots + \Delta n_k) = 0 \quad (1)$$

$$n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_k}{k} \quad (2)$$

式 (2) 表明无限多次测量值的平均值等于真值。

在实际测量中，实验次数总是有限的，当 k 为有限值时，式 (1) 不等于零，算术平均值也不等于真值，但接近于真值，测量的次数越多，就越接近于真值。算术平均值用 $\bar{N}$ 表示，即

$$\bar{N} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k N_i = \frac{1}{k} (N_1 + N_2 + \dots + N_k) \quad (3)$$

(2) 标准误差：根据误差的定义可知真值不能确定，因此误差也只能估计。估计偶然误差的方法有很多种，最常用的是用标准误差来表示偶然误差。

设对某一物理量在测量条件相同的情况下进行 k 次无明显系统误差的独立测量。用测量值的算术平均值 $\bar{N}$ 来表示测量结果。每一次测量值 N_i 与 $\bar{N}$ 之差称为偏差，记为

$$\Delta N_i = N_i - \bar{N} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4)$$

显然每次测量的偏差有正、有负、有大、有小，因而常用“方均根”对它们进行统计，得到的结果就是单个测量值的标准误差，用 σ 表示：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (N_i - \bar{N})^2}{k - 1}} \quad (5)$$

k 次测量结果的平均值 $\bar{N}$ 的标准误差 $\sigma_{\bar{N}}$

$$\sigma_{\bar{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (N_i - \bar{N})^2}{k(k - 1)}} \quad (6)$$

式 (6) 表示多次测量减小了偶然误差。

(3) 算术平均误差：还有一种偶然误差的估计方法是算术平均误差，记为

$$\delta_N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |\delta_{N_i}| \quad (7)$$

式中 $\delta_{N_i} = N_i - \bar{N}$ 。

算术平均误差常用于误差分析，实验设计或做粗略的误差计算。

(二) 间接测量的误差计算

很多实验中进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量结果根据一定

的数学公式计算出来的。因此,直接测量结果的误差必然影响间接测量的结果,这种影响的大小也可以由相应的数学公式计算出来。表达各直接测量结果的误差与间接测量结果的误差之间的关系式称为误差传递公式。

1. 误差传递的基本公式 设间接测得量的数学表达式为

$$N=f(x, y, z, \dots) \quad (8)$$

$x, y, z, \dots$ 为独立的物理量(直接测得量)。对式(8)求全微分,有

$$dN=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\dots \quad (9)$$

把 $dN, dx, dy, dz, \dots$ 看作误差,式(9)就是误差的传递公式。当 $x, y, z, \dots$ 有微小改变 $dx, dy, dz, \dots$ 时, N 改变 dN , 通常误差远小于测量值。

有时把式(8)取对数后,再求全微分,有

$$\ln N=\ln f(x, y, z, \dots) \quad (10)$$

$$\frac{dN}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}dx+\frac{\partial \ln f}{\partial y}dy+\frac{\partial \ln f}{\partial z}dz+\dots \quad (11)$$

式(9)和式(11)就是误差传递的基本公式。其中式(9)中的 $\frac{\partial f}{\partial x}dx, \frac{\partial f}{\partial y}dy, \frac{\partial f}{\partial z}dz, \dots$

及式(11)中的 $\frac{\partial \ln f}{\partial x}dx, \frac{\partial \ln f}{\partial y}dy, \frac{\partial \ln f}{\partial z}dz, \dots$ 各项称为分误差, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$ 或

$\frac{\partial \ln f}{\partial x}, \frac{\partial \ln f}{\partial y}, \frac{\partial \ln f}{\partial z}, \dots$ 称为误差的传递系数。由式(9)及式(11)可见:一个量的测量误差对于总误差的贡献,不仅取决于其本身误差的大小,还取决于误差传递系数。对于和、差的函数,直接应用式(9);对于积、商的函数,用式(11)更简捷合理。

2. 偶然误差的传递与合成 由各部分的分误差组合成总误差,就是误差的合成,误差的传递公式(9)、(11)包含了误差的合成。

各个独立量测量结果的偶然误差,是以一定方式合成的。如果用标准误差代表偶然误差,它们的合成方式是方和根合成,根据式(9)及式(11)有

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\dots} \quad (12)$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\dots} \quad (13)$$

常用函数的标准误差传递公式如表1所示

表1 常用函数的标准误差传递公式

函数表达式	标准误差传递(合成)公式
$N=x+y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x-y$	$\sigma_N=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
$N=x \cdot y$	$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

续表

函数表达式	标准误差传递(合成)公式
$N = \frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N = \frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \sqrt{k^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + n^2 \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$N = kx$	$\sigma_N = k\sigma_x, \frac{\sigma_N}{N} = \frac{\sigma_x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_N}{N} = \frac{\sigma_x}{kx}$
$N = \sin x$	$\sigma_N = \cos x \sigma_x$
$N = \ln x$	$\sigma_N = \frac{\sigma_x}{x}$

由表 1 可见：加、减法运算用绝对误差平方和计算误差，乘、除法运算用相对误差平方和计算误差，都取正号。归纳起来求间接测量结果误差（标准误差的方和根合成）的步骤为：

- (1) 对函数求全微分（或先取对数再求全微分）。
- (2) 合并同一变量的系数。
- (3) 用标准误差代替微分项，求平方和。

科学实验中一般都采用方和根合成法来估计间接测量结果的偶然误差。如果系统误差是主要的，且其符号又不能确定，则不必区分系统误差和偶然误差，或假定偶然误差是在极端条件下合成的，我们将对公式（9）和（11）中各项取绝对值相加，即

$$\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \quad (14)$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial \ln f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \quad (15)$$

这种方法是误差的算术合成法，常用在误差分析、实验设计或做粗略的误差计算。常用函数的算术合成误差传递公式如表 2 所示。

表 2 常用函数的算术合成误差传递公式

函数表达式	误差合成(传递)公式
$N = x + y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = x - y$	$\Delta N = \Delta x + \Delta y$
$N = x \cdot y$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$N = \frac{x}{y}$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
$N = \frac{x^k y^m}{z^n}$	$\frac{\Delta N}{N} = k \frac{\Delta x}{x} + m \frac{\Delta y}{y} + n \frac{\Delta z}{z}$
$N = kx$	$\Delta N = k\Delta x, \frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{x}$
$N = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\Delta N}{N} = \frac{\Delta x}{kx}$

公式中每一项都取正值。加、减法运算用绝对误差相加计算误差，乘、除法运算用相对误差相加计算误差。

(三) 测量结果的表示——绝对误差和相对误差

1. 绝对误差 通常把测量结果写成 $N \pm \Delta N$ ，其中 N 是测量值，它可以是一次测量值，也可以是多次测量的平均值 $\bar{N}$ ， ΔN 是绝对误差。对多次测量的结果，一般用 $\bar{N} \pm \sigma_{\bar{N}}$ 代表 $N \pm \Delta N$ 。例如：测得一长度为 $L = (7.04 \pm 0.06) \text{cm}$ ，它并不表示 L 只有 $7.04 + 0.06 = 7.10 \text{cm}$ 和 $7.04 - 0.06 = 6.98 \text{cm}$ 两个值，而是表示 L 在 7.04 附近正、负 0.06cm 的范围内包含真值的一定的可能性（几率）。因此，不排除多次测量中有部分测量值在 $N \pm \Delta N$ 以外。不同的估计方法得到的 ΔN 表示在 $N \pm \Delta N$ 范围内包含真值的不同的几率；或者说对于不同的置信度， ΔN 的大小是不同的。

2. 相对误差 绝对误差可以说明测量结果的误差范围，但不能更客观地反映测量的准确程度。例如测量某物体长度的平均值为 1.000m ，绝对误差为 1mm ，测另一物体长度的平均值为 1.0cm ，绝对误差也为 1mm 。但误差对于平均值的百分比，前者小于后者，显然前者测量的准确程度高于后者。为此引入相对误差的概念，用 E 来表示

$$E = \frac{\Delta N}{N} \times 100\% \quad (\text{即等于 } \frac{\sigma}{N} \text{ 或 } \frac{\sigma_{\bar{N}}}{N} \times 100\%) \quad (16)$$

有时被测量的量有公认值或理论值，则用百分误差加以比较：

$$\text{百分误差} = \frac{|\text{测量值} - \text{理论值}|}{\text{理论值}} \times 100\% \quad (17)$$

相对误差与绝对误差之间的关系是

$$\Delta N = N \times E = N \times \frac{\Delta N}{N} \quad (18)$$

考虑到相对误差，测量结果应表示为

$$N' = N \pm \Delta N = N (1 \pm E) \quad (19)$$

则多次测量结果表示为

$$N = \bar{N} \pm \sigma_{\bar{N}} = \bar{N} \left(1 \pm \frac{\sigma_{\bar{N}}}{\bar{N}} \right) = \bar{N} (1 \pm E) \quad (20)$$

一般情况下相对误差可取两位数字。

由误差传递公式可以看出，间接测量量为和、差的函数时，应先计算绝对误差，而当间接测量量为积、商的函数时，应先计算相对误差，这将给误差计算带来很大的方便。

例1 用单摆测定重力加速度的公式为 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ ，今测得 $T = (2.000 \pm 0.002) \text{s}$ ， $l = (100.0 \pm 0.1) \text{cm}$ 。试求重力加速度 g 及其标准误差 σ_g 与相对误差 E_g 。

解：已知 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$

按误差传递公式， g 的绝对误差为

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 \sigma_l^2} = \sqrt{\left(-\frac{8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 \sigma_T^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \sigma_l^2} \\ &= \sqrt{\frac{16\pi^4}{T^4} \left(\frac{4l^2}{T^2} \sigma_T^2 + \sigma_l^2\right)} = \frac{4\pi^2}{T^2} \sqrt{\frac{4l^2}{T^2} \sigma_T^2 + \sigma_l^2} \end{aligned}$$