21

世纪经济学特色精品教材

模糊系统数学及其应用

那日萨◎编

清华大学出版社

21

世纪经济学特色精品教材

模糊系统数学及其应用

那日萨◎编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地论述了模糊系统数学的基本知识、原理及其方法。该书的一个特色在于尽量使用简洁的语言对其概念和原理作出清晰明了的讲述，使读者能够对模糊系统数学有直观的认识，建立起模糊思维和处理模糊问题的能力；另一个特色在于将其与经济管理和工程中的实例相结合。本书首先介绍了模糊系统数学的基础知识，从经典集合过渡到模糊集合，再到模糊隶属函数和模糊关系，以及模糊问题向清晰问题的转化；其次介绍了模糊聚类、模式识别、模糊扩张原理、模糊推理、模糊控制、模糊决策、模糊线性规划等原理和方法内容。

本书可以作为高年级本科生教材和研究生教材，也可供读者自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

模糊系统数学及其应用/那日萨编. —北京：清华大学出版社，2017
(21世纪经济学特色精品教材)
ISBN 978-7-302-44321-6

Ⅰ. ①模…　Ⅱ. ①那…　Ⅲ. ①模糊数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第164508号

责任编辑：张　伟
封面设计：单　良
责任校对：王凤芝
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　　张**：12.25　**字　　数**：276千字
版　　次：2017年2月第1版　**印　　次**：2017年2月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：39.00元

产品编号：061807-01

前言

自从罗特夫·扎德(Lotfi Zadeh)博士于1965年在《信息与控制》杂志上发表了一篇开创性论文《模糊集合》以后,经典数学的一些观念受到颠覆,引导人们更多地试图通过这一新的数学思想来描述我们的认识、判断和推理,由此形成了新的数学分支——模糊数学。模糊数学和经典数学的不同之处在于模糊数学处理的都是边界含糊不清的或者说模糊的概念、对象,这实质上是针对有别于随机性的不确定性问题,这种不确定性问题大量地存在于我们自己的主观感受中,这是无法精确衡量的。可以说,模糊数学为定量化地描述我们的认识、判断、推理及其外在形式——自然语言提供了一种强大的工具。因此,学习好模糊数学,能够为管理决策建模和计算机人工智能等领域的研究提供一种新的数学工具。事实上,目前,模糊数学和模糊推理的方法已经在工业系统控制、智能家电、智能交通、模糊决策等领域有了广泛而成功的应用。更为可喜的是,它还在刚刚兴起的文本挖掘、自然语言理解等商务智能和语义网智能等领域受到青睐。可以预见,模糊数学将在管理和计算机智能等具有模糊性系统领域发挥更大的潜力和作用。正是基于这样的认识,在系统总结模糊系统数学新的方法与应用基础上,结合编者在模糊系统数学方面十余年的教学体会,编写了这本教材。

本书共分为10章,第1章介绍了模糊数学的基本概念及其性质,重点阐述了模糊集合的性质、模糊集合的运算及模糊集合隶属函数的确定;第2章介绍了模糊关系的性质与运算;第3章介绍了分割的概念,讲解了模糊向清晰转换的重要概念及方法,给出了模糊向清晰转换在工程管理方面的应用举例;第4章介绍了模糊聚类的一些方法及模糊聚类的应用;第5章介绍了模糊模式识别的概念、性质、方法、应用;第6章介绍了模糊扩张原理和模糊数相关内容,介绍了扩张原理中的有关重要定理;第7章介绍了模糊逻辑和模糊推理的基本理论,及其在语言处理方面的应用;第8章介绍了模糊控制系统的组成、应用,通过实例详细介绍了模糊控制系统的构建过程;第9章介绍了模糊综合评判、多目标决策、模糊预测的主要内容,重点介绍了这些方法在经济管理中的应用;第10章介绍了模糊线性规划的性质、应用等内容。

为了让读者能对模糊数学的应用有更深的了解,编者在本书中列举了大量的应用示例,对于示例的选取,编者尽量偏重管理学方面较为成熟的

示例。每一章后面的习题，有利于读者自己检验学习的效果。本书可以作为本科生高年级和研究生的教材使用。

在本书的编写过程中，编者的研究生张向阳、孙娜、崔雪莲、韩琪玮、戚方丽、洪月、宋爽、于明朕、李静、彭振、韩金波、张铭今、杨凡、睢国钦、刘晓君做了大量的资料收集、校对工作，编者在此一并表示衷心的感谢。

对于本书的编写，编者参考了多个国内外有关模糊数学方面的教材和专著(详见参考文献)，以期博取众家之长，在此表示衷心感谢。尽管编者力求严谨和规范，但限于编者的水平和时间，书中难免存在一些错误和纰漏，敬请各位专家、读者批评指正。

编者

2016年7月

目录

第1章 模糊集合与隶属函数

1.1 经典集合

1.1.1 经典集合概念及其表示

论域 在讨论时,把议题局限于一定的范围,这一讨论范围,即被讨论的全体事物,就称为论域,常用大写字母 U、V 等表示。论域可简称域,根据其性质可分为离散域和连续域。

集合 给定一个论域,其中,具有某种属性的事物的全体,称为论域上的一个集合,常用大写字母 A、B、X、Y 等表示。论域本身也是集合,称为全集。

元素 集合中的每一事物,称为这个集合的元素,常用小写字母 a、b、x、y 等表示。

属于 元素是个体的概念,集合是整体的概念,它们之间具有属于和不属于的关系,如 a 属于 A,记作 $a\in A$;a 不属于 A,记作 $a\notin A$。

集合及其定义域的一种有用属性称为基数性或基数的度量。集合 X 中的元素总数称为基数,记作 n_X。由可数且有限的元素所构成的集合具有有限基数;由无限个元素所构成的集合具有无限的基数。由集合内部分元素构成的集合,称为子集。集合和子集常当作同义词用,因此任何一个集合也可以说是全集 X 的一个子集。

论域 X 上的集合 A 和 B 有下列概念:

$A\subset B$ 表示集合 A 完全包含于集合 B,即如果 $x\in A$,则 $x\in B$,且至少存在一个元素 $y\in B$ 且 $y\notin A$。

$A\subseteq B$ 表示集合 A 包含于集合 B,即如果 $x\in A$,则 $x\in B$。

$A=B$ 表示集合 A 等价于集合 B,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

把不包含任何元素的集合定义为空集,记作$\varnothing$。空集是任何集合的子集,即对任意集合 A,有$\varnothing\subset A$。空集对应于不可能发生的事件,全集对应于必然发生的事件。X 的所有可能子集所构成的一个特殊集合称为幂集,记作 $P(X)$。

例 1.1 现有一个由三元素组成的论域 $X=\{a,b,c\}$,其基数 $n_X=3$,其幂集为

$$P(X)=\{\phi\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

幂集的基数记作 $n_p(x)n_p(X)$,为 $n_p(x)=2^{n_x}=2^3=8n_p(X)=2^{n_X}=2^3=8$。

注意:如果论域的基数是无限的,则幂集的基数也是无限的,即

$$n_X=\infty,\quad 则\ n_p(X)=\infty。$$

1.1.2 经典集合的运算

令 A 和 B 为论域 X 上的两个集合。两集合的并集记作 $A\cup B$，表示域 X 中属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素所构成的集合。两个集合的交集记作 $A\cap B$，表示论域中既属于集合 A，同时又属于集合 B 的所有元素所构成的集合。集合 A 的补集记作 $\overline{A}$，定义为论域内不在集合 A 中的所有元素构成的集合。集合 A 与集合 B 的差集记作 $A|B$，定义为论域内在集合 A 中但同时又不在集合 B 中的所有元素构成的集合。下面用集合论来表示上述运算。

并集：　$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$　(1.1)

交集：　$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 和 } x\in B\}$　(1.2)

补集：　$\overline{A}=\{x|x\notin A, x\in X\}$　(1.3)

差集：　$A|B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$　(1.4)

1.1.3 经典集合的性质

从经典集合的定义出发，我们不难得到以下的一些重要性质。

交换律：　$A\cup B=B\cup A$　(1.5)

　　　　　$A\cap B=B\cap A$

结合律：　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$　(1.6)

　　　　　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　(1.7)

　　　　　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

幂等律：　$A\cup A=A$　(1.8)

　　　　　$A\cap A=A$

同一律：　$A\cup\varnothing=A$　(1.9)

　　　　　$A\cap X=A$

零律：　$A\cap\varnothing=\varnothing$

　　　　　$A\cup X=X$　(1.10)

传递性：　如果 $A\subseteq B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$，

还原律：　$\overline{\overline{A}}=A$　(1.11)

集合运算的两个特殊性质称为排中定律和德·摩根定律。这里将结合集合 A 和集合 B 对这两定律进行说明。排中定律实际上有两条[式(1.12)已给出]：第一，称为排中律，论述集合 A 和其补集的并集；第二，称为矛盾律，表示集合 A 和其补集的交集。

(1) 排中律：　$A\cup\overline{A}=X$　(1.12a)

(2) 矛盾律：　$A\cap\overline{A}=\varnothing$　(1.12b)

德·摩根定律的重要性在于它们不仅能证明逻辑中的赘述和矛盾，还能应用于大量的集合运算的证明之中。

德·摩根定律：

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.13a}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.13b}$$

设 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为同一论域上的系列集合，则德·摩根定律的通用形式为

$$\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \cdots \cap \overline{E_n} \tag{1.14a}$$

$$\overline{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \cdots \cup \overline{E_n} \tag{1.14b}$$

由式(1.4)可以得出一种对偶关系：并集或交集的补分别等价于相应的补集的交或并。

例 1.2 在管理学中团队合作非常重要，如图 1.1 所示，只有团队 1 和团队 2 共同都成功，才可以达到目标。如果有一个团队失败，则达不到目标。如果 E_1 = 团队 1 的成功，E_2 = 团队 2 的成功，那么目标达到 $=E_1 \cap E_2$。反之达不到目标 $=\overline{E_1 \cap E_2}$

逻辑上，只要一个团队失败，即当 $\cup\overline{E_1}\cup\overline{E_2}$ 时，目标就达不到。所以 $\overline{E_1 \cap E_2}=\overline{E_1}\cup\overline{E_2}$，这就是对德·摩根定律的说明。

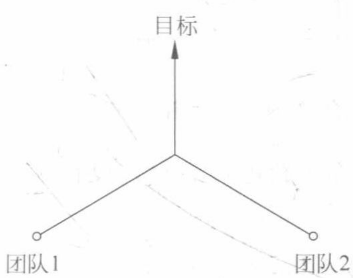

图 1.1 目标达到图

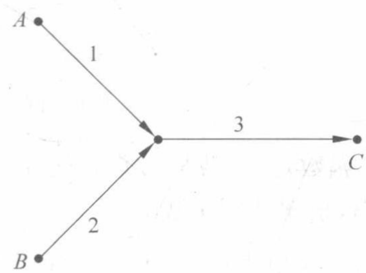

图 1.2 物资输送图

例 1.3 如图 1.2 所示，现在有 A、B 两处均可以向 C 处输送救灾物资，1、2 和 3 分别代表道路。1、2 两条道路中的任一条都能够经由道路 3 向 C 处输送救灾物资。设 E_1 = 道路 1 故障，E_2 = 道路 2 故障，E_3 = 道路 3 故障，则不能将救援物资输送到 C 处事件 $(E_1 \cap E_2) \cup E_3$ 发生，若能将救援物资输送到 C 处则是该事件的补。运用德·摩根律，可得成功将救援物资输送到 C 处的情况是

$$\overline{(E_1 \cap E_2) \cup E_3} = (\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) \cap \overline{E_3}$$

其中 $(\overline{E_1} \cup \overline{E_2})$ 表示可以将救援物资从 A 或者 B 输送到道路 3 处，$\overline{E_3}$ 表示道路三无故障。

1.1.4 经典集合映射为函数

映射是在将元素的集合论形式与函数论表示相结合的一个重要方法和概念。通过映射可以将一个论域的元素或集合映射成另一个论域内的元素或集合。设 X 和 Y 是两个不同的论域，又设论域 X 中的元素 x 与论域 Y 中的元素 y 相对应，通常称这种对应关系为论域 X 到论域 Y 的映射，或记为 $f: X \to Y$。一种特殊的映射我们称为特征函数，记为 χ_A，其定义为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{1.15}$$

这里$\chi_A(x)$表示元素 x 在集合 A 中的特征值，$\chi_A(x)=1$ 代表 x 属于集合 A，$\chi_A(x)=0$ 代表 x 不属于集合 A。特征函数χ_A 形成了论域 X 内元素 x 到论域 $Y=\{0,1\}$内的元素之间的一种映射，如图 1.3 所示。

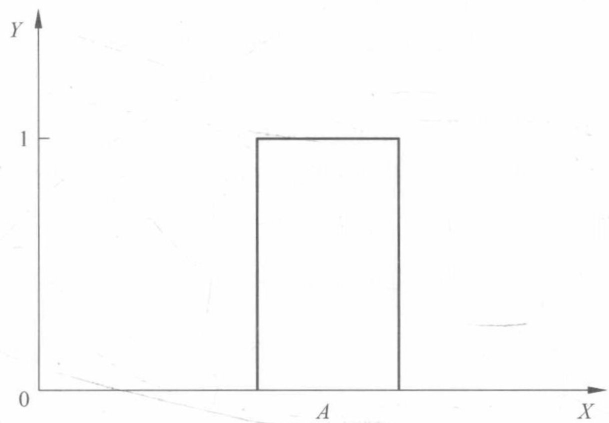

图 1.3 特征函数是关于清晰集合 A 的一种映射

现根据特征函数定义，我们对集合的并、交、补等运算重新进行表示。设在域 X 上有两个集合 A 和 B，根据特征函数有

$$A \cup B:\ \chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = \max(\chi_A(x),\chi_B(x)) \tag{1.16}$$

其中符号 $\vee$ 表示"取最大值"运算(在逻辑学上称为析取运算)。

$$A \cap B:\ \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = \min(\chi_A(x),\chi_B(x)) \tag{1.17}$$

其中符号 $\wedge$ 表示"取最小值"运算(在逻辑学上称为合取运算)。

$$\overline{A}:\ \chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x) \tag{1.18}$$

相同域中的两个集合 A 和集合 B，如果集合 A 包含于集合 B，那么在函数论术语中，包含为

$$A \subseteq B:\ \chi_A(x) \leqslant \chi_B(x) \tag{1.19}$$

1.2 模糊集合

在现实世界中，我们遇到的很多对象是模糊的、不能精确定义的。如"好"与"坏"之间我们找不到精确的界限，因此对于这一类的集合我们无法用经典集合的理论来表示，而模糊集合的出现则正好补充了经典集合的这一缺陷。

模糊集合是一个有着不同隶属度的元素的集合。这与经典或称清晰集合的概念正相反，因为清晰集合是不可能有非全隶属度的元素的(即其隶属度为 1)。一个模糊集合中的元素可以是同一域内另一个模糊集合的元素，因为其隶属度可为非全隶属度取值。

用函数论的形式将模糊集合的元素映射到一个“隶属度值”域内，模糊集合在本书中用集合符号下面加画波浪线表示。例如，$\underset{\sim}{A}$ 表示“模糊的集合 $\underset{\sim}{A}$”，该函数将模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的元素映射为 0～1 区间上的实数值。如果该域上的某个元素 x 是模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的成员，那么该映射可用 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$表示。

图 1.4 为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数。

图 1.4　模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数

当论域 X 是离散和有限时，模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的习惯标记为

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)}{x_2} + \cdots\right\} = \left\{\sum_i \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)}{x_i}\right\} \tag{1.20}$$

当论域 X 是连续和无限时，模糊集合A记作

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\int \frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)}{x}\right\} \tag{1.21}$$

在上述两个标记中，水平线或斜杠(为标记方便，下面常用斜杠表示)不表示商而是定义符。每个表达式的分子是集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度值，集合 $\underset{\sim}{A}$ 与用每个表达式名称所表示的域内元素有关。第一种标记中，求和的符号不表示代数和，而是各个元素的汇集或聚集；所以上式中的“+”号不是代数和中的“加号”，而是函数论中的并。在第二种标记中，积分符号不表示代数积，而是对连续变量求连续函数论中的并。

1.2.1　模糊集合运算

在论域 X 上定义三个模糊集合 $\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$，对域内给定元素 x，在 X 域上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C}$ 在集合论中的并、交、补运算的函数论运算定义如下：

并集：$\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$　(1.22)

交集：$\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x))$　(1.23)

补集：$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$　(1.24)

模糊集合进行上述运算的扩展了的文氏图如图 1.5～图 1.7 所示。

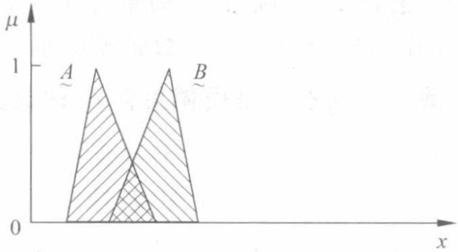

图 1.5 模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的并集

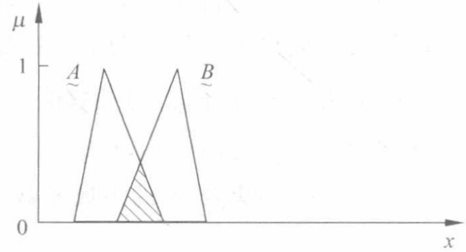

图 1.6 模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的交集

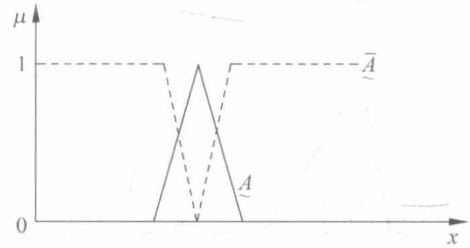

图 1.7 模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的补集

域 X 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 是该域上的一个子集。如同对经典集合的定义一样，空集 $\varnothing$ 中任意元素 x 的隶属度值为 0，全集 X 中元素的隶属度值为 1。注意在本书中所提的空集和全集为非模糊集合(不带下画波纹线)。下面是这些概念的相应表示：

$$\underset{\sim}{A} \subseteq X \Rightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant \mu_X(x) \tag{1.25a}$$

$$\mu_{\varnothing}(x) = 0, \quad \text{对所有 } x \in X \tag{1.25b}$$

$$\mu_X(x) = 1, \quad \text{对所有 } x \in X \tag{1.25c}$$

域 X 上所有模糊集合和模糊子集的集合记作模糊幂集 $\underset{\sim}{P}(X)$。很显然，所有模糊集合都可重叠，模糊幂集的基数 $n_{P(X)}$ 是无限的；即 $n_{P(X)} = \infty$。

经典集合的德·摩根定律也适用于模糊集合，可由下列表达式表示：

$$\overline{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cup \overline{\underset{\sim}{B}} \tag{1.26a}$$

$$\overline{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}} = \overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}} \tag{1.26b}$$

排中定律是所描述的集合性质中唯一的一种不能对经典集合和模糊集合都成立的集合运算，其他的同时适用于经典集合与模糊集合。排中定律的两条法则不适用于模糊集合，因为模糊集合之间会重叠，模糊集合与其补集也会重叠。扩展到模糊集合的排中定律可表示成：

$$\underset{\sim}{A} \cup \overline{\underset{\sim}{A}} \neq X \tag{1.27a}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{A}} \neq \varnothing \tag{1.27b}$$

图 1.8 和图 1.9 分别为经典(清晰)集合与模糊集合的排中定律相比较的扩展了的文氏图。

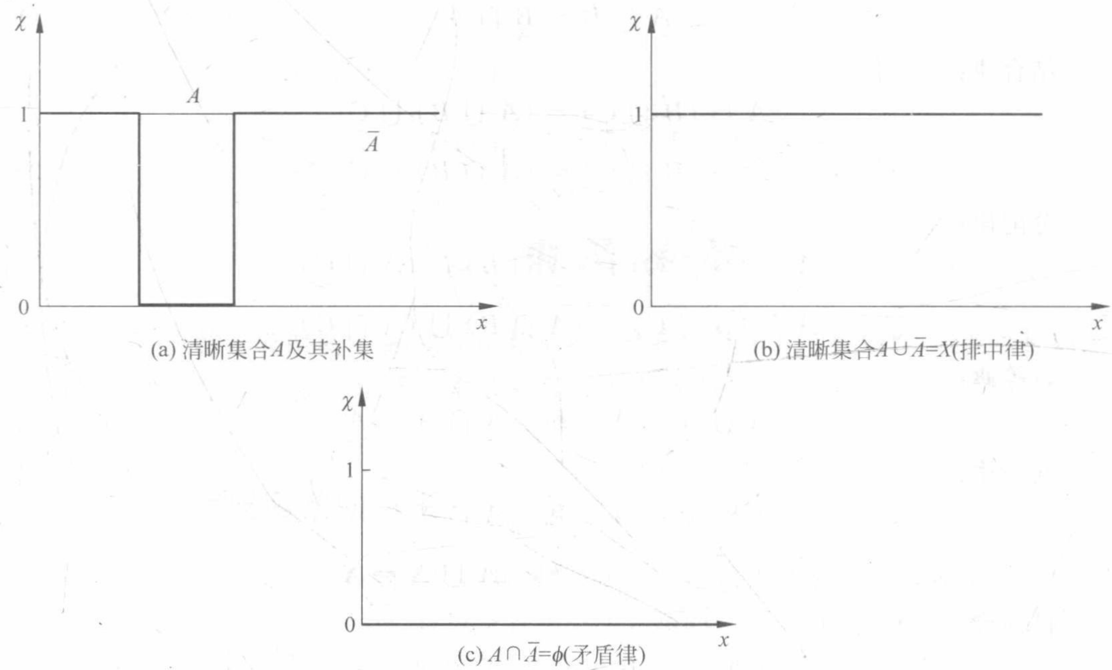

图 1.8　清晰集合的排中定律

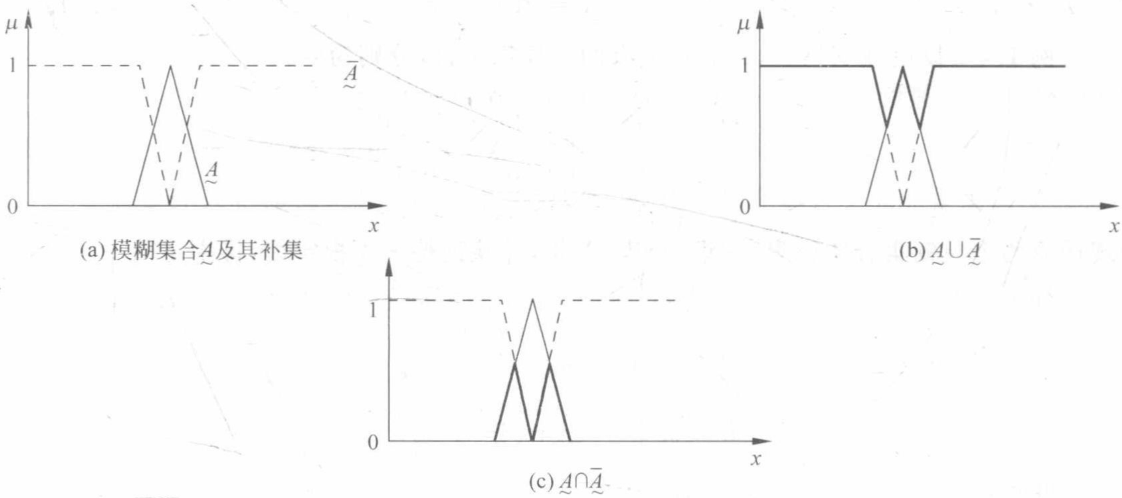

图 1.9　模糊集合的排中定律

1.2.2　模糊集合的性质

模糊集合有着与清晰集合相似的性质。正因为清晰集合的隶属度值是[0,1]区间上的一个子集,清晰集合可认为是模糊集合的一个特例。模糊集合常用性质列举如下:

交换律:

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}\cup\underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A} \tag{1.28}$$

结合律：

$$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} \tag{1.29}$$

分配律：

$$\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$$

$$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C}) \tag{1.30}$$

幂等律：

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \quad \text{和} \quad \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \tag{1.31}$$

同一律：

$$\underset{\sim}{A} \cup \varnothing = \underset{\sim}{A} \quad \text{和} \quad \underset{\sim}{A} \cap X = \underset{\sim}{A}$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{和} \quad \underset{\sim}{A} \cup X = X \tag{1.32}$$

传递性：

$$\text{如果 } \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C}，\quad \text{那么 } \underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{C} \tag{1.33}$$

还原律：

$$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}} = \underset{\sim}{A} \tag{1.34}$$

例 1.4 设论域 $X=\{1,2,3,4\}$ 上有两个模糊集合，分别为

$$\underset{\sim}{A} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{1}{4}\right\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{0.4}{4}\right\}$$

现运算两个模糊集合的补集，并集，交集，差集，并验证德·摩根定律，排中定律。

补集：

$$\overline{\underset{\sim}{A}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0}{4}\right\}$$

$$\overline{\underset{\sim}{B}} = \left\{\frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.6}{4}\right\}$$

并集：

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4}\right\}$$

交集：

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.4}{4}\right\}$$

差集：

$$\underset{\sim}{A} \mid \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \cap \overline{\underset{\sim}{B}} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.2}{3} + \frac{0.6}{4}\right\}$$

$$\underset{\sim}{B} \mid \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \cap \overline{\underset{\sim}{A}} = \left\{\frac{0}{1} + \frac{0.6}{2} + \frac{0.4}{3} + \frac{0}{4}\right\}$$