高等学校教学参考书

大学生创新能力培养用书

高等数学研究点滴

丁殿坤　等 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等学校教学参考书

大学生创新能力培养用书

高等数学研究点滴

丁殿坤　吕端良　岳　嵘　郭秀荣　著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书主要对高等数学内容整体上进行研究，作者结合几十年的高等数学（数学分析）教学，通过分析、研究教材，对教材中定理进行推广，得到了等价定理和一些新方法等，形成了一系列成果，写成了《高等数学研究点滴》一书. 全书共四章：第一章极限求法的研究；第二章微积分研究；第三章级数审敛法的等价定理研究；第四章空间解析几何的研究. 推广的定理、新方法都是以定理推论的形式出现，并有严格的证明. 该书很适合作为高等学校数学教师的教学参考书和大学高年级学生研究和提高数学能力的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学研究点滴 / 丁殿坤等著. -- 北京 ：北京邮电大学出版社，2017.4
ISBN 978-7-5635-5053-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①丁… Ⅲ.①高等数学—研究 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 056941 号

书　　　名：高等数学研究点滴
著作责任者：丁殿坤　吕端良　岳　嵘　郭秀荣　著
责 任 编 辑：马晓仟
出 版 发 行：北京邮电大学出版社
社　　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发　行　部：电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　　销：各地新华书店
印　　　刷：北京九州迅驰传媒文化有限公司
开　　　本：720 mm×1 000 mm　1/16
印　　　张：5.75
字　　　数：104 千字
版　　　次：2017 年 4 月第 1 版　2017 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5053-1　　　　定　价：20.00 元

·如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　言

高等数学(数学分析)是高等学校各专业重要的公共基础课,是培养学生抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和科学计算能力以及应用知识能力必不可少的一门课程,也是进一步学习现代科学知识的必修课。其主要内容是微积分,它不但广泛地应用于自然科学和工程技术,而且已经渗透到生命科学、经济科学和社会科学等众多领域,乃至行政管理和人们的日常生活中,所以,能否应用数学观念定量思维已经成为衡量民族文化素质的一个重要标志,正如马克思所说,"一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步"。

再者,高等数学也是理工、经济类学生报考硕士研究生必考的重要课程。作者几十年来结合高等数学(数学分析)教学实践,通过分析、研究教材,对教材中的定理进行推广,得到了等价定理和一些解决问题的新方法等,形成了一系列成果,积累成书,故而,取名《高等数学研究点滴》。本书具有如下特点:在高等数学(数学分析)的基础上加深了研究,拓宽了知识面;推广的定理、新方法是以定理(推论)的形式出现;推广的定理、方法都有相应的应用举例,从而使读者对成果作用一目了然,易于掌握;对推广的定理、方法、结论均进行了严格的证明;其知识的多样性、灵活性、技巧性等在该书中都得以体现。由于研究不受高等数学教材内容顺序的限制,而是在高等数学内容基础上整体进行研究,因此,该书很适合作为高等学校数学教师的教学参考书,更可以作为大学高年级学生研究和提高数学能力的自学用书。

在撰写和出版该书的过程中得到了有关领导、老师的大力支持和帮助,在此表示感谢! 囿于水平,加之文稿整理时间仓促,难免有错误和不当之处,恳请读者批评指正。

丁殿坤

2016 年 9 月于泰山脚下.泰安.山东科技大学

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一章　极限求法的研究

1.1　三个极限公式及应用

1.1.1　基本定理及其证明

极限是高等数学(或数学分析)中非常重要的内容,而极限的类型又比较多,因此,有些极限求起来很困难,甚至所求结果不知对错,是初学者的难点.如求形如$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n}{f(x)}$、$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-(n-1)\right]^{\frac{1}{f(x)}}$和$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}$的极限,经常要用对数恒等式变形、等价无穷小代换,再用已知的结果,有时使用 L'Hospital 法则才能得到极限结果,非常麻烦,为了使求极限公式化,于是给出如下定理.

定理 1.1.1　设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n}{f(x)}=\lim_{f(x)\to 0}\frac{a_1^{f(x)}+a_2^{f(x)}+\cdots+a_n^{f(x)}-n}{f(x)}$$

$$=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\quad(a_k>0).$$

证　因$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n}{f(x)} = \dfrac{(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)}{f(x)}$,

而

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n}{f(x)} &= \lim_{f(x)\to 0} \frac{(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)}{f(x)} \\ &= \lim_{f(x)\to 0} \left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{f(x)} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{f(x)} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{f(x)} \right) \\ &= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right).\end{aligned}$$

定理 1.1.2　设当 $x \to x_0$ 时 $f(x) \to 0$,则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{f(x)\to 0} (a_1^{f(x)} + a_2^{f(x)} + \cdots + a_n^{f(x)})^{\frac{1}{f(x)}} \\ &= \prod_{k=1}^{n} a_k \, (a_k > 0).\end{aligned}$$

证　因

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{\frac{1}{f(x)} \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n + 1 \right)} \\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n + 1 \right)},\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n + 1 \right) &= \lim_{f(x)\to 0} \frac{1}{f(x)} \ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{f(x)} - n + 1 \right) \\ &= \lim_{f(x)\to 0} \frac{1}{f(x)} \ln[(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + \\ &\quad (a_n^{f(x)} - 1) + 1].\end{aligned}$$

而　$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0),$$

故此,当 $f(x) \to 0$ 时,

$$\ln[(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1) + 1] \sim$$
$$[(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)})],$$

所以,

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}\ln[(a_1^{f(x)}-1)+(a_2^{f(x)}-1)+\cdots+(a_n^{f(x)}-1)+1]$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}[(a_1^{f(x)}-1)+(a_2^{f(x)}-1)+\cdots+(a_n^{f(x)}-1)]$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\left(\frac{a_1^{f(x)}-1}{f(x)}+\frac{a_2^{f(x)}-1}{f(x)}+\cdots+\frac{a_n^{f(x)}-1}{f(x)}\right)$$

$$=\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n$$

$$=\ln(\prod_{k=1}^{n}a_k).$$

故
$$\lim_{x\to x_0}\left[\sum_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-(n-1)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n+1)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n+1)}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n+1)}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k)}=\prod_{k=1}^{n}a_k.$$

定理 1.1.3　设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{f(x)\to 0}\left(\frac{a_1^{f(x)}+a_2^{f(x)}+\cdots a_n^{f(x)}}{n}\right)^{\frac{1}{f(x)}}$$

$$=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}\quad(a_k>0).$$

证　因
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to x_0}\mathrm{e}^{\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^{f(x)}}{n})}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^{f(x)}}{n})}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}\ln(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^{f(x)}}{n})},$$

而
$$\lim_{f(x)\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^{f(x)}}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}\ln\left(\left(\frac{a_1^{f(x)}-1}{n}+\frac{a_2^{f(x)}-1}{n}+\cdots+\frac{a_n^{f(x)}-1}{n}\right)+1\right)\right]$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}\left(\frac{a_1^{f(x)}-1}{n}+\frac{a_2^{f(x)}-1}{n}+\cdots+\frac{a_n^{f(x)}-1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{f(x)\to 0}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{a_1^{f(x)}-1}{f(x)}+\frac{a_2^{f(x)}-1}{f(x)}+\cdots+\frac{a_n^{f(x)}-1}{f(x)}\right)\right]=\frac{1}{n}\ln(\prod_{k=1}^{n}a_k).$$

所以，

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{f(x)\to 0}\frac{1}{f(x)}\ln\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^{f(x)}}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\right)}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}.$$

为了使用公式叙述方便，因此，把极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-n}{f(x)}$、$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}-(n-1)\right]^{\frac{1}{f(x)}}$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}}$ 依次分别叫作**“第一类极限”**、**“第二类极限”**、**“第三类极限”**.

1.1.2 应用举例

例 1 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}+3^{x-1}+5^{x-1}-3}{x-1}$.

解 这个极限属于**第一类极限**，$x_0=1$，$f(x)=x-1$，当 $x\to 1$ 时，$f(x)\to 0$，而且 $n=3$ $(a_1=2,a_2=3,a_3=5)$，故由定理 1.1.1 知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{2^{x-1}+3^{x-1}+5^{x-1}-3}{x-1}&=\lim_{(x-1)\to 0}\frac{2^{x-1}+3^{x-1}+5^{x-1}-3}{x-1}\\&=\ln(a_1a_2a_3)=\ln(2\cdot 3\cdot 5)\\&=\ln 30.\end{aligned}$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(5^{x^2}+7^{x^2}+8^{x^2}+10^{x^2}-3)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这个极限属于**第二类极限**，$x_0=0$，$f(x)=x^2$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，而且$n=4$ $(a_1=5,a_2=7,a_3=8,a_4=10)$，故由定理 1.1.2 知

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(5^{x^2}+7^{x^2}+8^{x^2}+10^{x^2}-3)^{\frac{1}{x^2}}&=\lim_{x^2\to 0}(5^{x^2}+7^{x^2}+8^{x^2}+10^{x^2}-3)^{\frac{1}{x^2}}\\&=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\\&=5\cdot 7\cdot 8\cdot 10=2\,800.\end{aligned}$$

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^3}+b^{x^3}+c^{x^3}}{3}\right)^{\frac{1}{x^3}}$ $(a>0,b>,c>0)$.

解 这个极限属于**第三类极限**，$x_0=0$，$f(x)=x^3$，当 $x\to 0$ 时 $f(x)\to 0$，而且 $n=3$ $(a_1=a,a_2=b,a_3=c)$，故由定理 1.1.3 知

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^3}+b^{x^3}+c^{x^3}}{3}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x^3\to 0}\left(\frac{a^{x^3}+b^{x^3}+c^{x^3}}{3}\right)^{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\sqrt[3]{abc}.$$

1.2　无穷小量部分代换求极限

1.2.1　基本定理(证明)及推论

在求极限中，经常用无穷小代换的方法使其计算简化，如果严格遵守公式 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$（其中 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$），当然不会出错，否则，就会出现错误，因此，给出如下定理：

定理 1.2.1　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2',\beta$ 是同一变化过程中的无穷小量，且 $\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}$$

的充要条件是 $\alpha_2-\alpha_2'=o(\beta)$.

证　(充分性)因 $\alpha_2-\alpha_2'=o(\beta)$，所以，$\alpha_2=\alpha_2'+o(\beta)$，则

$$\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1\pm(\alpha_2'+o(\beta))}{\beta}=\lim\frac{o(\beta)}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}.$$

(必要性)若 $\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}$，则

$$\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}-\lim\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}=0,$$

即　$\lim\left(\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}-\frac{\alpha_1\pm\alpha_2'}{\beta}\right)=0$，所以，$\lim\frac{\pm(\alpha_2-\alpha_2')}{\beta}=0$，故 $\alpha_2-\alpha_2'=o(\beta)$.

推论 1.2.1　设 $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_2'$ 是同一变化过程中的无穷小量，$\lim\frac{\alpha}{\beta_1\pm\beta_2'}$存在

且不为零,则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2'}$$

的充要条件是 $\beta_2 - \beta_2' = o(\alpha)$.

定理 1.2.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2', \beta$ 是同一变化过程中的无穷小量,且 $\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$ 存在,则

$$\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$$

的充要条件是 $\alpha_2 - \alpha_2'$ 有界(即 $\alpha_2 - \alpha_2' = O(\beta)$).

证 (充分性)若 $\alpha_2 - \alpha_2' = O(\beta)$,而 α_1 是无穷小,故 $\lim \frac{\alpha_1 (\alpha_2' - \alpha_2')}{\beta} = 0$,即 $\lim\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} - \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}\right) = 0$,故 $\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$.

推论 1.2.2 设 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_2'$ 是同一变化过程中的无穷小量,$\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2'}$ 存在且不为零,则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2'}$$

的充要条件是 $\beta_2 - \beta_2' = O(\alpha)$.

1.2.2 应用举例

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x}$.

解 因 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 1}{3x + 4\tan^2 x} = 0$,所以,$\sin^2 x - x^2 = o(3x^3 + 4\tan^2 x)$,故由定理 1.2.1 知

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - 2x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x}.$$

而 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{3x^2} = 0$,所以,$\tan^2 x - x^2 = o(3x^2)$,故由推论 1.2.1 知

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{3x^3+4x^2}.$$

即

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2-2\sin^2 x}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{5x^2-2x^2}{3x^3+4\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{3x^3+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{3}{3x+4}=\frac{3}{4}.$$

例 2　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}$.

解　因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\sin x-x\cos x}=-\dfrac{1}{2}$，所以，$\sin x-x=O(\sin x-x\cos x)$，故由推论 1.2.2 知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3},$$

而$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{6}$，所以，$\sin x-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)=o(x^3)$，故由定理 1.2.1 知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x\cos x}{x^3}.$$

即

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x\cos x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x}{\tan x-x}$.

解　因$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\tan x-x}=-\dfrac{1}{2}$，故 $\sin x-x=O(\tan x-x)$，所以，由定理 1.2.2 知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin x}{\tan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\tan x-x}$，又由麦克劳林(Maclaurin)公式知 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$，即

$$\tan x-\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)=o(x^3),$$

所以，由推论 1.2.1 得

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x-x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)-x}=3,$$

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x}{\tan x-x}=3$.

例 4 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\tan(x-1)-\sin(x-1)}{(x-1)^3}$.

解 由泰勒(Taylor)公式知

$$\tan(x-1)-\left[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}\right]=o((x-1)^3),$$

$$\sin(x-1)-\left[(x-1)-\frac{(x-1)^3}{3!}\right]=o((x-1)^3),$$

所以,由定理 1.2.1 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)-\sin(x-1)}{(x-1)^3}&=\lim_{x\to 1}\frac{\left[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}\right]-\left[(x-1)-\frac{(x-1)^3}{3!}\right]}{(x-1)^3}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)(x-1)^3}{(x-1)^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.3 用带 Peano 余项的 Taylor 公式代换求极限应取的项数

1.3.1 基本定理(证明)及推论

在高等数学中,有时求极限,用带 Peano 余项的 Taylor 公式代换的方法求,许多高等数学教材中都有例子,但都没有说明取到哪一项才合适,因此,这一点必须弄清楚,如若不然,生搬、仿照去用此法,可能就会出现错误,故此,下面给出定理.

定理 1.3.1 设 $\alpha_1\pm\alpha_2$ 及 β 是 $x\to x_0$ 时的无穷小,$\alpha_2=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$ (c 是常数,k 是正整数),$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\pm P_n(x)}{\beta}$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\pm P_n(x)}{\beta}$的充要条件是 $n\geqslant k$.

证 （充分性）因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$ （c 是常数），故 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小 $(x\to x_0)$，当 $n\geqslant k$ 时，因 $o((x-x_0)^n)=o(\beta)$ 又 $\alpha_2=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，故

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm[P_n(x)+o((x-x_0)^n)]}{\beta}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm P_n(x)}{\beta}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{o(\beta)}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm P_n(x)}{\beta}.$$

（必要性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\pm\alpha_2}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\pm P_n(x)}{\beta}$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\pm\alpha_2-[\alpha_1\pm P_n(x)]}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\pm[\alpha_2-P_n(x)]}{\beta}=0,$$

故 $\alpha_2-P_n(x)=o(\beta)$，即 $o((x-x_0)^n)=o(\beta)$，又 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小 $(x\to x_0)$，所以 $n\geqslant k$.

推论 1.3.1 设 α_1 及 $\beta_1\pm\beta_2$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小，$\beta_2=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$ （c 是常数，k 是正整数），$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1\pm P_n(x)}$存在且不等于零，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1\pm\beta_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1\pm P_n(x)}$的充要条件是 $n\geqslant k$.

证 由定理 1.3.1 知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1\pm\beta_2}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1\pm P_n(x)}{\alpha}$的充要条件是 $n\geqslant k$，也就是$\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1\pm\beta_2}{\alpha}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta_1\pm P_n(x)}{\alpha}}$ 的充要条件，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1\pm\beta_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta_1\pm P_n(x)}$ 的充要条件.

定理 1.3.2 设 α_1,α_2,β 均为 $x\to x_0$ 时的无穷小，$\alpha_2=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1P_n(x)}{\beta}$存在，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$ （c 是常数，k 是正整数），则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1P_n(x)}{\beta}$的充分条件是 $n\geqslant k-1$.

证 因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$，故 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小，当 $n\geqslant k-1$

时，$o((x-x_0)^n)=O(\beta)(x\to x_0)$，即有界. 又 $\alpha_2=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1[P_n(x)+o((x-x_0)^n)]}{\beta}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta}+\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)\alpha_1}{\beta},$$

又 α_1 是无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)\alpha_1}{\beta}=0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta}$.

推论 1.3.2 α,β_1,β_2 均为 $x\to x_0$ 时的无穷小，$\beta_2=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{(x-x_0)^k}=c\neq 0$（$c$ 是常数，k 是正整数），$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 存在且不等于零，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1\beta_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 的充分条件是 $n\geqslant k-1$.

证 由定理 1.3.2 知，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1 P_n(x)}{\alpha}$ 的充分条件是 $n\geqslant k-1$，也就是 $\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta_1 P_n(x)}{\alpha}}$ 的充分条件，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1\beta_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 的充分条件.

注 k 为非整正数时，定理 1.3.1 的结论为 $n\geqslant[k+1]$；定理 1.3.2 的结论为 $n\geqslant[k]$.

1.3.2 应用举例

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{6}(x-1)^3-x+1+\sin(x-1)}{\tan^5(x-1)}$.

解 这里 $x_0=1,\alpha_1=\frac{1}{6}(x-1)^3-x+1,\alpha_2=\sin(x-1),\beta=\tan^5(x-1)$，因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan^5(x-1)}{(x-1)^5}=1\neq 0$，即 $k=5$. 故由定理 1.3.1 知 $\sin(x-1)$ 的带 Peano 余项的 Taylor 公式只要取到含 $(x-1)^5$ 项即可. 所以取

$$\sin(x-1)=(x-1)-\frac{1}{3!}(x-1)^3+\frac{1}{5!}(x-1)^5+o((x-1)^5),$$

即 $P_n(x)=(x-1)-\frac{1}{3!}(x-1)^3+\frac{1}{5!}(x-1)^5$. 因此，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com