

高等学校教学参考书
大学生创新能力培养用书

高等数学研究点滴

丁殿坤 等著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等学校教学参考书
大学生创新能力培养用书

高等数学研究点滴

丁殿坤 吕端良 岳 嵘 郭秀荣 著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内 容 简 介

本书主要对高等数学内容整体上进行研究,作者结合几十年的高等数学(数学分析)教学,通过分析、研究教材,对教材中定理进行推广,得到了等价定理和一些新方法等,形成了一系列成果,写成了《高等数学研究点滴》一书.全书共四章:第一章极限求法的研究;第二章微积分研究;第三章级数审敛法的等价定理研究;第四章空间解析几何的研究.推广的定理、新方法都是以定理推论的形式出现,并有严格的证明.该书很适合作为高等学校数学教师的教学参考书和大学高年级学生研究和提高数学能力的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学研究点滴 / 丁殿坤等著. -- 北京:北京邮电大学出版社, 2017.4
ISBN 978-7-5635-5053-1

I. ①高… II. ①丁… III. ①高等数学—研究 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 056941 号

书 名: 高等数学研究点滴

著作责任者: 丁殿坤 吕端良 岳 嵘 郭秀荣 著

责任编辑: 马晓仟

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编: 100876)

发行部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京九州迅驰传媒文化有限公司

开 本: 720 mm×1 000 mm 1/16

印 张: 5.75

字 数: 104 千字

版 次: 2017 年 4 月第 1 版 2017 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5053-1

定 价: 20.00 元

• 如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

高等数学(数学分析)是高等学校各专业重要的公共基础课,是培养学生抽象思维、逻辑推理、空间想象能力和科学计算能力以及应用知识能力必不可少的一门课程,也是进一步学习现代科学知识的必修课。其主要内容是微积分,它不但广泛地应用于自然科学和工程技术,而且已经渗透到生命科学、经济科学和社会科学等众多领域,乃至行政管理和人们的日常生活中,所以,能否应用数学观念定量思维已经成为衡量民族文化素质的一个重要标志,正如马克思所说,“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步”。

再者,高等数学也是理工、经济类学生报考硕士研究生必考的重要课程。作者几十年来结合高等数学(数学分析)教学实践,通过分析、研究教材,对教材中的定理进行推广,得到了等价定理和一些解决问题的新方法等,形成了一系列成果,积累成书,故而,取名《高等数学研究点滴》。本书具有如下特点:在高等数学(数学分析)的基础上加深了研究,拓宽了知识面;推广的定理、新方法是以前定理(推论)的形式出现;推广的定理、方法都有相应的应用举例,从而使读者对成果作用一目了然,易于掌握;对推广的定理、方法、结论均进行了严格的证明;其知识的多样性、灵活性、技巧性等在该书中都得以体现。由于研究不受高等数学教材内容顺序的限制,而是在高等数学内容基础上整体进行研究,因此,该书很适合作为高等学校数学教师的教学参考书,更可以作为大学高年级学生研究和提高数学能力的自学用书。

在撰写和出版该书的过程中得到了有关领导、老师的大力支持和帮助,在此表示感谢!囿于水平,加之文稿整理时间仓促,难免有错误和不当之处,恳请读者批评指正。

丁殿坤

2016年9月于泰山脚下·泰安·山东科技大学

目 录

第一章 极限求法的研究	1
1.1 三个极限公式及应用	1
1.1.1 基本定理及其证明	1
1.1.2 应用举例	4
1.2 无穷小量部分代换求极限	5
1.2.1 基本定理(证明)及推论	5
1.2.2 应用举例	6
1.3 用带 Peano 余项的 Taylor 公式代换求极限应取的项数	8
1.3.1 基本定理(证明)及推论	8
1.3.2 应用举例	10
1.4 形如 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varphi(n)}$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{\varphi(x)}$ 的极限求法	12
1.4.1 Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法及有关的结论	12
1.4.2 应用举例	14
1.5 用球面坐标求多元函数极限	17
1.5.1 定理(证明)及推论	17
1.5.2 应用举例	19
第二章 微积分的研究	22
2.1 Taylor 公式中的 Lagrange 型余项 $R_n(x)$ 的研究	22
2.1.1 问题的提出	22
2.1.2 基本定理(证明)及推论	23
2.2 无穷小量之比单调性判别法及应用	24
2.2.1 基本定理及证明	24

2.2.2 应用举例	27
2.3 微分中值定理与 Newton-Leibniz 公式互相证明	28
2.3.1 用微分中值定理推出牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式	28
2.3.2 用 Newton-Leibniz 公式推出微分中值定理	30
2.4 微积分第一基本定理和积分中值定理的证法	31
2.4.1 用 Newton-Leibniz 公式证明微积分第一基本定理	31
2.4.2 用 Lagrange 中值定理证明积分中值定理	32
2.5 微分中值定理与 Newton-Leibniz 公式的证明体系	33
2.5.1 三个证明体系概述	33
2.5.2 两个证明体系的介绍	34
2.6 无穷积分收敛条件的探讨	38
2.6.1 问题的猜想	38
2.6.2 基本定理(证明)及推论	39
2.6.3 应用举例	40
2.7 形如 $\int_a^{+\infty} \frac{f'(x)}{[f(x)]^k} dx$ 的无穷积分敛散性	41
2.7.1 定理及证明	41
2.7.2 应用举例	43
2.8 反常积分敛散性审敛法的等价定理	45
2.8.1 审敛法的等价定理及其证明	45
2.8.2 应用举例	46
2.9 Stokes 公式的二重积分形式及应用	49
2.9.1 基本定理及证明	49
2.9.2 应用举例	52
2.10* 用亚纯函数的留数计算曲线(实)积分	54
2.10.1 基本定理(证明)及推论	54
2.10.2 应用举例	56
第三章 级数审敛法的等价定理研究	57
3.1 正项级数审敛法的等价定理及其证明	57
3.1.1 等价定理及证明	57
3.1.2 应用举例	58
3.2 魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判别法的等价定理	59
3.2.1 等价定理及其证明	59

3.2.2 应用举例	60
第四章 空间解析几何的研究	62
4.1 空间几何体在平面上的投影	62
4.1.1 基本定理(证明)及推论	62
4.1.2 应用举例	64
4.2 空间曲线在平面上的投影曲线参数方程	66
4.2.1 基本定理及证明	66
4.2.2 应用举例	68
4.3 旋转曲面方程的求法	70
4.3.1 基本定理(证明)及推论	70
4.3.2 应用举例	73
4.4 旋转曲面的面积及围成立体的体积	74
4.4.1 基本定理(证明)及推论	74
4.4.2 应用举例	78
参考文献	79

第一章 极限求法的研究

1.1 三个极限公式及应用

1.1.1 基本定理及其证明

极限是高等数学(或数学分析)中非常重要的内容,而极限的类型又比较多,因此,有些极限求起来很困难,甚至所求结果不知对错,是初学者的难点.如

求形如 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n}{f(x)}$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}}$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} \right)^{\frac{1}{f(x)}}$ 的

极限,经常要用对数恒等式变形、等价无穷小代换,再用已知的结果,有时使用 L'Hospital 法则才能得到极限结果,非常麻烦,为了使求极限公式化,于是给出如下定理.

定理 1.1.1 设当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n}{f(x)} &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{a_1^{f(x)} + a_2^{f(x)} + \cdots + a_n^{f(x)} - n}{f(x)} \\ &= \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \quad (a_k > 0). \end{aligned}$$

$$\text{证 因 } \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n}{f(x)} = \frac{(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)}{f(x)},$$

而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n}{f(x)} &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)}{f(x)} \\ &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{f(x)} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{f(x)} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{f(x)} \right) \\ &= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right). \end{aligned}$$

定理 1.1.2 设当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} (a_1^{f(x)} + a_2^{f(x)} + \cdots + a_n^{f(x)})^{\frac{1}{f(x)}} \\ &= \prod_{k=1}^n a_k (a_k > 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证 因 } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right)}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right) &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right) \\ &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln [(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + \\ &\quad (a_n^{f(x)} - 1) + 1]. \end{aligned}$$

而

$$\ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0),$$

故此, 当 $f(x) \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} \ln [(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1) + 1] &\sim \\ [(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)] &, \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
& \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln [(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1) + 1] \\
&= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} [(a_1^{f(x)} - 1) + (a_2^{f(x)} - 1) + \cdots + (a_n^{f(x)} - 1)] \\
&= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{f(x)} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{f(x)} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{f(x)} \right) \\
&= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \\
&= \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right)} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right)} \\
&= e^{\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n + 1 \right)} \\
&= e^{\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)} = \prod_{k=1}^n a_k.
\end{aligned}$$

定理 1.1.3 设当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} \right)^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^{f(x)} + a_2^{f(x)} + \cdots + a_n^{f(x)}}{n} \right)^{\frac{1}{f(x)}} \\
&= \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (a_k > 0).
\end{aligned}$$

证 因
$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} \right)^{\frac{1}{f(x)}} &= \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{f(x)}}{n} \right)} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{f(x)}}{n} \right)} \\
&= e^{\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{f(x)}}{n} \right)},
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
& \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{f(x)}}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \ln \left(\left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{n} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{n} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{n} \right) + 1 \right) \right] \\
&= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{n} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{n} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{n} \right) \right] \\
&= \lim_{f(x) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{a_1^{f(x)} - 1}{f(x)} + \frac{a_2^{f(x)} - 1}{f(x)} + \cdots + \frac{a_n^{f(x)} - 1}{f(x)} \right) \right] = \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right).
\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} \right)^{\frac{1}{f(x)}} = e^{\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} \ln \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k^{f(x)}}{n} \right)} = e^{\frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

为了使用公式叙述方便, 因此, 把极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - n}{f(x)}$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} - (n-1) \right]^{\frac{1}{f(x)}}$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^{f(x)} \right)^{\frac{1}{f(x)}}$ 依次分别叫作“第一类极限”、

“第二类极限”、“第三类极限”.

1.1.2 应用举例

例 1 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} + 3^{x-1} + 5^{x-1} - 3}{x-1}$.

解 这个极限属于第一类极限, $x_0 = 1$, $f(x) = x-1$, 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 而且 $n=3$ ($a_1=2, a_2=3, a_3=5$), 故由定理 1.1.1 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} + 3^{x-1} + 5^{x-1} - 3}{x-1} &= \lim_{(x-1) \rightarrow 0} \frac{2^{x-1} + 3^{x-1} + 5^{x-1} - 3}{x-1} \\ &= \ln(a_1 a_2 a_3) = \ln(2 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= \ln 30. \end{aligned}$$

例 2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (5^{x^2} + 7^{x^2} + 8^{x^2} + 10^{x^2} - 3)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这个极限属于第二类极限, $x_0 = 0$, $f(x) = x^2$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 而且 $n=4$ ($a_1=5, a_2=7, a_3=8, a_4=10$), 故由定理 1.1.2 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (5^{x^2} + 7^{x^2} + 8^{x^2} + 10^{x^2} - 3)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x^2 \rightarrow 0} (5^{x^2} + 7^{x^2} + 8^{x^2} + 10^{x^2} - 3)^{\frac{1}{x^2}} \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \\ &= 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 = 2800. \end{aligned}$$

例 3 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^3} + b^{x^3} + c^{x^3}}{3} \right)^{\frac{1}{x^3}}$ ($a > 0, b > 0, c > 0$).

解 这个极限属于第三类极限, $x_0 = 0$, $f(x) = x^3$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) \rightarrow 0$, 而且 $n=3$ ($a_1=a, a_2=b, a_3=c$), 故由定理 1.1.3 知

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^3} + b^{x^3} + c^{x^3}}{3} \right)^{\frac{1}{x^3}} &= \lim_{x^3 \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^3} + b^{x^3} + c^{x^3}}{3} \right)^{\frac{1}{x^3}} \\ &= \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{abc}.\end{aligned}$$

1.2 无穷小量部分代换求极限

1.2.1 基本定理(证明)及推论

在求极限中,经常用无穷小代换的方法使其计算简化,如果严格遵守公式 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ (其中 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$),当然不会出错,否则,就会出现错误,因此,给出如下定理:

定理 1.2.1 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_2, \beta$ 是同一变化过程中的无穷小量,且 $\lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta}$ 存在,则

$$\lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta}$$

的充要条件是 $\alpha_2 - \alpha'_2 = o(\beta)$.

证 (充分性)因 $\alpha_2 - \alpha'_2 = o(\beta)$,所以, $\alpha_2 = \alpha'_2 + o(\beta)$,则

$$\lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \pm (\alpha'_2 + o(\beta))}{\beta} = \lim \frac{o(\beta)}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta}.$$

(必要性)若 $\lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta}$,则

$$\lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} - \lim \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta} = 0,$$

即 $\lim \left(\frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} - \frac{\alpha_1 \pm \alpha'_2}{\beta} \right) = 0$,所以, $\lim \frac{\pm(\alpha_2 - \alpha'_2)}{\beta} = 0$,故 $\alpha_2 - \alpha'_2 = o(\beta)$.

推论 1.2.1 设 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta'_2$ 是同一变化过程中的无穷小量, $\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2}$ 存在

且不为零,则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2'}$$

的充要条件是 $\beta_2 - \beta_2' = o(\alpha)$.

定理 1.2.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2', \beta$ 是同一变化过程中的无穷小量, 且 $\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$$

的充要条件是 $\alpha_2 - \alpha_2'$ 有界 (即 $\alpha_2 - \alpha_2' = O(\beta)$).

证 (充分性) 若 $\alpha_2 - \alpha_2' = O(\beta)$, 而 α_1 是无穷小, 故 $\lim \frac{\alpha_1 (\alpha_2' - \alpha_2)}{\beta} = 0$, 即 $\lim \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} - \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta} \right) = 0$, 故 $\lim \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \frac{\alpha_1 \alpha_2'}{\beta}$.

推论 1.2.2 设 $\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_2'$ 是同一变化过程中的无穷小量, $\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2'}$ 存在且不为零, 则

$$\lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2'}$$

的充要条件是 $\beta_2 - \beta_2' = O(\alpha)$.

1.2.2 应用举例

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 1}{3x + 4\tan^2 x} = 0$, 所以, $\sin^2 x - x^2 = o(3x^3 + 4\tan^2 x)$, 故由定理 1.2.1 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x}.$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{3x^2} = 0$, 所以, $\tan^2 x - x^2 = o(3x^2)$, 故由推论 1.2.1 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{3x^3 + 4x^2}.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2\sin^2 x}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 2x^2}{3x^3 + 4\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{3x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{3x + 4} = \frac{3}{4}.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\sin x - x \cos x} = -\frac{1}{2}$, 所以, $\sin x - x = O(\sin x - x \cos x)$, 故由推

论 1.2.2 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3},$$

而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$, 所以, $\sin x - (x - \frac{1}{6}x^3) = o(x^3)$, 故由定理 1.2.1 知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 - x \cos x}{x^3}.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

例 3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\tan x - x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$, 故 $\sin x - x = O(\tan x - x)$, 所以, 由定理 1.2.2

知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - x}$, 又由麦克劳林 (Maclaurin) 公式知 $\tan x = x +$

$\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, 即

$$\tan x - \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) = o(x^3),$$

所以, 由推论 1.2.1 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - x} = 3,$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin x}{\tan x - x} = 3$.

例 4 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1) - \sin(x-1)}{(x-1)^3}$.

解 由泰勒(Taylor)公式知

$$\tan(x-1) - \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} \right] = o((x-1)^3),$$

$$\sin(x-1) - \left[(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3!} \right] = o((x-1)^3),$$

所以,由定理 1.2.1 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1) - \sin(x-1)}{(x-1)^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} \right] - \left[(x-1) - \frac{(x-1)^3}{3!} \right]}{(x-1)^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!} \right) (x-1)^3}{(x-1)^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3!} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1.3 用带 Peano 余项的 Taylor 公式代换求极限应取的项数

1.3.1 基本定理(证明)及推论

在高等数学中,有时求极限,用带 Peano 余项的 Taylor 公式代换的方法求,许多高等数学教材中都有例子,但都没有说明取到哪一项才合适,因此,这一点必须弄清楚,如若不然,生搬、仿照去用此法,可能就会出现错误,故此,下面给出定理.

定理 1.3.1 设 $\alpha_1 \pm \alpha_2$ 及 β 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, $\alpha_2 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = P_n(x) + o((x - x_0)^n)$, 如果

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{(x - x_0)^k} = c \neq 0$ (c 是常数, k 是正整数), $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm P_n(x)}{\beta}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm P_n(x)}{\beta}$ 的充要条件是 $n \geq k$.

证 (充分性) 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$ (c 是常数), 故 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小 ($x \rightarrow x_0$), 当 $n \geq k$ 时, 因 $o((x-x_0)^n) = o(\beta)$ 又 $\alpha_2 = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm [P_n(x) + o((x-x_0)^n)]}{\beta} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm P_n(x)}{\beta} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm P_n(x)}{\beta}. \end{aligned}$$

(必要性) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm P_n(x)}{\beta}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \pm \alpha_2 - [\alpha_1 \pm P_n(x)]}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\pm [\alpha_2 - P_n(x)]}{\beta} = 0,$$

故 $\alpha_2 - P_n(x) = o(\beta)$, 即 $o((x-x_0)^n) = o(\beta)$, 又 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小 ($x \rightarrow x_0$), 所以 $n \geq k$.

推论 1.3.1 设 α_1 及 $\beta_1 \pm \beta_2$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, $\beta_2 = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$ (c 是常数, k 是正整数), $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \pm P_n(x)}$ 存在且

不等于零, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \pm P_n(x)}$ 的充要条件是 $n \geq k$.

证 由定理 1.3.1 知 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \pm \beta_2}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \pm P_n(x)}{\alpha}$ 的充要条件是 $n \geq k$, 也就是 $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \pm \beta_2}{\alpha}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \pm P_n(x)}{\alpha}}$ 的充要条件, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \pm \beta_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \pm P_n(x)}$ 的充要条件.

定理 1.3.2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 均为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, $\alpha_2 = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta}$ 存在, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$ (c 是常数, k 是正整数), 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta}$ 的充分条件是 $n \geq k-1$.

证 因 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$, 故 β 与 $(x-x_0)^k$ 是同阶无穷小, 当 $n \geq k-1$

时, $o((x-x_0)^n) = O(\beta)(x \rightarrow x_0)$, 即有界. 又 $\alpha_2 = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 [P_n(x) + o((x-x_0)^n)]}{\beta} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x-x_0)^n) \alpha_1}{\beta},\end{aligned}$$

又 α_1 是无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x-x_0)^n) \alpha_1}{\beta} = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1 P_n(x)}{\beta}$.

推论 1.3.2 α, β_1, β_2 均为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, $\beta_2 = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$,

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{(x-x_0)^k} = c \neq 0$ (c 是常数, k 是正整数), $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 存在且不等于

零, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 的充分条件是 $n \geq k-1$.

证 由定理 1.3.2 知, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 P_n(x)}{\alpha}$ 的充分条件是 $n \geq k-1$, 也就是 $\frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta_1 P_n(x)}{\alpha}}$ 的充分条件, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 \beta_2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta_1 P_n(x)}$ 的充分条件.

注 k 为非正整数时, 定理 1.3.1 的结论为 $n \geq [k+1]$; 定理 1.3.2 的结论为 $n \geq [k]$.

1.3.2 应用举例

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{6}(x-1)^3 - x + 1 + \sin(x-1)}{\tan^5(x-1)}.$

解 这里 $x_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{6}(x-1)^3 - x + 1, \alpha_2 = \sin(x-1), \beta = \tan^5(x-1)$, 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^5(x-1)}{(x-1)^5} = 1 \neq 0$, 即 $k=5$. 故由定理 1.3.1 知 $\sin(x-1)$ 的带 Peano 余项的 Taylor 公式只要取到含 $(x-1)^5$ 项即可. 所以取

$$\sin(x-1) = (x-1) - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{5!}(x-1)^5 + o((x-1)^5),$$

即 $P_n(x) = (x-1) - \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \frac{1}{5!}(x-1)^5$. 因此,