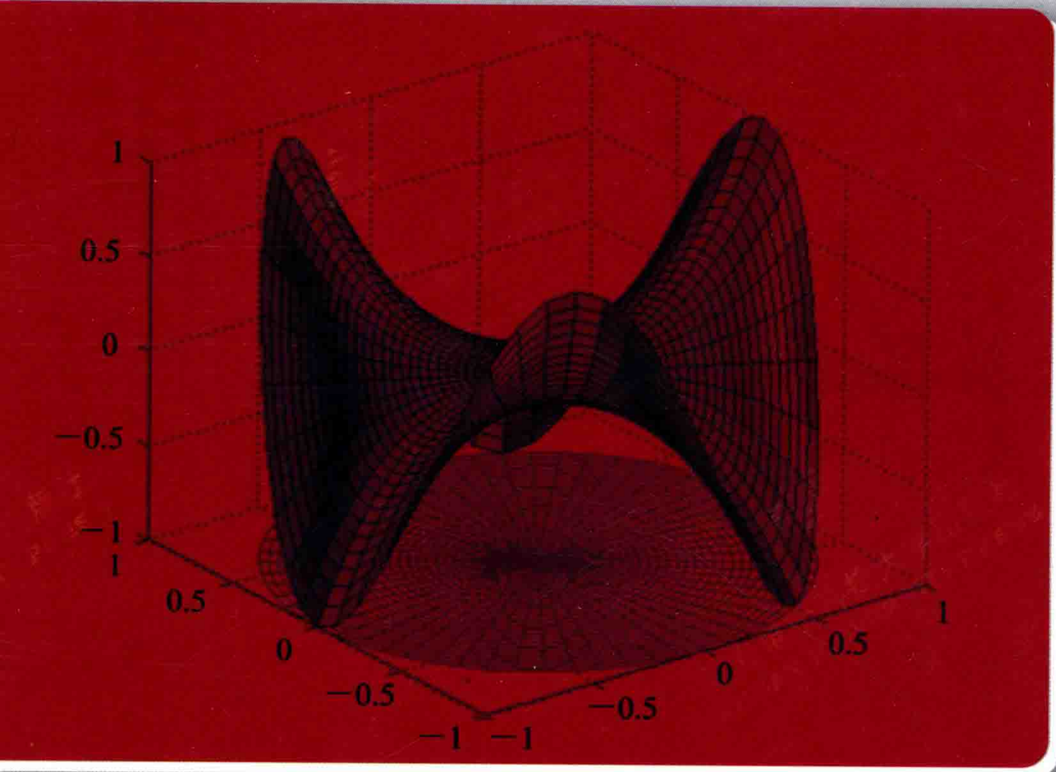
高等学校数学教材系列丛书



微积分（经管类）

主　编　胡学瑞
副主编　张清平　谭雪梅　张阿洁

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材

微 积 分

（经管类）

主　编　胡学瑞
副主编　张清平　谭雪梅　张阿洁

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书根据高等学校经济管理类专业本科微积分课程教学基本要求，并结合编者多年的教学经验编写而成. 全书共8章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，多元函数微分学和二重积分. 本书从实际出发，引出微积分的一些基本概念、基本理论和方法，把函数的极限、微分和积分与经济管理的有关问题有机地结合起来.

本书可作为高等学校经济管理类专业本科生“微积分”课程的教材，也可作为自学人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分：经管类/胡学瑞主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2017.8
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 978-7-5606-4451-6

Ⅰ.① 微…　Ⅱ.① 胡…　Ⅲ.① 微积分—高等学校—教材　Ⅳ.① O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第178100号

策划编辑　杨丕勇
责任编辑　王静　杨丕勇
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
开　　本　787毫米×960毫米　1/16　印张　15.5
字　　数　309千字
印　　数　1～3000册
定　　价　32.00元
ISBN 978-7-5606-4451-6/O
XDUP 4743001-1

前　言

本书是在总结编者长期的微积分教学经验和研究、借鉴同类教材编写特色的基础上编写而成的. 鉴于经济管理类专业的需求，本书具有较强的针对性、实用性，在内容安排上遵循“量力”和“循序渐进”的原则，重视微积分的思想、内涵，及其在经济管理中的应用；在概念上，尽可能从简单问题引入，力求朴实、简明和自然，并强调与专业知识的结合性.

本书主要有以下几方面的特色：

（1）在引入重要概念时，从典型的例题出发，阐明微积分的思想以及解决问题的方法. 可读性强，易于理解和掌握，可激发学生学习数学的兴趣和热情.

（2）在内容上去掉了传统教材难而繁的一些知识点，强化了针对性和实用性，每章都增加了有关经济管理的实例，并且配有相应的习题. 同时，为更好地理解微积分相关内容和思想，保留了一些重要定理的证明，也为满足经济管理类专业的需要，增加了一些选学内容.

（3）本书并没有介绍数学软件的使用，而是介绍了 Wolframalpha 网站. 对于刚刚接触微积分的同学，功能强大而“体积臃肿”的数学软件会让人“望而却步”. 相比较来讲，Wolframalpha网站更适合辅助微积分的教与学.

本书由多名作者共同编写，具体分工如下：第 1～6 章由胡学瑞编写，第 7、8 章由张清平编写. 在编写过程中，武汉生物工程学院数学教研室谭雪梅老师和中国人民解放军国防信息学院张阿洁老师提出了许多宝贵意见和建议，在此深表感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2016 年 10 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

本章首先介绍函数的概念及其性质、函数的复合与初等函数，然后着重讨论函数的极限和函数的连续等问题，为学习函数的微分和积分打下必要的基础.

函数是微积分学研究的主要对象，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是经济数学的主要研究对象. 函数的极限是研究微积分学的主要方法. 函数的连续是一种特殊的极限问题，且连续函数是微积分学研究的重要对象.

1.1 函　数

1.1.1 区间与邻域

1. 区间

在微积分中，区间是最常用的一类实数集合. 设 a 与 b 为两个实数，且 $a<b$，则

(1) $(a, b)=\{x \mid a<x<b, x \in \mathbf{R}\}$，称为开区间；

(2) $[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$，称为闭区间；

(3) $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$，$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b, x \in \mathbf{R}\}$ 分别称为左开右闭区间、左闭右开区间，通称为半开区间.

除以上有限区间外，还有下列无限区间：

$$(-\infty, +\infty)=\mathbf{R}$$

$$(a, +\infty)=\{x \mid x>a, x \in \mathbf{R}\}, [a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\}$$

$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b, x \in \mathbf{R}\}, (-\infty, b]=\{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

2. 邻域

设 x_0、δ 为两个实数，且 $\delta>0$，称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0, \delta)$，它表示在实数轴上与点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径，如图 1-1 所示.

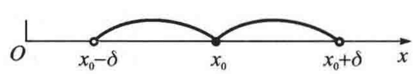


图 1-1

将邻域 $U(x_0, \delta)$ 的中心 x_0 去掉所得数集

$$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0, \delta)$，如图 1-2 所示.

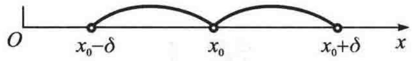


图 1-2

有时 $(x_0-\delta, x_0)$、$(x_0, x_0+\delta)$ 分别称为 x_0 的左邻域、右邻域.

1.1.2 函数的概念

微积分主要研究的是变量(即整个考察过程中数值发生变化的量)，着重研究变量之间所确定的依赖关系. 具有这种关系的变量即具有函数关系，下面给出函数的定义.

定义 1.1 设 x、y 为变量，D 为非空实数集，如果对于 D 中的每一个数 x，按照一定的对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，记作 $y=f(x)$，D 是函数的定义域，x 为自变量，y 为因变量.

对于一个确定的 $x_0\in D$，与之对应的 $y_0=f(x_0)$ 称为函数 y 在点 x_0 处的函数值，全体函数值的集合称为函数 f 的值域，记为 $f(D)$，即 $f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$.

一个函数 $y=f(x)(x\in D)$ 是由它的定义域 D 和对应法则 f 所确定的，与自变量、因变量用什么符号无关，若两个函数的定义域和对应法则相同，则它们是相同的函数，即函数的两要素是定义域和对应法则. 函数的表示法一般分为表格法、图形法和解析式法.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-1)}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

解 要使函数有意义，必须有

$$x-1>0, x-1\neq 1 \text{ 且 } x^2-4\geqslant 0$$

解不等式得 $x>2$，所以函数的定义域为 $D=\{x \mid x>2\}$.

下面介绍几个特殊函数的例子.

例 2 绝对值函数：

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0, +\infty)$，图形如图 1-3 所示.

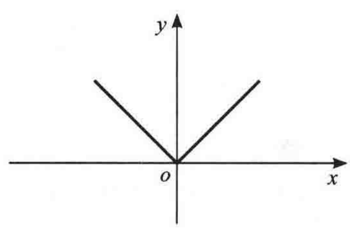


图 1-3

例 3 符号函数：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$，图形如图 1-4 所示.

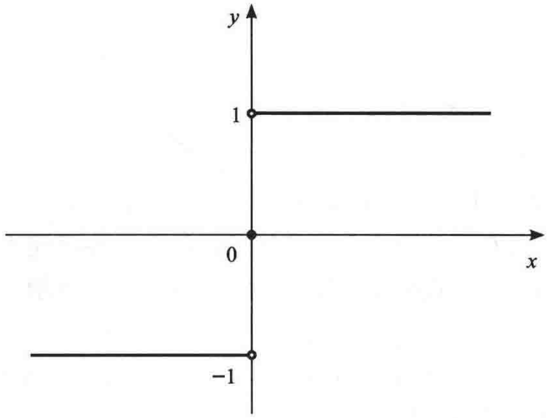


图 1-4

像例 2 和例 3 中的函数在不同的 x 取值范围内有不同的表达式，即一个函数是由多个表达式表示的，称它为分段函数，其定义域为不同段上 x 取值范围的并集.

例 4　函数 $y=\begin{cases}3\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x^2, & x>1\end{cases}$，求此函数的定义域及 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(3)$.

解　这个分段函数的定义域为

$$D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$$

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=3\sqrt{x}$；当 $x>1$ 时，$y=1+x^2$. 则

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2},\ f(1)=3\sqrt{1}=3,\ f(3)=1+3^2=10$$

1.1.3　函数的几种性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对任意的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例 5　讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\mid x\mid$；　(2) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　以上 3 个函数的定义域都关于原点对称.

(1) $f(-x)=-x\mid -x\mid=-x\mid x\mid=-f(x)$，故 $f(x)=x\mid x\mid$ 是奇函数.

(2) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，故 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数.

(3) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$，

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有意义，区间 $I\subset D$，若对任意的 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增(或递减)的. 相应地，I 称为函数 $f(x)$ 的单调增加(或减少) 区间. 单调增加函数、单调减少函数统称为单调函数.

例如，$y=x^2$ 在$(-\infty,0)$ 上单调减少，在$(0,+\infty)$ 上单调增加，但它不是单调函数；$f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 内是单调增加函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在一个常数 T，使得对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，有 $f(x)=f(x+T)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，满足上式的最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期.

一般所说的函数的周期是指它的最小正周期. 例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 均是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均是以 π 为周期的周期函数，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 是以 $2\pi/\omega$ 为周期的周期函数.

周期函数的图像在每个周期内有相同的形状.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在一个正数 M，使得对所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上是有界函数，否则称该函数无界.

例如，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上均有界；$y=\dfrac{1}{x}$ 在$[1,3]$和$(1,+\infty)$ 上均有界，但在$(0,1)$ 和$(0,+\infty)$ 上均无界.

1.1.4 反函数及初等函数

1. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的值域是 M，若对于 M 中的每一个 y 值，存在唯一确定的 x 值(满足 $y=f(x)$)与之对应，则得到了一个定义在 M 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称其为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，通常将 $y=f(x)$ 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在其定义域内具有相同的单调性. 在同一直角坐

标系中，它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

2. 复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $R(\varphi)$，若 $D_f\cap R(\varphi)\neq\varnothing$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

例 6　求以下函数构成的复合函数，并求出该复合函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$；　　(2) $y=\ln u$，$u=x-1$.

解　(1) 所求的复合函数为 $y=\sqrt{1-x^2}$，定义域为$[-1,1]$.

(2) 所求的复合函数为 $y=\ln(x-1)$，定义域为$(1,+\infty)$.

例 7　分析下列函数由哪些函数复合而成.

(1) $y=\ln(3x^2-3x-4)$；　　(2) $y=\sin(e^{x^2})$.

解　(1) $y=\ln(3x^2-3x-4)$ 是由 $y=\ln u$，$u=3x^2-3x-4$ 复合而成的.

(2) $y=\sin(e^{x^2})$ 是由 $y=\sin u$，$u=e^v$，$v=x^2$ 复合而成的.

例 8　设 $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\geqslant 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$，求 $f[f(4)]$.

解　因为 $f(4)=-1$，故 $f[f(4)]=f(-1)=(-1)^2-1=0$.

3. 基本初等函数及初等函数

下面介绍的六类函数称为基本初等函数.

(1) 常数函数：$y=C$(C 为常数)，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$\{C\}$，其图形如图 1-5 所示.

(2) 幂函数：$y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$，定义域和图形随 α 的取值不同而不同，如图 1-6 所示.

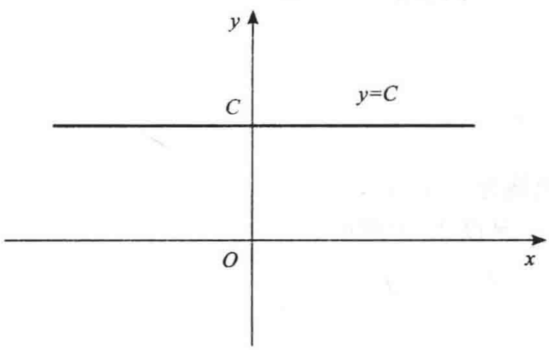


图 1-5

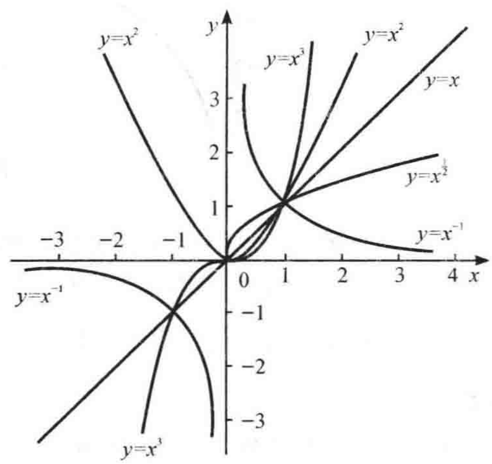


图 1-6

(3) 指数函数：$y=a^x(a>0, a\neq 1)$，定义域为$\mathbf{R}$，值域为$(0, +\infty)$，其图形如图1－7所示.

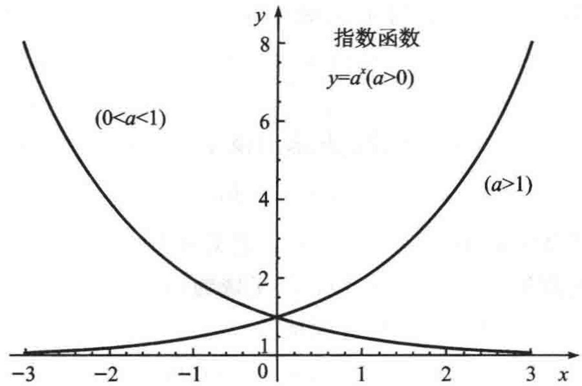


图 1－7

(4) 对数函数：$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$，定义域为$(0, +\infty)$，值域为$\mathbf{R}$，其图形如图1－8所示.

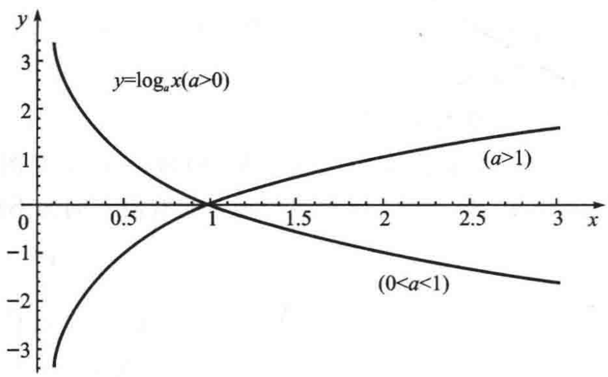


图 1－8

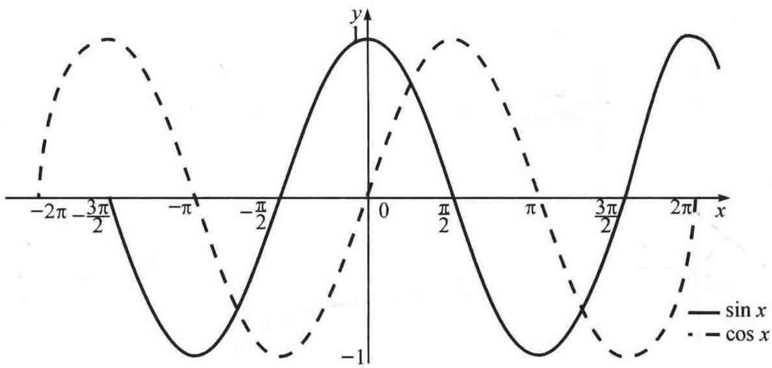
(5) 三角函数：$y=\sin x$，定义域为$\mathbf{R}$，值域为$[-1, 1]$，是以2π为周期的有界奇函数；

$y=\cos x$，定义域为$\mathbf{R}$，值域为$[-1, 1]$，是以2π为周期的有界偶函数；

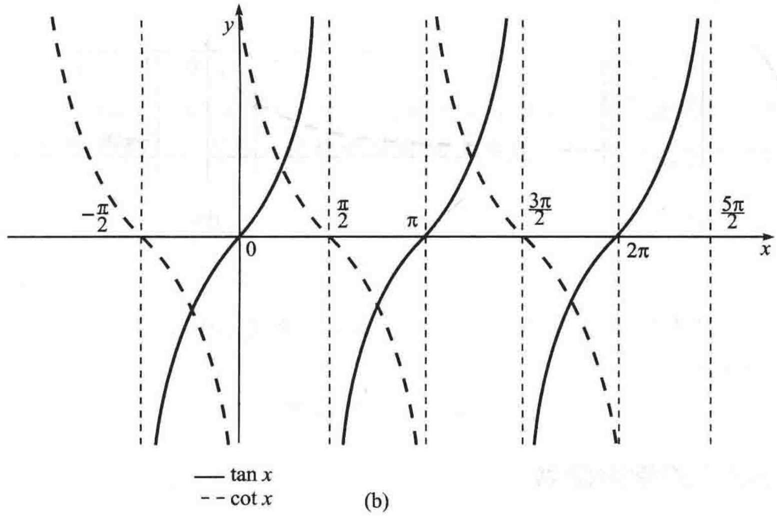
$y=\tan x$，定义域为$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$\mathbf{R}$，是以$\pi$为周期的奇函数；

$y=\cot x$，定义域为$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$\mathbf{R}$，是以$\pi$为周期的奇函数.

它们的图形如图 1－9(a)、(b) 所示.



(a)



(b)

图 1 - 9

此外，三角函数还有正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，余割函数 $y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$.

（6）反三角函数：

$y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$；

$y=\arctan x$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；

$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$(0,\pi)$.

它们的图形如图 1-10(a)、(b) 所示.

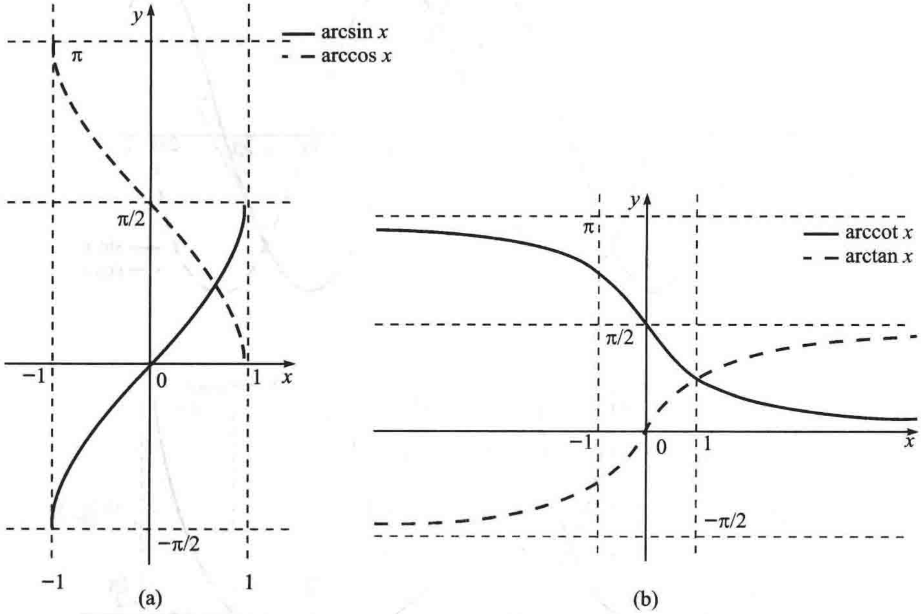


图 1-10

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所产生的由一个表达式表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=\arcsin(x-1)$，$y=\arctan e^{x}$ 均是初等函数.

1.1.5 经济学中的常用函数

在经济分析中，对于成本、价格、收益等经济量的关系研究，越来越受到人们的关注.

1. 需求函数

一般除价格外，收入等其他因素在一定时期内变化很小，即可认为其他因素对需求暂无影响，则需求量 Q 便是价格 P 的函数，记为 $Q=f(P)$，并称为需求函数.

根据统计数据，常用下面这些简单的初等函数来近似表示需求函数：

线性函数：$Q=-aP+b$，其中 $a, b>0$；

幂函数：$Q=kP^{-a}$，其中 $a, k>0$；

指数函数：$Q=ae^{-bP}$，其中 $a, b>0$.

2. 成本函数

成本是生产一定数量产品所需要的各种生产要素投入的费用总额. 成本大体上可分为

两部分：一是在短时间内不发生变化或不明显的随产品数量增加而变化的部分成本，如设备等，称为固定成本，常用 C_1 表示；二是随产品数量变化而直接变化的部分成本，如材料、人工等，称为可变成本，常用 C_2 表示，C_2 是产品数量 Q 的函数，记为 $C_2 = f(Q)$，称为可变成本函数.

3. 收益函数

总收益是生产者出售一定数量产品所得到的全部收入，用 Q 表示出售的产品数量，R 表示总收益，则 $R = R(Q)$ 称为收益函数.

4. 利润函数

利润是生产中获得的总收益与投入的总成本之差，即 $L(Q) = R(Q) - C(Q)$.

5. 库存函数

库存-成本模型：工厂要保证生产，需要定期订购各种原材料，将其存放在仓库里；大公司也需要成批地购进各种商品，放在库房里以备销售. 不论是原材料还是商品，都会遇到一个库存多少的问题：库存太多，库存费用高；库存太少，要保证供应，势必增多进货次数，这样一来，订货费高了. 因此，必须研究如何合理地安排进货的批量、次数，才能使总费用最省的问题.

下面讨论这种模型：需求恒定，不允许缺货，要成批进货，且只考虑库存费和订货费两种费用. 设企业在计划期 T，对某种物品的总需求量是 Q，均匀分成 n 次进货，每次进货批量为 $x = Q/n$，进货周期为 $t = T/n$. 假定每件物品的储存单位时间费用为 C_1，每次进货费用为 C_2. 由于在每一进货周期内，都是在初始时进货，即货物的初始库存量等于每批的进货量 x，以后均匀消耗，在周期末库存量降为 0，故平均库存量为 $x/2$，则在时间 T 内的总费用 E 为

$$E = \frac{1}{2}C_1 Tx + C_2 \frac{Q}{x}$$

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} + \ln(2-x)$；　　(2) $y = \arcsin(x-3)$；

(3) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y = \begin{cases} x-1, & x \leqslant 1 \\ x^2, & 1 < x \leqslant 3 \end{cases}$.

2. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = 5$；　　(2) $f(x) = x^3 + x^2$；　　(3) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{2}, & x\geqslant 1\\ 1, & x<1\end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(0)$，$f(3)$.

4. 函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+3$ 能否复合成函数 $y=\arcsin(x^3+1)$？为什么？

5. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f[f(x)]$.

6. 指出下列函数是由哪几个简单函数复合而成的.

(1) $y=\arccos(\ln x)$；　　(2) $y=\ln\sin^2 x$；

(3) $y=e^{\sqrt{x}}$；　　(4) $y=e^{e^x}$；

(5) $y=(1+\lg x)^5$；　　(6) $y=2\cos^2 x$.

1.2　函数的极限

极限是微积分中重要的概念之一，是研究微积分学的重要工具，函数的导数、定积分等概念都是建立在极限概念基础上的. 本节将介绍数列极限和函数极限的概念.

1.2.1　数列的极限

极限概念是由于求某些实际问题的精确解答而产生的. 我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)提出的割圆术——利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法，就是极限思想在几何学上的应用.

在某些实际问题中，我们也会遇到一串按一定顺序排列起来的无穷多个数. 例如，将一把长度为 1 的尺子，每天取其长度的$\dfrac{1}{2}$，将每天取走的长度记下，得

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

类似这样的一串数，称为数列.

定义 1.5　将下标 $n\in\mathbf{Z}^+$ 从小到大排列得到的一串数：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为数列，记为$\{x_n\}$，x_n 称为数列的通项.

例如：数列 $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots$，其通项为 $x_n=\dfrac{1}{n}$，记为$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

数列 $2,\ 4,\ 8,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$，其通项为 $x_n=2^n$，记为$\{2^n\}$.

数列 $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$，其通项为 $x_n=(-1)^{n+1}$，记为$\{(-1)^{n+1}\}$.

定义 1.6　设数列$\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个常数 a，则称 a 是 n 趋