

2018
升级版

考研数学

线性代数必修10课

主编 姜晓干

考研数学

线性代数必修 10 课

主编 姜晓千

 北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学线性代数必修 10 课 / 姜晓千主编. — 北京:北京理工大学出版社, 2017. 2

ISBN 978-7-5682-3629-4

①考… II. ①姜… III. ①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 019309 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京泽宇印刷有限公司

开 本 / 710 毫米 × 1000 毫米 1/16

印 张 / 13

字 数 / 350 千字

版 次 / 2017 年 2 月第 1 版

2017 年 2 月第 1 次印刷

定 价 / 29.80 元

责任编辑 / 陈莉华

文案编辑 / 陈莉华

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

本书前言

本书严格按照教育部考试中心《考研数学考试大纲》编写,对于数一、数二、数三的同学具有普适性.

本书是多位考研一线专家老师集体智慧的结晶,写作过程中充分结合了同学需求及授课效果.为此本书共设十课,每课大致分为五部分:导语、考试大纲、知识体系、考试内容分析、典型例题分析.

(1)导语.对本讲内容的主要概括以及本课在考试中的地位的说明.

(2)考试大纲.让同学们清楚地知道考研数学到底“考什么”,知道哪些内容只需了解,哪些内容则要重点掌握,这样在复习备考过程中才能真正做到有的放矢.

(3)知识体系.通过逻辑框架将本讲所有知识点完美呈现,简洁明了.

(4)考试内容分析.对考研数学的每个考点都做了全面细致地讲解,同时每个考点都紧跟经典题目供同学们强化练习,正所谓“光说不练假把式,光练不说真把式,连说带练全把式”.

(5)典型例题分析.本书经过改版,对体例和板块进行了很大调整,为大家提供了 280 道左右的线性代数经典好题,囊括了历年真题、大学数学竞赛试题、各大名校期末试题等,并在每一课的末尾处增加了部分习题供大家练习.相信同学们若能把这部分题目做好吃透,那么考研数学线性代数得满分指日可待.

最后,祝福所有为了梦想而努力拼搏的考研学子们,祝大家梦圆考研!

姜晓千

2017 年春于北京

目 录

第 1 课 行列式	(1)
1.1 考试内容分析	(2)
1.2 典型例题分析	(15)
1.3 精致习题讲解	(24)
第 2 课 矩阵	(28)
2.1 考试内容分析	(29)
2.2 典型例题分析	(40)
2.3 精致习题讲解	(50)
第 3 课 求矩阵高次幂	(56)
3.1 矩阵乘法的结合律	(56)
3.2 归纳法	(56)
3.3 二项式展开定理	(57)
3.4 分块矩阵法	(58)
3.5 相似对角化	(60)
第 4 课 解矩阵方程	(63)
4.1 求逆法	(63)
4.2 解方程组法	(67)
第 5 课 向量	(69)
5.1 考试内容分析	(70)

5.2	典型例题分析	(78)
5.3	精致习题讲解	(94)
第 6 课	向量空间(数一专题)	(99)
6.1	考试内容分析	(99)
6.2	典型例题分析	(101)
第 7 课	线性方程组	(104)
7.1	考试内容分析	(105)
7.2	典型例题分析	(113)
7.3	精致习题讲解	(127)
第 8 课	公共解与同解	(134)
8.1	考试内容分析	(134)
8.2	典型例题分析	(135)
第 9 课	特征值与特征向量	(140)
9.1	考试内容分析	(141)
9.2	典型例题分析	(151)
9.3	精致习题讲解	(168)
第 10 课	二次型	(175)
10.1	考试内容分析	(176)
10.2	典型例题分析	(184)
10.3	精致习题讲解	(198)



第1课 行列式



导语

行列式是矩阵最基本的运算之一,有着广泛的应用.考试中除了直接考查行列式的计算,往往结合行列式的应用.例如,判定矩阵可逆、求矩阵的逆、判定线性相关性、判定线性方程组的解、计算特征值、判定二次型的正定等.

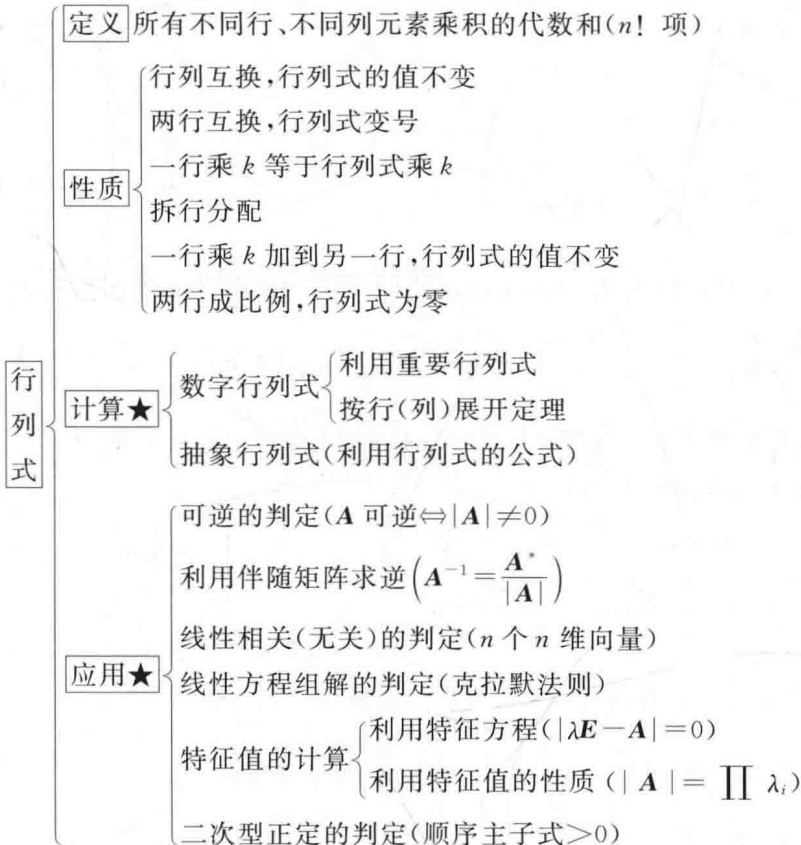


大纲要求

- (1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.
- (2) 会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.



知识体系





1.1 考试内容分析

1.1.1 行列式的定义

定义 1.1 在一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数逆序,一个排列的逆序总数称为逆序数,用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示. 如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为偶排列,否则为奇排列.

例如,在排列 54321 中,有逆序 54, 53, 52, 51, 43, 42, 41, 32, 31, 21, 逆序数为 10, 即 $\tau(54321) = 10$, 从而排列 54321 是偶排列.

定义 1.2 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为所有不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时, 该项符号为正; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时, 该项符号为负, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

【注】(1) 由行列式的定义, 知行列式为 $n!$ 项不同行不同列的元素乘积的代数和.

(2) 由行列式的定义, 对于 2 阶行列式, 有 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$,

即 2 阶行列式等于主对角线元素的乘积减副对角线元素的乘积.

对于 3 阶行列式, 有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

(3) 对于 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 设向量 (a_{11}, a_{12}) 的长度为 l , 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 向量 (a_{21}, a_{22}) 的长度为 m , 与 x 轴正半轴的夹角为 β , 不妨设 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 如图 1.1 所示:

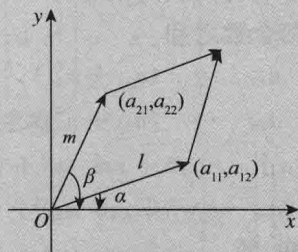


图 1.1

以 (a_{11}, a_{12}) 及 (a_{21}, a_{22}) 为邻边的平行四边形的面积为

$$\begin{aligned}
 S_{\square} &= lm \sin(\beta - \alpha) \\
 &= lm (\sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha) \\
 &= l \cos\alpha \cdot m \sin\beta - l \sin\alpha \cdot m \cos\beta \\
 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.
 \end{aligned}$$

又

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

从而 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = S_{\square}$, 即 二阶行列式等于以其行向量为邻边的平行四边形的面积.

同理可得, 三阶行列式等于以其行向量为邻边的平行六面体的体积.

【例 1.1】求

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$$

的 x^4 的系数.

【分析与解答】由行列式的定义知, 含有 x^4 的项只有 $(-1)^{\tau(1324)} 5x \cdot x \cdot x \cdot (-3x)$, 从而 x^4 的系数为 15.

1.1.2 行列式的性质

性质 1 行列互换行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 两行(列)互换, 行列式变号.

性质 3 一行(列)乘 k , 等于行列式乘 k .





性质 4 拆行(列)分配,即若行列式的某一行(列)元素都是两个数之和,例如行列式 D 的第 j 列元素都是两个数之和

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j} + a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j} + a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj} + a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于以下两个行列式之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 一行(列)乘 k 加到另一行(列),行列式的值不变.

性质 6 两行(列)成比例,行列式为零.

推论 1 两行(列)相等,行列式为零.

推论 2 一行(列)为零,行列式为零.

【注】(1)在行列式的性质中,行、列的地位是平等的,即行列具有相同的性质.

(2)行列式的性质主要用于化简行列式.

【例 1.2】证明

$$D = \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

【证明】证法一:由行列式的性质,得

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

上式右端第 2,3,4,5,6,7 个行列式中都有两列成比例,所以

$$\begin{aligned} D = & \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix} \\ = & a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + b^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}.$$

证法二：由行列式的公式得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

【例 1.3】计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}.$$

【分析与解答】将第一列乘-1加到其余各列，得

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

1.1.3 重要行列式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特别地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$





特别地,

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

3. 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nm} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{nm} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

【注】实际上,拉普拉斯展开式就是分块矩阵求行列式,可以简单地记为:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|,$$

$$\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |A| |B|,$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

【例 1.4】设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵, 且 $|A|=a, |B|=b, C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$, 则

$|C|=\underline{\hspace{2cm}}$.

【分析与解答】由拉普拉斯展开式,

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| \\ &= (-1)^{mn} ab. \end{aligned}$$

【例 1.5】4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于().

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

【分析与解答】先 2, 4 两列互换, 再 2, 4 两行互换, 把零元素调至行列式的一角, 用拉普拉斯展开式, 得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

故应选(D).

4. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

下面给出范德蒙行列式的证明:

对行列式阶数用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq j < i \leq 2} (x_i - x_j),$$





结论成立.

假设对 $n-1$ 阶范德蒙行列式结论成立, 下面证明 n 阶范德蒙行列式也成立.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix},$$

按第 1 列展开, 并提出每一列的公因子 $(x_i - x_1)$, 有

$$D_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端为 $n-1$ 阶范德蒙行列式. 由归纳法假设, 它等于所有 $(x_i - x_j)$ 因子的乘积, 其中 $2 \leq j < i \leq n$, 从而

$$\begin{aligned} D_n &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \\ &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

【例 1.6】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析与解答】 把第 2 行加到第 1 行, 提取公因式 $a+b+c$, 得到范德蒙行列式

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b). \end{aligned}$$

【例 1.7】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析与解答】 将行列式第 4 行加到第 1 行, 提取公因子 10, 再将第 4 行逐行相换至第 2 行, 得

$$D = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\ = 10(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) \\ = 120.$$

【注】应用范德蒙行列式一定要注意用列数大的减列数小的。

例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n & n-1 & n-2 \\ n^2 & (n-1)^2 & (n-2)^2 \end{vmatrix} = (n-1-n)(n-2-n)(n-2-n+1) = -2.$$

1.1.4 按行(列)展开定理

定义 1.3 在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中划去 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j

列，剩下的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij} 。称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij} ，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如，已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ， a_{22} 的代数余子式 $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12$ 。

按行展开定理：设 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的代数余子式为





$$A_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n), \text{ 则 } a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

推论 $AA^* = A^*A = |A|E$.

以 3 阶矩阵为例,

$$\begin{aligned} AA^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |A|E. \end{aligned}$$

同理可证 $A^*A = |A|E$.

【例 1.8】 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

(1) 求第 4 行各元素余子式之和;

(2) 求第 4 行各元素代数余子式之和.

【分析与解答】 (1) 解法一: 直接计算 $M_{4j} (j=1, \dots, 4)$, 可得 $\sum_{j=1}^4 M_{4j} = -28$.

解法二: $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-7)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -28. \end{aligned}$$

(2) 解法一: 直接计算 $A_{4j} = (-1)^{4+j}M_{4j} (j=1, \dots, 4)$, 可得 $\sum_{j=1}^4 A_{4j} = 0$.

解法二:

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

【例 1.9】证明：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nm}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + x \sum_{i,j=1}^n A_{ij}.$$

其中, $A_{ij} (i, j=1, 2, \cdots, n)$ 为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$ 的代数余子式.

【分析与解答】

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nm}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nm}+x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}+x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & x & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} \\ &= \cdots \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & x \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^n xA_{i1} + \sum_{i=1}^n xA_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^n xA_{in} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} + x \sum_{i,j=1}^n A_{ij}. \end{aligned}$$

1.1.5 行列式的公式

若 A, B 是 n 阶矩阵, 则

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

