[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（解析分册·数学二）

主编：张宇

副主编：高昆轮

AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

□ Mr. Zhang

2017

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世纪云图 理工社®

[张宇考研数学系列丛书]

张宇 CLASSIC

考研数学真题大全解

（解析分册·数学二）

张　宇　主编　高昆轮　副主编

编委（按姓氏拼音排序）：高昆轮 刘宁 万金平 乌日罕 亦一（笔名）于吉霞
曾凡（笔名）张乐 张婷婷 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

RFID

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学二 / 张宇主编 . —北京:北京理工大学出版社,2016.4

ISBN 978—7—5682—2184—9

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ.①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 078345 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 16.5
字　　数 / 412 千字
版　　次 / 2016 年 4 月第 1 版　2016 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 / 60.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前言（17版）

从1987年至2016年，整整三十个年头，三十份真题试卷，全面反映了国家命制考研数学试题的特点、风格与水平，是考研备考学生必须认真研习的复习资料.

这一版本，相对于2016版，我们作了全面修订，主要体现在以下六个方面.

一，试卷分册依然按照考研实考顺序给出三十年的卷子，解析分册则按大纲的章节顺序进行试题解答归类，这将给考生提供两种做题方式，一是按套卷形式做，利于整体把握且便于测分，二是按章节顺序做，利于局部巩固且便于找到自己的薄弱环节，对症下药.

二，在解析分册的每一章前增加“考点分布”一览表，清晰表明三十年来各知识点出现的年份、分值，既能把握重点，又对未来作出预测.

三，增加题前“考点点睛”，对每一知识点进行解题指导，给出关键的解题策略和重要结论、公式.大幅增加题后注解，强调考生做真题时应注意的细节，并加以延拓，有些题后注解是作者多年积累的解题经验，可立竿见影.

四，虽然数学一、二、三单独成书，但在每一本书中都增加了一些重要的交叉内容，比如数学一、三有些题虽未出现在数学二中，但未来有可能考，便补充一些这样的题放进数学二，便于考生更好地全面把握内容，同样地，数学一的书中也会出现一些数学二、三的试题，数学三的书中也会出现一些数学一、二的试题.

五，试卷分册中，在每一份试卷后增加“答案速查”，利于考生快速测分.

六，修改了上一版中的瑕疵与错误.

继续欢迎读者朋友们批评、指正. 2017考研年，应是一个好机会. 在国家命制考题将会“难度适中”的时候抓住这个机会，一战成功，是我们的共同目标.

张宇

2016年3月18日于

大连理工大学学术交流中心

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	出版日期	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中高等数学部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题组组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中线性代数部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据，诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点，配以优秀的例题、习题和全部详细答案. 原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2016 年 2 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据，精心挑选和编制了 1000 道左右高仿真练习题，题目与考研无缝接轨，综合性强，知识相对混编，难易变化无常，利于考生复习过程中保持实战演练的状态. 原命题组组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2016 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题，给读者提供原汁原味的实考题. 原命题组组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2016 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2016 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下). 实战演练，积累经验，查漏补缺，科学预测，并配有部分重点难题讲解视频. 原命题组组长与命题成员参与.

注：主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面，市面上其他任何同名图书均非张宇所写，请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址：@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博：@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

preface

前言（16版）

先给读者讲个故事. 1637 年，法国律师费马到图书馆看书，在书上读到一句话：“方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解.”现在说来，小学生都知道：$3^2+4^2=5^2$，上述命题显然成立. 然而，费马没有就此罢休，他违反图书馆规定，在书上“乱写乱画”：“你们不要以为这个事情很简单，方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解，方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解，…，也就是说，对于方程 $x^n+y^n=z^n$，只要 $n\geqslant 3$ 为正整数，则这样的方程就一定没有正整数解了.”这等于是提出了一个前所未有的定理，是公然向数学界提出挑战. 不仅如此，费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话：“我已经给上述定理做了完整美妙的证明，只是这个位置太小了，所以我就不写了.”——这哪里是挑战？简直就是挑衅！

数学界应战吗？那是当然，数学界绝不缺乏天才，怎么会被一个“外行”难倒？于是，读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等等均开始研究费马的这个定理，可是历史就是这么奇妙，他们都没有证明出来. 一百年过去了，两百年过去了，三百年过去了，直到 1993 年，也就是在费马提出这个定理的 356 年之后，才被美籍英裔数学家威尔斯证明出来，单单证明就写了 1 000 多页. 威尔斯的证明举世震惊，因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖（“唯一”是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以前的数学家，但是当时的威尔斯已经 45 岁了，由于他的贡献太大，所以破例授予他这个数学上的最高奖）.

费马的这个定理，被数学界称为“会下金蛋的鸡”，因为在证明这个定理的数百年中，产生了很多独立的数学分支，使得数学得到了蓬勃发展，这正是：提出一个好的问题，往往比解决它更有价值. 因此，费马的这个定理被正式命名为：费马大定理. 你见过有几个定理叫“大定理”？很少很少. 一个“大”字，足以体现这个定理的分量.

故事讲完了，这里讲了什么道理呢？读者自己体会吧——其实，我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字，把我的这本书命名为：真题“大”全解. 因为，这本书，我以为，相对于其他真题书来讲，是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始，考研数学实行了全国统一考试的形式，考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准. 直到今天，几十年下来，考研数学的命题可以说极其成熟了，也逐渐出现了以下两大特点：

第一，考研数学命题的风格稳定：重视基础，淡化技巧，计算量大. 考研数学试题是命题组集体智慧的结晶，在确定了上述命题的风格和原则后，考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小. 所以，做好历年真题，是熟悉考研数学风格的好路子.

第二，考研数学命题的形势特殊：命题时间短，任务重，参考以往考题成为必须. 为了确保考研数学命题的安全性，不出现泄漏考题的情况，现在的考研命题时间很短，已经不再像多年前那样宽松

（以前命题都是提前半年出好题，有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性）——在考前集中命题，几乎没有时间去校对和检验了. 所以，为了保证试题不出错且难度适中，命题人盯上了从1987 年到今天积累下来的命制过的试题（这里还包括从未考过的备考卷上的试题），以此为基础，“参考”“改编”甚至“照搬”这些题. 故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一，考研数学试题收录的全面性. 收录从全国统考以来所有的考研数学试题，而不是部分试题，给读者提供一份完整的历史资料. 从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则.

第二，考研数学试题解析的权威性. 凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织的专家写的答案，参考其答案. 总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册. 试卷分册中，我将 1987 年至 2015 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；解析分册中，我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析. 其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除. 那么在试卷分册中，被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分. 当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们在解析分册中给出了权威的解答，依据考试年份与题号可作相应查找. 值得注意的是，本书仅为数学二的真题大全解，需考数学二的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学一与数学三的真题大全解.

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处. 我在《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》中已经给读者提出了建议：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，不要无任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献. 感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2015 年 5 月 于北京

Contents

目 录

高等数学

第 1 章　函数、极限、连续

考点分布

考点　分值　年份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
复合函数	4	5		3		3					3				3	
极限的定义及性质			3	3	3		8				5	3	3	3	3	
两个基本极限	3		7	5		8		3	5	3	3				3	
洛必达法则	6	4			5	6	3	3		3		3	5	3		8
夹逼准则									3							
单调有界准则																8
无穷小的比阶	4										3				3	
连续与间断点		4							3	8		5			4	3

1987—2002 年

考点　分值　年份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	合计（87—16 年）
复合函数												11			32
极限的定义与性质	4				4		9		10			10			71
两个基本极限		10				9			4		4				67
洛必达法则	10			10										10	79
夹逼准则														4	15
单调有界准则				12		4			10	14	11				59
无穷小的比阶	4		4		4	4	4		4	10	14	4	10	4	76
连续与间断点		4	4		4	4	4	4					4		47

2003—2016 年

1.1 函数及其性质

考点点睛

1. 有界性

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

(3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

(1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数，则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(2) $f(x)$ 是连续的奇函数，则其所有原函数都是偶函数；

$f(x)$ 是连续的偶函数，则其所有原函数中只有一个是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有定义，

则 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

(1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

(2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，

则 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\dfrac{\int_0^T f(t)\mathrm{d}t}{T}x$ 以 T 为周期.

4. 单调性

设 $f(x)$在区间 I 上可导，

(1) $\forall x\in I, f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增；

$\forall x\in I, f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减.

(2) $\forall x\in I, f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减；

$\forall x\in I, f'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 I 上单调不增.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增(减)，而不能使用(2)中的单调不减(不增).

1 [1987－Ⅲ] $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是

(A)有界函数. (B)单调函数. (C)周期函数. (D)偶函数.

答 应选(D).

解 由于 $f(-x)=|-x\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$，则 $f(x)$为偶函数.

2 [1987－Ⅲ] 函数 $f(x)=x\sin x$

(A)当 $x\to\infty$时为无穷大. (B)在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C)在$(-\infty,+\infty)$内无界. (D)当 $x\to\infty$时有有限极限.

答 应选(C).

解 由于 $f(2k\pi)=2k\pi\sin 2k\pi=0$，$f\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 充分大)，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界，但 $x\to\infty$时，$f(x)$不是无穷大，也没有有限极限. 则应选(C).

注 要正确区分无穷大量与无界变量的区别与联系，无穷大量一定是无界变量，但反之不对；常见的是无界变量但不是无穷大量的有：$x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$；$x\to\infty$时，$x\sin x$.

3 [1988－Ⅲ] 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$. 所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

4 [1990－Ⅲ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

答 应填 1.

解 由 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 知，对一切的 x，$|f(x)|\leqslant 1$，则 $f[f(x)]=1$.

注 函数的复合是一种重要的运算，求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数 $y=f[g(x)]$，实际上就是将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中，关键是搞清楚 $u=g(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 定义域的哪一部分.

5 [1992－Ⅲ] 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2 & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 应选(D).

解 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2-x, & -x>0,\end{cases}$ 即 $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

6 [1993－Ⅲ] 当 $x\to 0$ 时，变量$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是

(A)无穷小. (B)无穷大.

(C)有界的，但不是无穷小的. (D)无界的，但不是无穷大.

答 应选(D).

解 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$f(x_n)=(n\pi)^2\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$；

取 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty$.

则当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$是无界的，但不是无穷大.

注 本题同上面的第 2 题，都是在考查无穷大量、无界变量及有界变量等几个基本概念.

7 [1997] 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 应选(D).

解 根据 $g(x)$ 的定义知，复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $x<0$ 时，$f(x)=x^2>0$；$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$. 故

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

8 [1999] 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A)当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B)当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C)当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D)当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

答 应选(A).

解 直接法. 据"1.1 考点点睛"中的"2. 奇偶性"可知(A)正确.

排除法. (B)的反例：$f(x)=\cos x$，$F(x)=\sin x+1$ 不是奇函数；

(C)的反例：$f(x)=\cos^2 x$，$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$，不论 C 取什么常数，$F(x)$ 都不是周期函数；

(D)的反例：$f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的，但 $F(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$，考查

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)+C=\int_0^x -f(-u)\mathrm{d}u+C.$$

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-u)=-f(u)$，有 $F(-x)=F(x)(\forall C)$；

若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-u)=f(u)$，进而当且仅当 $C=0$ 时，有 $F(-x)=-F(x)$.

9 [2001] 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$

(A)0. (B)1. (C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

答 应选(B).

解 由于 $f(x)\leqslant 1$，故 $f[f(x)]=1$，因而

$$f\{f[f(x)]\}=1.$$

10 [2005] 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有

(A)$F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B)$F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C)$F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D)$F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

答 应选(A).

解 本题同上面的第 8 题，都是在考查原函数的奇偶性与周期性等性质，根据对第 8 题的分析，便可直接选(A).

1.2 极限的定义及性质

11 [1998] 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A)若 x_n 发散，则 y_n 必发散.

(B)若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C)若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小.

(D)若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

答 应选(D).

解 直接法.由于 $y_n=\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=0$,选(D).

排除法.取 $x_n=n,y_n\equiv0,n=1,2,\cdots$,排除(A);

取 $x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$;$y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 2k, & n=2k,\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$,排除(B);

取 $x_n=\begin{cases}1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$;$y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 1, & n=2k,\end{cases}$ $k=1,2,\cdots$,排除(C).

12 **[1999]** "对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$"是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的

(A)充分条件但非必要条件.　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　(D)既非充分条件又非必要条件.

答 应选(C).

解 本题考查考生对数列$\{x_n\}$收敛于 a 的定义的理解.其定义是"对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,总存在正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$".两种说法相比较,似乎定义中的条件更强些,即由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 必能推出"对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$".但其逆也是正确的.因为对任意给定的 $\varepsilon_1>0$,取 $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{3},\frac{1}{3}\right\}$,则对此 ε,存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有 $|x_n-a|\leqslant2\varepsilon$,现取 $N_1=N-1$,于是有当 $n>N_1$ 时,$|x_n-a|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$.所以以上两种说法是等价的,即选项(C)是正确的.

注 本题主要考查数列极限的"$\varepsilon-N$"语言.

13 **[2003]** 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立.　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

答 应选(D).

解 假设$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=A$ 存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_nc_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=A$ 存在,这与$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$矛盾,故$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

注 由极限的局部保号性容易得到极限的局部保序性:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$,且 $A>B$,则$\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $a_n>b_n$.

对于本题,选项(A),(B)说对任意的 n 成立,显然错了;

对于选项(C)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是典型的"$0\cdot\infty$"型未定式,其极限可能存在也可能不存在.

1.3 求函数极限

考点点睛

求函数极限首先是化简,其次是判别类型选择方法.

常用的化简手段有:(1)非零常数因子先求出;(2)有理化;(3)通分;(4)倒代换.

常用的方法有:(1)四则运算法则及基本极限;(2)等价代换;(3)洛必达法则;(4)泰勒公式.