

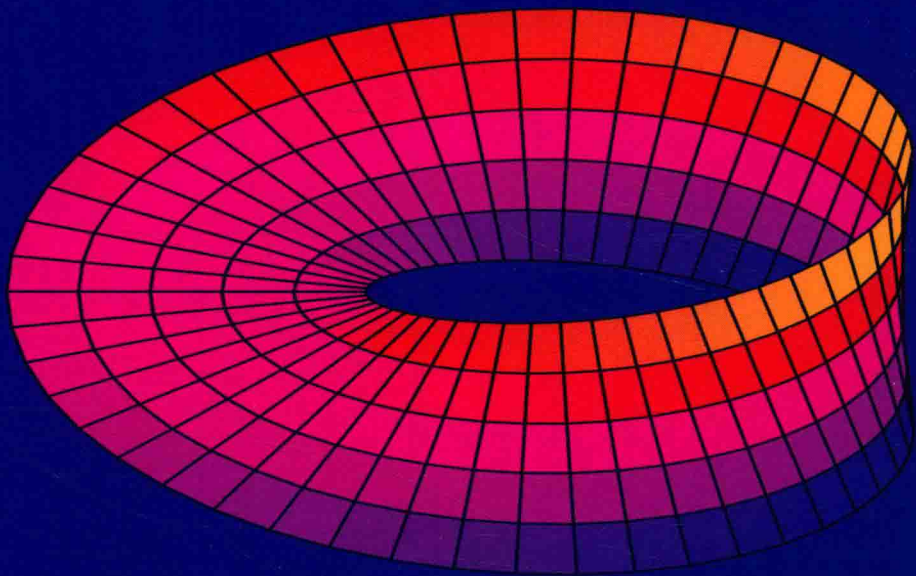
牛顿

Newton
Science Museum

科学馆

橡皮几何学漫谈

王敬虞◎编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

牛顿

Newton
Science Museum

科学馆

橡皮几何学漫谈

王敬虞◎编著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

橡皮几何学漫谈/王敬康编著. —北京:北京师范大学出版社, 2017. 6

(牛顿科学馆)

ISBN 978-7-303-21942-1

I. ①橡… II. ①王… III. ①几何学—普及读物 IV. ①O18-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 015807 号

营 销 中 心 电 话 010-58805072 58807651
北师大出版社学术著作与大众读物分社 <http://xueda.bnup.com>

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京市海淀区新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印 刷: 三河市兴达印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 890 mm×1240 mm 1/32

印 张: 8

字 数: 180 千字

版 次: 2017 年 6 月第 1 版

印 次: 2017 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 30.00 元

策划编辑: 岳昌庆

责任编辑: 岳昌庆 李启超

美术编辑: 王齐云

装帧设计: 王齐云

责任校对: 陈 民

责任印制: 马 洁

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58805079

序 言

按照近代数学的观点，有一类变换就有一种几何学。初等几何变换既是初等几何研究的对象，又是初等几何研究的方法。《几何变换漫谈》较为详细地介绍了平移、旋转、轴反射及位似等初等几何变换的性质，并配有应用这些变换解题的丰富的例题和习题。书中还通过平行投影和中心投影，简要地介绍了仿射变换和射影变换。最后还直观形象地介绍了拓扑变换。

哲学家笛卡儿通过建立坐标系，用代数方法来研究几何，具体说就是用方程来研究曲线，这就是解析几何方法的实质。解析几何最初就叫坐标几何。《解析几何方法漫谈》通过解析几何创立的历史，解析几何方法与传统的欧几里得几何方法的比较，对解析几何方法进行了深入的分析，并介绍了解析几何解题方法的若干技巧，如轮换与分比、斜角坐标系的应用、旋转与复数及解析几何方法的反用，等等。

为了扩大青少年朋友们关于近代几何学的视野，向他们尽可能通俗直观地介绍一点关于拓扑学——外号叫橡皮几何学——的知识，《橡皮几何学漫谈》选择了若干古老而有趣的、但属于拓扑学范畴的问题，包括哥尼斯堡七桥问题、关于凸多面体的欧拉公式以及地图着色的四色问题，等等。当然也通俗直观地介绍关于拓扑学的一些基本概念和方法，还谈到了纽结和链环等。

北京师范大学出版社将上述 3 本“漫谈”，收录入该社编辑的

科普丛书——“牛顿科学馆”同时出版。

努力和尽力为广大青少年数学爱好者做一点数学普及工作，是我心中的一个挥之不去的愿望，谨以上述3本“漫谈”贡献给广大读者。

我把这3本小书都取名为“漫谈”，以区别于正统的数学教科书，希望这几本小书能体现科学性、趣味性和思想性的结合，努力实现“内容是科学的，题材是有趣的，叙述是通俗直观的，阐述的思想是深刻的”这一写作目标。

著名数学教育家波利亚曾指出，数学教育的目的是“教年轻人学会思考”。因此，讲解一道题时，分析如何想到这个解法，比给出这个解法更重要。遵循波利亚这一教导，在各本“漫谈”的叙述方式上，都力求尽可能说清楚“如何想到的”。始终不忘“训练思维”这一核心宗旨，这也可以说是上述3本“漫谈”的一个显著特点。总结起来就是从引起兴趣入手，通过训练思维，从而达到提高能力的目的。

王敬康

2016年6月于北京师范大学

前 言

橡皮几何学，或者说橡皮膜上的几何学，顾名思义是研究画在橡皮膜上的几何图形有哪些性质。橡皮膜具有极好的弹性，可以任意弯曲、拉伸、扭转，当然不要撕破它，也不要使其互相粘连——我们把这些操作称为橡皮变形。研究几何图形在橡皮变形下有哪些不变的性质的学科，这就是橡皮几何学，也就是拓扑学。拓扑学，是一个根据英文单词(topology)发音直译过来的名词。橡皮几何学是拓扑学的一个形象而通俗的说法，或者说橡皮几何学是拓扑学的一个“外号”。

拓扑学是几何学的年轻分支之一，作为近代数学的一门基础理论学科，拓扑学已经渗透到数学的许多分支以及物理学、化学和生物学之中，而且在工程技术中也取得了广泛的应用。因此将拓扑学的基本思想和方法直观地、通俗地介绍给青年学生，开阔他们的视野，激发他们的兴趣，是很有意义的事。前辈著名拓扑学家江泽涵、姜伯驹等在 20 世纪 60 年代都曾做过这方面的工作，就拓扑学的某个专题为青少年编写过科普小册子。

我曾在北京师范大学数学系高年级开设选修课程“直观拓扑”，北京师范大学出版社出版了该课程的教材。《直观拓扑》教材受到姜伯驹院士的肯定和赞扬，他指出：“浅的书要写得好是很不容易的。题材要引人入胜；讲法要直观易懂；内容又要经得起推敲，不能以谬传谬。这本书兼顾了这几方面的要求，是难能可贵的。

我希望师范院校能够推广这样的课程，并且也向广大的数学爱好者推荐这本书。”由于该书属于大学教材序列，中学生阅读起来有些困难。这次恰逢北京师范大学出版社编辑出版“牛顿科学馆”科普丛书，在出版社编辑岳昌庆的建议下，我从《直观拓扑》中选择部分有趣的题材，适当改写，以期成为一本适合中学生阅读的科普读物，取名为《橡皮几何学漫谈》，作为该丛书中的一本。

本书开头的两章，即 §1 和 §2 介绍拓扑学的基本概念：拓扑变换(橡皮变形)和同胚。

§3 介绍连续性的几个有趣的应用。

关于凸多面体的顶点数、棱数和面数的关系式，即著名的欧拉公式，还有著名的“七桥问题”，是在拓扑学成为一门独立的学科以前，由欧拉发现和解决的拓扑问题。由于这些古老而有趣的拓扑问题可以用初等方法说明，因而可以向中学生介绍，这就是本书 §4~§9 的内容。

其他有趣的内容还包括地图着色问题(四色问题和五色定理)，曲线内部和外部(约当曲线定理)和不动点定理等，可以用直观的方法证明它们，这就是本书 §10~§12 的内容。

曲面拓扑学部分将介绍几个奇特的单侧曲面(莫比乌斯带、射影平面和克莱因瓶)和闭曲面的分类定理，这就是本书 §13 和 §14 的内容。

本书还将简要介绍绳圈的拓扑学(纽结和链环)。最后还要涉及一点近代颇有争议的数学应用——初等突变模型，这就是本书最后三章，即 §15~§17 的内容。

本书编者对自己提出的编写要求是兼顾科学性和趣味性，努力做到选材是有趣的，讲述是通俗直观的，知识内容是科学的，

阐述的数学思想和方法是深刻的。

多数章节的最后给出了少量的习题，供读者练习之用。做练习可以帮助读者理解和掌握概念和方法。书末给出了习题的解答，供读者参考。

本书是为广大中学生朋友编写的课外读物，也可供数学爱好者阅读。

本书是在北京师范大学出版社的支持和帮助下完成的，特此致谢。书中的不足之处，恳请读者朋友批评指正。

王敬康

2015年9月于北京师范大学

目 录

- § 1. 拓扑, 外号叫橡皮几何学——从平面几何到拓扑学 /001
- § 2. 几个最简单的拓扑不变量 /006
 - § 2.1 连通性及连通分支的个数 /007
 - § 2.2 连通区域的连通重数(单连通、双连通、三连通、多连通、 n 重连通等) /008
 - § 2.3 割点的个数 /009
 - § 2.4 点的指数 /010
 - 习题 1 /011
- § 3. 映射连续性的有趣应用 /013
 - § 3.1 映射连续性的直观描述 /013
 - § 3.2 有趣的应用几例 /015
 - 习题 2 /023
- § 4. 简单多面体的欧拉公式 /024
 - 习题 3 /034
- § 5. 五种正多面体及一个游戏——哈密尔顿周游列国游戏 /035
 - § 5.1 为什么只有五种正多面体 /035
 - § 5.2 正 12 面体的顶点遨游 /042
 - 习题 4 /048
- § 6. 欧拉公式的一个实际应用——平面布线问题 /049
 - § 6.1 关于图和可平面图 /050
 - § 6.2 简单图、完全图和二部图 /052

§ 6.3 两个最简单的不可平面图 /055

习题 5 /061

§ 7. 欧拉发现欧拉公式的故事 /063

§ 7.1 提出问题 /064

§ 7.2 遭遇挫折 /066

§ 7.3 柳暗花明 /067

§ 7.4 再接再厉 /071

§ 7.5 给出证明 /072

§ 8. 欧拉解决七桥问题的故事 /076

§ 8.1 对问题的性质进行分析——认清问题，并确定解题目标 /077

§ 8.2 将问题抽象化、数学化 /078

§ 8.3 分情况讨论解决问题 /079

§ 8.4 将判别法则程序化 /081

§ 8.5 寻求最简法则 /083

§ 8.6 具体画出路线 /085

§ 9. 一笔画及它的一个应用——邮递员路线问题 /087

习题 6 /097

§ 10. 约当曲线定理——曲线内部和外部 /099

习题 7 /108

§ 11. 四色问题和五色定理 /109

§ 11.1 四色问题 /109

§ 11.2 五色定理 /115

习题 8 /121

§ 12. 布劳威尔不动点定理 /122	
§ 13. 莫比乌斯带, 射影平面和克莱因瓶 /131	
§ 13.1 圆柱面和莫比乌斯带 /131	
§ 13.2 射影平面 /136	
§ 13.3 环面和克莱因瓶 /140	
§ 13.4 曲面的多边形表示 /142	
习题 9	/147
§ 14. 曲面的欧拉示性数和闭曲面的分类 /148	
§ 14.1 曲面的概念 /148	
§ 14.2 曲面的欧拉示性数 /151	
§ 14.3 曲面的三角剖分 /154	
§ 14.4 闭曲面的拓扑分类 /160	
习题 10	/162
§ 15. 纽结和链环及其同痕 /163	
§ 15.1 纽结和链环 /164	
§ 15.2 判断两个纽结相同(同痕) /169	
§ 15.3 镜像问题 /176	
习题 11	/179
§ 16. 几个同痕不变量 /180	
§ 16.1 几个最简单的同痕不变量 /180	
§ 16.2 琼斯的多项式不变量 /186	
§ 16.3 纽结及链环的拼与和的琼斯多项式 /191	
习题 12	/197
§ 17. 初等突变理论点滴 /198	
§ 17.1 齐曼突变机构 /200	

§ 17.2 初等突变模型/205

§ 17.3 初等突变理论应用举例/207

习题解答/216

习题 1/216

习题 2/216

习题 3/216

习题 4/218

习题 5/220

习题 6/224

习题 7/226

习题 8/229

习题 9/231

习题 10/234

习题 11/237

习题 12/238

§ 1. 拓扑，外号叫橡皮几何学

——从平面几何到拓扑学

我们在初中学习过平面几何，如果有人问你什么是几何，你怎么回答呢？你会回答说，几何是研究图形（包括各种三角形和各种四边形及圆等）的几何性质的一门学科。那么，如果再问什么是几何性质呢？图形的哪些性质是图形的几何性质呢？我们研究三角形时，这个三角形是用铅笔画在纸上的呢，还是老师用粉笔画在黑板上的呢，还是用几何画板画在电脑屏幕上的呢？显然，这些都不是我们所关心研究的内容，我们只研究三角形的形状和大小，与三角形有关的各种线段、各种角及它们之间的关系，等等。这些才是图形的几何性质。

我们还发现，诸如线段的长度，三角形的面积，以及直线间的平行、垂直等关系，这些都与图形在平面上的位置无关。可见，我们所研究的图形的性质，是与图形在平面上的位置无关的性质。

将上述事实换一个说法就是，我们所研究的图形的性质，是图形经过“搬动”以后不改变的性质。所谓“搬动”图形包括将图形“平行移动”（简称平移）、“绕一点的旋转”（简称旋转）和“以一条直线为轴的反射”（简称轴对称），以及它们的复合。或者用更有“数学味儿”的话说，就是图形经过平移变换、旋转变换和轴对称变换，以及它们的复合以后不改变的性质。由于在上述变换下，平面上任意两点间的距离保持不变，因此我们将这些变换统称为“等距变换”。我们看到一个图形经过等距变换以后，所得到的图形与

原来的图形，形状相同且大小相等，只是在平面上的位置不同罢了，我们称这两个图形“全等”。因此，我们也可以说，我们在平面几何中所研究的图形的性质，是指图形在等距变换下不变的性质，或者说是全等的图形所共有的性质。图形的这些性质，称为图形的度量性质。图形的度量性质的研究，就构成平面的欧氏度量几何学，也就是我们通常的平面几何。

如果我们把上述等距变换中的“等距”条件放宽一点，允许图形经过变换后，有一定程度的“失真”，即不要求任意两点间的距离保持不变，只要求变换后两点间的距离是原来距离的 k 倍， $k > 0$ ， k 不必是整数。平面上的图形，经过这个变换以后，大小改变了，但形状不会改变。我们把形状相同(大小不必相等)的两个图形称为相似的图形。因此，我们把平面上的上述变换，叫作相似变换， k 叫作相似比。图形在相似变换下不变的性质称为图形的相似性质，图形的相似性质的研究，构成平面相似几何学。一个图形所具有的性质，如果和它相似的所有图形都具有，那么这个性质就属于相似几何学研究的内容。当相似比 $k=1$ 时，相似变换就变成等距变换，所以相似变换是等距变换的推广，或者说等距变换是相似变换的特例。

如果我们把变换的条件再大大地放宽，允许图形经过变换后，有更大程度的“失真”，即允许对一个图形施行拉伸、压缩、弯曲等任意变形，只要求在变形过程中，不把原来不同的点融合成一点，也不产生新的点，也就是只要求把原来是“邻近的”点，还变成“邻近的”点，原来不是“邻近的”点，还变成不是“邻近的”点。经过这样的变换所得到的新图形和原来的图形称为是同胚的。这个变换称为拓扑变换。拓扑变换也称为同胚映射。为了更直观形

象地了解拓扑变换, 我们想象把图形画在一个极富弹性的橡皮薄膜上, 将橡皮薄膜任意拉伸、压缩、弯曲, 只要不撕破(撕破就产生新的点了), 也不使它粘连(粘连就把原来不同的点融合成一点了), 上述橡皮变形就是拓扑变换, 经过上述橡皮变形后得到的图形与原图形同胚。图形在拓扑变换(橡皮变换)下不变的性质称为图形的拓扑性质。图形的拓扑性质的研究, 就构成拓扑学。于是, 人们给拓扑学起了一个很形象的“外号”——橡皮几何学, 或橡皮膜几何学。橡皮变换(拓扑变换)甚至还允许先将橡皮膜沿其上一条曲线剪开, 进行上述变形后, 再沿着原来剪开的地方, 把一剪为二的点再合成原先的一个点——我们将其称为广义的橡皮变换。

前面介绍的平面上的等距变换和相似变换都是拓扑变换的特例。因此拓扑学是欧氏度量几何学和相似几何学的推广。在拓扑变换下, 图形的形状和大小一般都要改变, 所以拓扑学中不研究图形的形状和大小, 没有长度、角度和面积等概念。拓扑学中只关心点之间的“邻近”关系——即相互位置关系, 所以在历史上拓扑学形成一门独立学科以前, 德国数学家莱布尼茨在 1676 年就称它为“位置分析”或“位置几何学”。

把互相“邻近的”点还变成互相“邻近的”点的映射称为连续映射。因此, 连续性是拓扑学研究的重要内容(见本书 § 3)。

下面我们来看几个同胚的图形的例子。

例 1 如图 1.1, 设 s 是以 O 为中心的半圆周去掉它的两个端点 P 和 Q , l 是与半圆相切且平行于直径 PQ 的直线。以 O 为投射中心作中心投影, 把半圆周 s 的点投射成直线 l

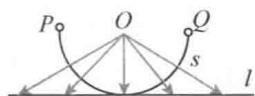


图 1.1

上的点, 这个中心投影就是一个同胚映射。因此, 直线与没有端

点的半圆周同胚。进而，半圆周又可拉直成没有端点的线段，而“拉直”是一个拓扑变换，因此，半圆周同胚于没有端点的直线段。因而，直线和任意一个去掉两个端点的线段同胚。

例2 正三角形和它的外接圆同胚。如图1.2所示的中心投影就是所要求的同胚映射。也可以直观地说明，任意一个三角形和圆同胚：我们把三角形框看成是橡皮做的，用手撑一撑，就成了圆圈了。不仅仅是三角形与圆同胚，四边形及任一个多边形都与圆同胚。更一般地，任意一个简单(即自身不相交的)封闭曲线都与圆同胚。

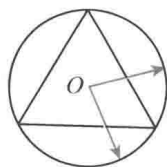


图 1.2

由橡皮变形我们可以得到同胚图形的更多的例子。

例3 如图1.3中所给出的四个中空立体图形的表面，想象它们都是弹性极好的橡皮薄膜做成的，往里吹气，它们都能膨胀起来变成一个圆球，于是它们是互相同胚的，都同胚于球面。又如图1.4中所给出的四个封闭曲线，想象它们都是弹性极好的橡皮筋做成的，前三个图形，很容易变成一个圆圈。最后一个是空间曲线，用广义的橡皮变形(先剪断，将打的结解开，再把剪断的地方接起来)，也得一个圆圈。于是这四个封闭曲线是互相同胚的，都同胚于圆周。在拓扑学中，同胚的图形看成是“一样的”。因此，在拓扑学家眼里，图1.3中所给出的四个中空立体图形和球面都是“一样的”；图1.4中所给出的四个封闭曲线和圆周都是“一样的”；碗和盘子也是不加区别的。如图1.5。

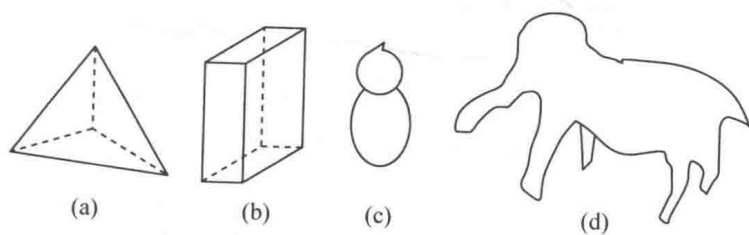


图 1.3

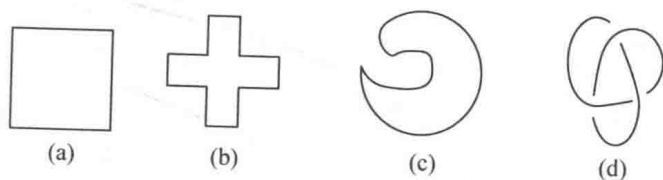


图 1.4



图 1.5