



华 林 钱东升 著

轴承精密轧制理论与技术

Precision Rolling Theory and Technology for Bearing

Hua Lin Qian Dongsheng



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

轴承精密轧制理论与技术

Precision Rolling Theory and Technology for Bearing

华 林 钱东升 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是轴承先进制造的学术著作,以高性能轴承成形制造技术为背景,系统阐述了轴承精密轧制理论、关键技术及其生产应用。全书共分5章,从理论层面研究了轴承径向轧制和径-轴向轧制力学条件、力能参数计算方法、宏微观变形规律和工艺设计规划方法;从技术层面分析了轴承精密冷轧、热轧和径-轴向轧制工艺、设备和生产线及其工程应用,并介绍了我国轴承轧制技术现状和发展。

本书适用于从事轴承研究、设计、生产和应用的专业科技研究和工程技术人员,也可作为高等院校相关专业教师和研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

轴承精密轧制理论与技术/华林,钱东升著. —北京:科学出版社,2017.4
ISBN 978-7-03-051873-6

I. 轴… II. ①华…②钱… III. 轴承-轧制 IV. TH133.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 037528 号

责任编辑:魏英杰 / 责任校对:桂伟利

责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年4月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年4月第一次印刷 印张:13 3/4

字数:276 000

定价:98.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

轴承是机械核心基础零部件,其质量直接影响机械装备的工作性能和使用寿命。《中国制造 2025》规划的高档数控机床和机器人、航空航天装备、海洋工程装备及高技术船舶、先进轨道交通装备、节能与新能源汽车、电力装备等重点突破领域,都离不开高性能轴承的支撑。改革开放三十多年来,我国轴承工业快速发展,建成了较为完整的轴承材料与元件工业体系,现已成为世界轴承制造大国。但是,我国轴承制造技术与国际先进水平仍有较大差距,如民用航空轴承、高速动车组轴承、高档数控机床轴承等高性能轴承,主要依赖进口,这种状况严重影响了国民经济建设和国防安全发展。为了推进我国从轴承制造大国向制造强国转型升级,必须突破高性能轴承制造的科学与技术难题。

轴承精密轧制采用轧环回转塑性成形技术制造轴承套圈组件,与传统锻造和切削加工相比,具有节能节材、高效优质、经济环保等优点,能够显著提升轴承套圈组件的几何精度和组织性能,是国际轴承先进制造技术的重要发展方向。在轴承轧制过程中,不但轧制条件和接触状态动态变化,而且工件几何尺寸、内部材料组织和变形运动状态也在动态变化,轧制过程表现出了高度几何非线性、物理非线性、接触非线性和时变特性,轴承轧制的物理、力学和材料学机制非常复杂。该书作者针对我国轴承技术发展的重大需求,经过长期理论和实践探索,通过几何学、运动学、塑性力学、材料学等多学科交叉的数值模拟和实验测试,从宏微观多层面深化了对轴承轧制物理本质的认识,揭示了轴承轧制变形和运动规律,建立了轴承径-轴向轧制条件、力能参数计算方法和工艺设计方法,发展了轴承轧制理论。针对轴承精密轧制技术生产应用,结合轴承材料、尺寸和结构特点,阐明了轴承精密轧制关键技术,分析了轴承精密冷轧、热轧和径-轴向轧制工艺流程、设备结构和生产组织,总结了轴承轧制工艺规划和生产线布置方法。以典型轴承精密轧制生产应用为例,展示了我国轴承轧制技术现状和发展。

该书是作者在轴承制造领域研究成果的系统总结,既有理论价值,又有实际意义,该书的出版填补了轴承轧制技术著作空白,对于从事轴承研究、生产和应用的科技工作者将会提供有益的帮助,对于我国高性能轴承制造技术和产业发展将会

起到积极推动作用。我很高兴为该书作序,衷心期望作者在轴承轧制研究开发中取得更多成绩,为我国工业强基工程发展做出更大贡献!



丁汉

中国科学院院士

2017年1月2日

前 言

轴承是机械装备承载和传动的核心基础零部件,广泛应用于机床、汽车、火车、舰船、飞机、兵器等工业领域。轴承的性能和寿命直接影响到装备的性能和寿命,轴承技术在一定程度上代表了一个国家的工业技术水平和竞争力。我国的装备制造强国建设对高性能轴承提出了迫切要求,《中国制造 2025》明确提出了高性能轴承技术国家需求。面对欧洲、美国、日本等工业强国对高端轴承的技术封锁和市场垄断,发展轴承先进制造技术,促进轴承行业自主创新,是我国从制造大国转型升级为制造强国的必由之路。

轴承轧制是用轧环技术成形制造轴承套圈组件的先进塑性加工技术,相比轴承传统锻造和切削加工技术,轧制轴承套圈组织细密、金属流线沿滚道连续分布,具有节能、节材、高效、优质等优点,特别适合轴承大批量自动化生产,在世界轴承工业先进国家得到了生产应用和高度重视。

本书是作者在轴承轧制技术方面多年研究成果的总结。在国家自然科学基金、973 计划、国家科技重大专项等大力支持下,武汉理工大学轴承科研团队通过产学研合作,深入系统研究了轴承轧制基础理论,开发了轴承精密轧制技术与装备,并在国内外轴承企业中进行了推广应用,取得了显著技术经济效益。针对当前我国装备制造对高性能轴承的迫切需求,作者将轴承轧制相关研究成果进一步总结整理,希望可以加快发展我国轴承轧制先进技术。

本书共 5 章:第 1 章介绍轴承轧制基础知识;第 2、3 章分别阐述轴承径向轧制理论和径-轴向轧制理论;第 4 章阐述轴承轧制技术,包括轴承轧制工艺、设备和生产线;第 5 章总结分析轴承轧制技术应用现状和发展趋势。

本书的研究工作得到了毛华杰教授、赵玉民教授、兰箭教授、韩星会教授、汪小凯副教授、鄢奉林博士、贾耿伟博士、左治江博士、潘利波博士、魏文婷博士、邓松博士、邓加东博士等的支持,作者谨在此一并致谢!

感谢国家科学技术学术著作出版基金的资助和科学出版社首席策划魏英杰的大力帮助。

轴承轧制技术处于快速发展之中,作者对于一些理论与实际问题的认识难免不全面、不准确,殷切希望读者批评指正。

作 者

目 录

序

前言

第 1 章 轴承轧制基础知识	1
1.1 轴承制造技术概述	1
1.1.1 轴承传统锻造技术	1
1.1.2 轴承轧制技术	2
1.2 轴承轧制技术分类	2
1.2.1 轴承径向轧制	3
1.2.2 轴承径-轴向轧制	4
1.3 轴承轧制技术特点	5
1.3.1 轴承轧制技术效果	5
1.3.2 轴承轧制技术复杂性	6
参考文献	6
第 2 章 轴承径向轧制理论	7
2.1 轴承径向轧制条件	7
2.1.1 径向轧制咬入孔型条件	7
2.1.2 径向轧制塑性锻透条件	10
2.1.3 径向轧制刚性稳定条件	12
2.2 轴承径向轧制力能计算方法	15
2.2.1 径向轧制力能参数计算方法	15
2.2.2 径向轧制力能影响因素	22
2.3 轴承径向轧制变形规律	22
2.3.1 几何尺寸变化规律	22
2.3.2 运动状态变化规律	24
2.3.3 宏观塑性变形规律	27
2.3.4 微观组织演化规律	33
2.4 轴承径向轧制工艺条件影响规律	43
2.4.1 力能参数影响规律	43
2.4.2 宏观变形状态影响规律	48
2.4.3 微观组织状态影响规律	55

2.5 轴承径向轧制工艺设计规划方法	64
2.5.1 径向轧制工艺设计方法	64
2.5.2 径向轧制过程规划方法	72
参考文献	73
第3章 轴承径-轴向轧制理论	77
3.1 轴承径-轴向轧制力学条件	77
3.1.1 径-轴向轧制咬入孔型条件	77
3.1.2 径-轴向轧制塑性锻透条件	80
3.1.3 径-轴向轧制刚性稳定条件	83
3.2 轴承径-轴向轧制力能计算	87
3.2.1 径-轴向轧制力能参数计算方法	87
3.2.2 径-轴向轧制力能影响因素	92
3.3 轴承径-轴向轧制变形规律	92
3.3.1 几何尺寸变化规律	92
3.3.2 运动状态变化规律	94
3.3.3 宏观塑性变形规律	97
3.3.4 微观组织演化规律	101
3.4 轴承径-轴向轧制工艺条件影响规律	103
3.4.1 力能参数影响规律	104
3.4.2 宏观变形状态影响规律	110
3.4.3 微观组织状态影响规律	117
3.5 轴承径-轴向轧制工艺设计规划方法	121
3.5.1 径-轴向轧制工艺设计方法	121
3.5.2 径-轴向轧制过程规划方法	129
参考文献	131
第4章 轴承轧制技术	133
4.1 轴承冷轧技术	133
4.1.1 轴承冷轧工艺	133
4.1.2 轴承冷轧设备	164
4.1.3 轴承冷轧生产线	171
4.2 轴承热轧技术	172
4.2.1 轴承热轧工艺	172
4.2.2 轴承热轧设备	182
4.2.3 轴承热轧生产线	186
4.3 轴承径-轴向轧制技术	186

4.3.1 轴承径-轴向轧制工艺	187
4.3.2 轴承径-轴向轧制设备	189
4.3.3 轴承径-轴向轧制生产线	191
参考文献.....	191
第5章 轴承轧制技术应用与发展	194
5.1 轴承轧制技术应用现状	194
5.1.1 轴承冷轧技术应用	194
5.1.2 轴承热轧技术应用	196
5.1.3 轴承径-轴向轧制技术应用	197
5.2 轴承轧制技术应用实例	199
5.2.1 精密机床轴承冷轧技术	199
5.2.2 高铁轴承热轧技术	201
5.2.3 风电轴承径-轴向轧制技术	204
5.3 轴承轧制技术发展方向	206
5.3.1 轴承轧制技术基础研究	206
5.3.2 轴承轧制技术应用研究	206
参考文献.....	207

第 1 章 轴承轧制基础知识

本章主要介绍轴承轧制技术相关背景和基础知识,包括轴承传统锻造技术和先进轧制技术,轴承轧制技术分类、原理和应用特点,以及轴承轧制技术效果和复杂性,有助于读者全面了解轴承轧制技术内涵和特点。

1.1 轴承制造技术概述

轴承是机械设备承载负荷和传递运动的核心基础零部件,对主机的运转精度、工作性能和服役寿命有着重要的影响,是国家装备工业技术水平的重要标志。轴承是技术密集型产品,其制造能力和水平在一定程度上反映了一个国家的装备工业基础和市场竞争能力^[1]。

现代工业轴承分为滚动轴承和滑动轴承两类^[2],且大多数为滚动轴承。以图 1.1 所示的滚动球轴承为例,典型的滚动轴承主要由内圈、外圈、滚动体和保持架等组件构成^[3],内圈和外圈是轴承的基体,统称为轴承套圈,简称为轴承环。轴承环的制造成本占轴承制造成本的 60%~70%,其性能在很大程度上决定着轴承质量和寿命。因此,轴承环制造是轴承制造的核心,其技术水平可以直接反映轴承制造技术的水平。

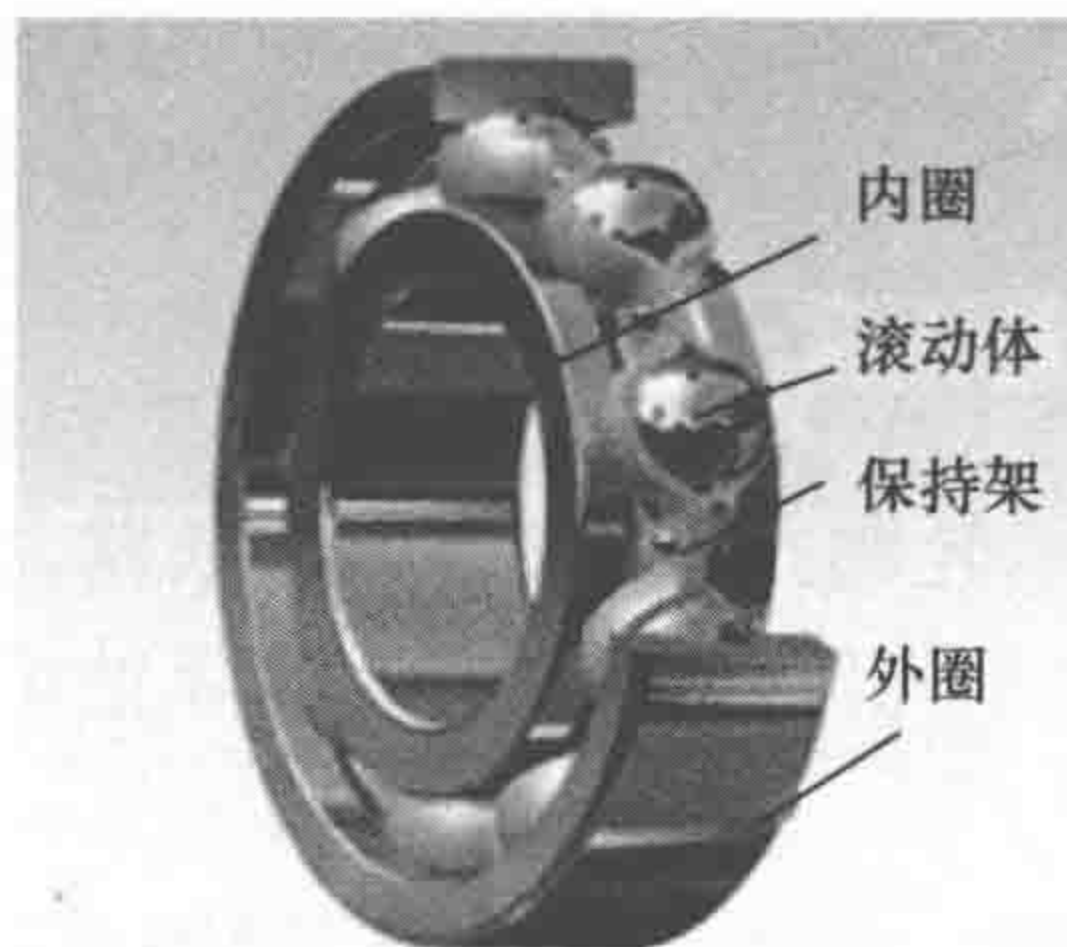


图 1.1 球轴承结构简图

1.1.1 轴承传统锻造技术

轴承环制造工艺复杂,工序多、流程长,总体上可以分为塑性成形、热处理和切削加工三大主要环节。其中,塑性成形不但赋予轴承环基本尺寸形状,而且改善材

料组织性能,是决定轴承环制造质量和经济效果的核心工艺环节。

轴承环传统塑性成形方法以锻造为主^[4],对于不同尺寸规格的轴承环,其锻造工艺也有所不同。

(1) 对于中小型规格轴承环(直径 $<100\text{mm}$),通常采用套锻成形,基本工艺为锻粗-套锻-冲孔-分离。

(2) 对于中大型和大型规格轴承环(直径 $100\sim 500\text{mm}$),通常采用锻造成形,基本工序为锻粗-冲盲孔-冲连皮-平端面。

(3) 对于大型规格以上轴承环(直径 $>500\text{mm}$),通常采用自由锻+马架扩孔成形,基本工序为锻粗-冲盲孔-冲连皮-马架扩孔-平端面。

以锻造成形为代表的轴承环传统塑性成形方法具有工艺灵活、适应性广等优点,但也存在诸多缺点,主要体现为成形精度低、加工余量大、材料利用率低、生产能耗高;工艺条件波动大、轴承环尺寸精度和组织性能一致性差;轴承滚道需要大量切削加工、破坏金属流线完整性、损害轴承产品机械性能和寿命;自动化程度低、劳动强度大、工作环境差。

1.1.2 轴承轧制技术

轴承轧制技术是指采用环件轧制(简称轧环)方法成形轴承环的一种轴承先进制造技术。轧环是一种以无缝环类零件为成形对象的特种轧制方法^[5,6],它通过轧辊的旋转驱动和直线进给作用使环形毛坯在旋转过程中逐渐减小壁厚、扩大直径、成形截面轮廓,最终获得所需尺寸形状的环形零件。轧环技术伴随着19世纪中叶英国铁路运输业的发展而产生,随着20世纪中期轴承工业的快速发展,轧环以其节能、节材、高效、优质等显著技术优势逐渐取代传统锻造用于轴承环制造,轴承轧制技术也逐步在世界范围内得到快速的发展和应用^[7-9],我国从20世纪50年代末期开始引进轴承轧制技术用于轴承工业生产。

目前,以瑞典SKF、德国FAG、日本NSK、美国TIMKEN等为代表的国际顶尖轴承企业,已普遍采用轴承轧制技术生产汽车、铁路、机床、冶金、能源、航空航天等领域各种规格的轴承。轴承轧制技术已成为国际轴承制造业公认的高性能轴承先进制造技术代表。

1.2 轴承轧制技术分类

轴承轧制技术按照轧环成形方法区别,主要分为轴承径向轧制技术和轴承径-轴向轧制技术。

1.2.1 轴承径向轧制

轴承径向轧制是指采用径向轧环方法成形轴承环,通过轧辊的旋转驱动和径向直线进给作用,使轴承环毛坯(简称环坯)产生壁厚减小、直径扩大、截面成形的塑性变形,从而获得所需径向尺寸和截面形状的轴承环。按照环坯轧制时的温度差别,轴承径向轧制可以分为轴承冷轧和轴承热轧。环坯在常温下轧制为冷轧,环坯在再结晶温度以上轧制为热轧。

轴承冷轧原理如图 1.2 所示。驱动辊作主动旋转运动;芯辊为压力辊,作径向直线进给运动和从动旋转运动;轧制过程中环坯反复咬入驱动辊和芯辊构成的轧制孔型,产生连续局部径向压缩、周向伸长变形;通过多转轧制变形积累,环坯整体壁厚减小、直径扩大、截面轮廓成形。导向辊通过随动导向(轧制过程中导向辊位置随环坯直径扩大而变化)来保证环坯平稳转动。测量辊随动过程中实时测量轴承环径向尺寸。受材料室温变形能力和变形抗力限制,冷轧成形主要适用于直径 200mm 以内的中大型规格以下的轴承制造。

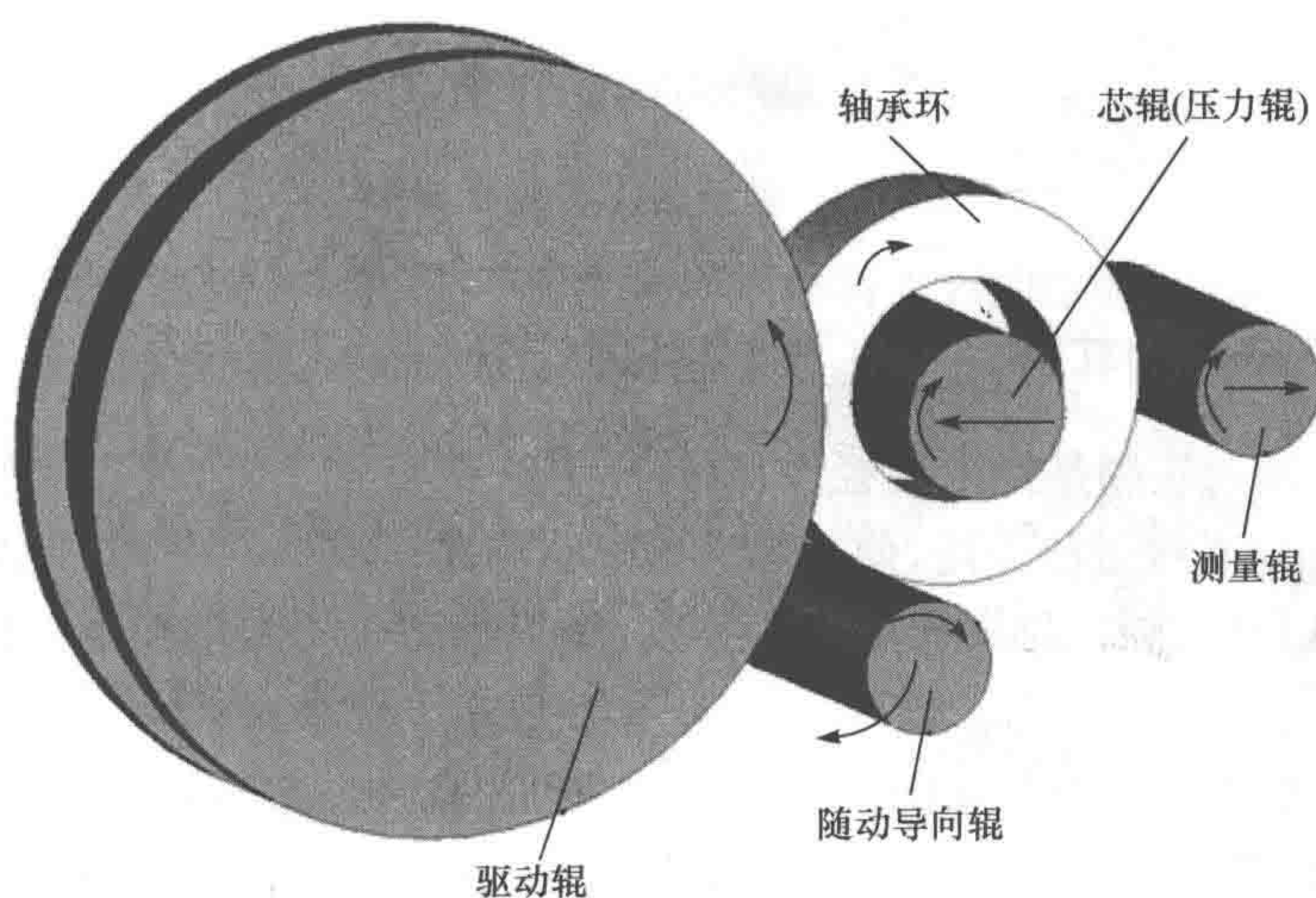


图 1.2 轴承冷轧成形原理图

轴承热轧原理与冷轧基本相似,如图 1.3 所示。热轧中驱动辊通常为压力辊同时作主动旋转运动和径向直线进给运动,导向辊为固定导向(轧制过程中导向辊位置固定),信号辊在环坯与其接触时发出信号停止进给来控制轴承环径向尺寸。热轧成形尺寸范围大,可适用于直径 1000mm 以下的各种规格轴承制造,是目前工业应用最广泛的一种轴承轧制技术。

轴承径向轧制变形力小、设备造价低、占地面积少、生产效率高,但是成形轴承环的端面质量难以保障,容易产生端面凹坑缺陷。

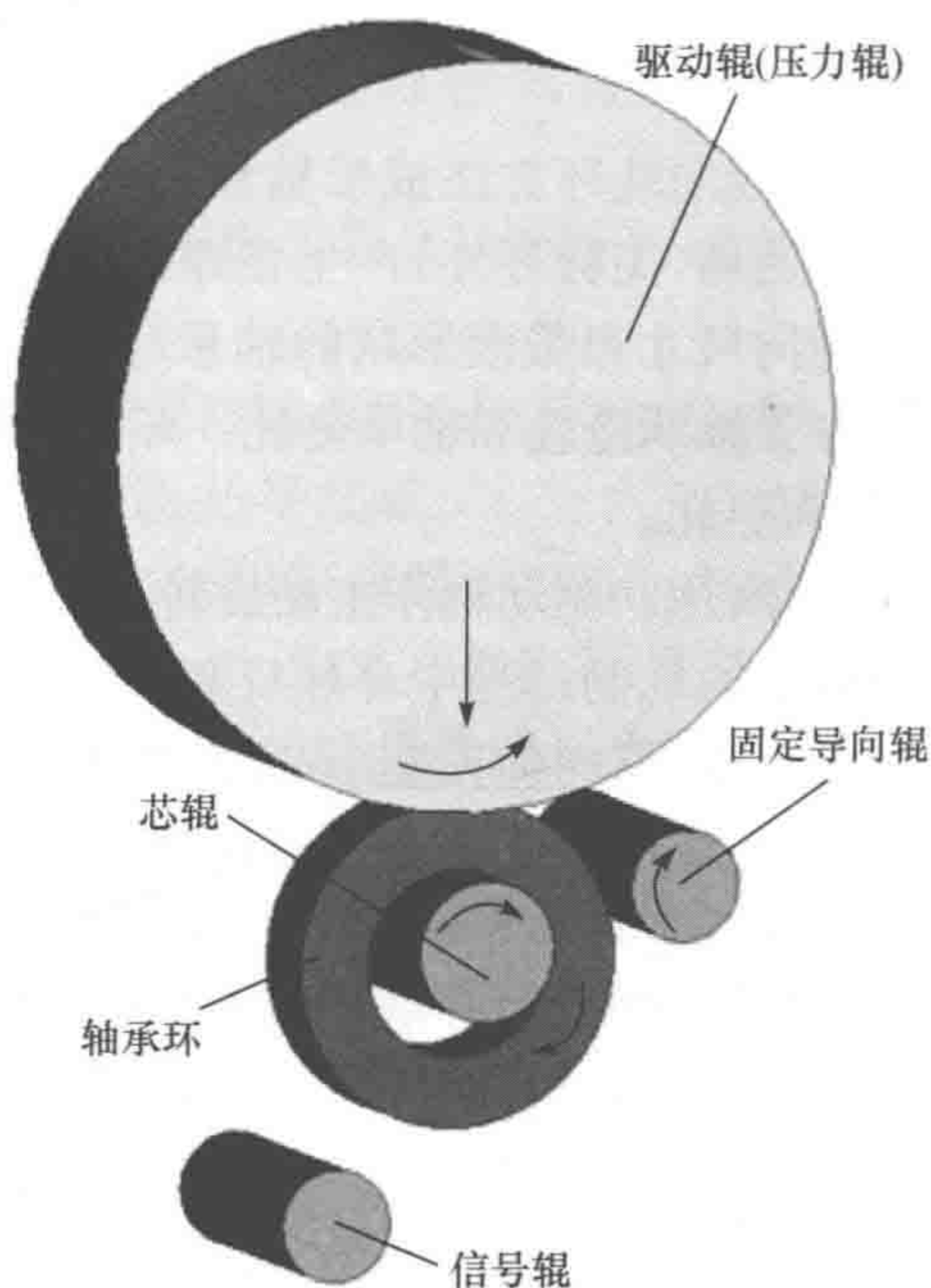


图 1.3 轴承热轧成形原理图

1.2.2 轴承径-轴向轧制

轴承径-轴向轧制是指采用径-轴向轧环方法成形轴承环,通过轧辊的旋转驱动、径向和轴向直线进给作用,使坯产生壁厚和高度减小、直径扩大、截面成形的塑性变形,获得所需径、轴向尺寸和截面形状的轴承环。轴承径-轴向轧制通常为热轧成形。

轴承径-轴向轧制原理如图 1.4 所示。驱动辊作主动旋转运动,芯辊作从动旋转运动和径向直线进给运动;上、下锥辊作主动旋转运动,并沿坯直径扩大方向作水平运动以始终保持与坯端面接触,上锥辊同时作轴向直线进给运动;轧制过程中坯反复咬入驱动辊、芯辊构成的径向轧制孔型和上、下锥辊构成的轴向轧制孔型中,产生连续局部径向压缩、轴向压缩和周向伸长变形;通过多转轧制变形积累,坯整体壁厚和高度减小、直径扩大、截面轮廓成形。导向辊(径-轴向轧环有两个导向辊,亦称为抱辊)通过随动导向保证坯平稳转动。测量辊随动过程中实时测量轴承环径向尺寸,上锥辊通过轴向进给实时控制轴承环轴向尺寸。

轴承径-轴向轧制通过径向和轴向联合轧制变形,成形轴承环尺寸大、端面平整,其设备结构复杂、造价高、占地面积大,主要适用于直径 1000mm 以上的特大型和超大型规格轴承制造。

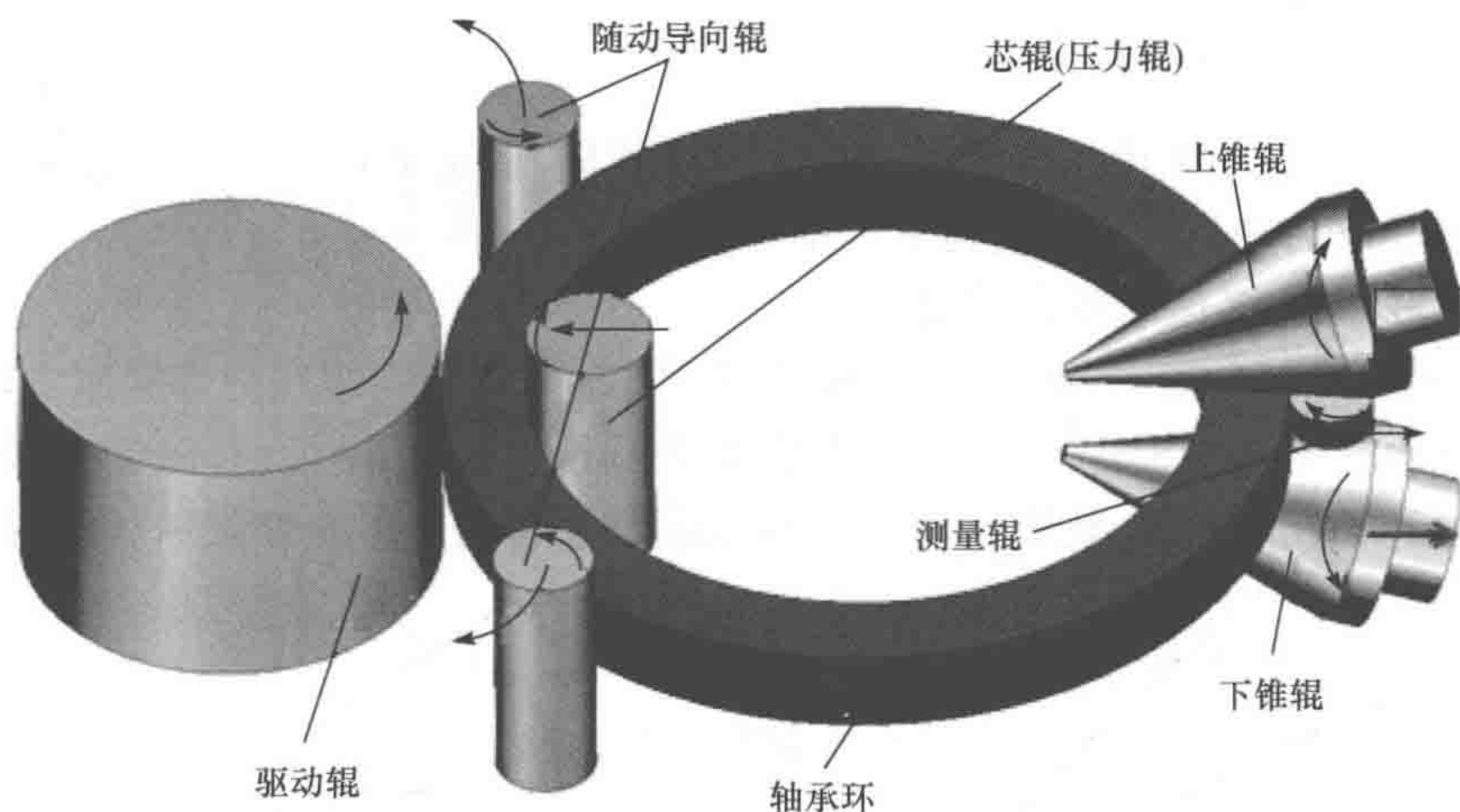


图 1.4 轴承径-轴向轧制成形原理图

1.3 轴承轧制技术特点

1.3.1 轴承轧制技术效果

由于轴承轧制技术利用轧环连续局部成形特点,因此与传统锻造整体成形相比,具有以下技术优点。

1) 工作载荷小、设备吨位小、能耗低

轴承轧制是局部加载变形,工作载荷小,与锻造设备相比,轧制设备吨位小,工作能耗显著降低。

2) 成形精度高、加工余量小、材料利用率高

轴承冷轧径向尺寸精度可控制在 0.1% 以内,甚至可以达到精车精度;轴承热轧径向尺寸精度可控制在 0.5% 以内,与模锻精度相当。轴承轧制时,制坯冲孔连皮少、无飞边材料消耗,机加工余量小,材料利用率大幅提高。

3) 成形质量好

轧制成形轴承环组织致密、晶粒细匀、纤维流线沿滚道连续分布,力学性能得到有效提升,从而提高轴承疲劳寿命。

4) 生产效率高

轴承轧制为连续成形,径向轧制周期一般为 10s 左右,生产率最高可达到 1000 件/小时。

5) 自动化程度高、工作环境好

轴承轧制过程容易实现自动化,可与制坯、热处理等前后工序组成自动化生产线,降低人工劳动强度,而且在轧制过程中没有明显的冲击与噪声。

1.3.2 轴承轧制技术复杂性

虽然轴承轧制相比传统锻造的技术优势明显,但是其技术复杂程度也相对较高,主要是因为轴承轧制具有以下变形特点。

1) 多参数、多运动耦合作用

在轴承轧制过程中,进给速度、转速、压力及力矩、导向辊压力等轧制参数耦合作用,轧辊同时产生旋转运动、直线进给运动和导向运动,使轴承环产生旋转运动和扩径运动,轧制参数、轧辊运动和轴承环运动之间相互影响和制约,作用规律十分复杂。

2) 轧制变形条件动态变化

轧制过程中轴承环变形区几何边界复杂且不稳定,导致变形的热、力条件动态变化。

3) 轴承环几何、运动状态变化剧烈

大型轴承环轧制过程中的尺寸和转速变化可达十倍以上,给轧制过程的稳定性和组织均匀性控制带来了很大难度。

由于上述特点,轴承轧制变形表现出几何、物理、材料多重非线性特点,受到静力学、运动学和动力学因素的耦合影响,具有高度复杂性。在实际生产中,通常需要根据轧制条件合理地设计坯、孔型和轧制参数,才能轧制成形合格的轴承环,否则容易产生各种轧制缺陷,因此也对工艺设计和生产操作人员提出更高的要求。

参 考 文 献

- [1] 何家群. 中国战略性新兴产业研究与发展——轴承[M]. 北京:机械工业出版社,2012.
- [2] 闻邦椿. 机械设计手册单行本:轴承[M]. 北京:机械工业出版社,2015.
- [3] Harris TA, Kotzalas M N. 滚动轴承分析(第5版)第1卷:轴承技术的基本概念[M]. 罗继伟,马伟,译. 北京:机械工业出版社,2015.
- [4] 夏新涛,马伟,颀谭成. 滚动轴承制造工艺学[M]. 北京:机械工业出版社,2007.
- [5] 胡正寰,华林. 零件轧制成形技术[M]. 北京:化学工业出版社,2010.
- [6] 王国栋. 轧制技术的创新与发展——东北大学 RAL 研究成果汇编[M]. 北京:冶金工业出版社,2015.
- [7] Johnson W, Needham G. Experiments on ring rolling[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1968, 10(2): 95-113.
- [8] 华林,黄兴高,朱春东. 环件轧制理论和技术[M]. 北京:机械工业出版社,2001.
- [9] 华林,钱东升. 轴承环轧制成形理论和技术[J]. 机械工程学报, 2014, 50(16): 70-76.

第2章 轴承径向轧制理论

本章以轴承径向轧制为对象,系统地介绍轴承径向轧制条件、力能计算方法、变形规律、工艺条件影响规律和工艺设计规划方法。该部分内容是轴承径向轧制技术的重要理论基础。

2.1 轴承径向轧制条件

在轴承径向轧制中,轴承环需要连续咬入轧制孔型产生旋转运动,而且需要被塑性区穿透径向壁厚而产生直径扩大变形,同时需要始终保持整体刚度,才能保障轧制过程顺利进行。因此,轴承环咬入孔型、塑性锻透和刚性稳定是实现径向轧制变形的基本条件。对轴承环咬入孔型、塑性锻透和刚性稳定情况进行研究分析,建立轴承径向轧制条件是轴承径向轧制工艺设计的重要理论依据^[1]。

2.1.1 径向轧制咬入孔型条件

1. 咬入孔型力学模型

轴承环能够连续咬入轧制孔型产生旋转运动,是建立轧制变形的必要条件。如果轴承环不能顺利咬入孔型,则会与芯辊一起处于静止状态,而驱动辊相对于轴承环作滑动转动,轴承环无法产生正常的轧制变形^[2]。

轴承环稳定轧制变形过程中的进给速度和旋转轧制速度变化较小,可近似认为轴承环在轧制孔型中处于静力平衡状态,根据轴承环与轧制孔型之间作用力关系,可建立如图2.1所示的咬入孔型力学模型进行分析。

在图2.1中, P_1 和 T_1 分别为驱动辊对轴承环的正压力和摩擦力; P_2 为芯辊对轴承环的正压力,由于芯辊为空转辊不承受摩擦力矩,因此不考虑其对轴承环摩擦力; α_1 和 α_2 分别为驱动辊和芯辊与轴承环的接触角; R_1 和 R_2 分别为驱动辊和芯辊与轴承环接触面的半径,即驱动辊和芯辊工作半径; R_t 和 r_t 分别为轴承环在轧制过程 t 时刻的瞬时外半径和内半径; H_{0t} 和 H_t 分别为轴承环 t 时刻在孔型入口处和出口处的瞬时壁厚; n_1 为驱动辊转速; L 为轴承环与轧辊接触弧长在进给方向的投影长度,近似认为轧辊对轴承环作用力的合力作用点位于接触弧的中点。

2. 咬入孔型条件

基于咬入孔型力学模型的分析可知,轴承环咬入轧制孔型需满足:轴承环所受

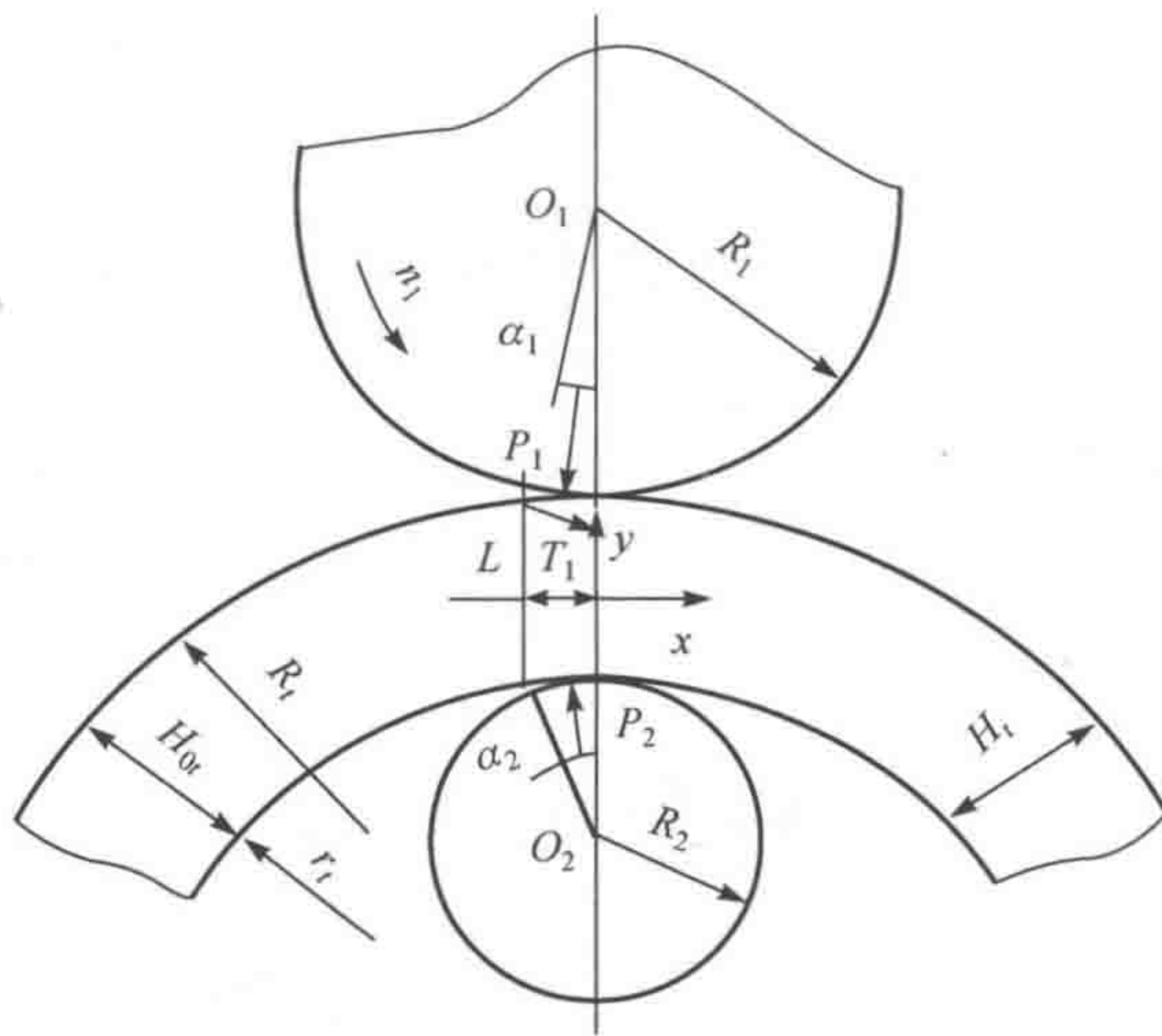


图 2.1 径向轧制咬入孔型力学模型

的拽入力不小于其所受的推出力；轴承环沿进给方向受力平衡。由此可得下式，即

$$T_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - P_1 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - P_2 \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \geq 0 \quad (2.1)$$

$$T_1 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - P_1 \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - P_2 \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = 0 \quad (2.2)$$

将式(2.1)乘以 $\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$ 、式(2.2)乘以 $\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$ ，然后两式相加，可得下式，即

$$\frac{T_1}{P_1} \geq \tan\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \quad (2.3)$$

假设轴承环与轧辊之间的摩擦符合库仑摩擦，记两者间的摩擦系数为 μ 、摩擦角为 β ， $\beta = \arctan \mu$ ，则式(2.3)可以变换为

$$\beta \geq \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad (2.4)$$

由于接触角 α_1 和 α_2 很小，可近似认为接触弧长在进给方向的投影长度 L 与接触弧长相等，因此有

$$\alpha_1 \approx \frac{L}{R_1}, \quad \alpha_2 \approx \frac{L}{R_2} \quad (2.5)$$

把式(2.5)代入式(2.4)可得下式，即

$$\beta \geq \frac{(R_1 + R_2)L}{2R_1 R_2} \quad (2.6)$$

由于轧制过程中，芯辊与驱动辊直径相差明显，且分别从轴承环内、外表面进行轧制，因此两辊对轴承环内、外表面的进给量不相等，两者之和即为轴承环轧制