

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(试卷分册·数学一)

主编: 张宇

副主编: 高昆轮

AUTHENTIC
EXAMINATION
PAPERS
WITH ANSWERS
□ Mr. Zhang

2017



图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 试卷分册. 数学一 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2016.4

ISBN 978—7—5682—2167—2

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 078119 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 7.5

字 数 / 187 千字

版 次 / 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 62.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 边心超

【编者注】1987 年到 1996 年的数学试卷 I, II 均为现在的数学一.

1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)与两直线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t \end{cases}$$

及

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$$

都平行,且过原点的平面方程为_____.

P66,2 题

(2)当 $x=$ _____时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

P32,32 题

(3)由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是_____.

P62,38 题

(4)设 L 为取正向的圆 $x^2+y^2=9$,则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是_____.

P104,30 题

(5)已知三维线性空间的一组基为

$$\alpha_1=(1,1,0), \alpha_2=(1,0,1), \alpha_3=(0,1,1),$$

则向量 $\alpha=(2,0,0)$ 在上述基底下的坐标是_____.

P202,20 题

二、(本题满分 8 分)

求正常数 a 与 b ,使等式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 1$ 成立.

P12,26 题

三、(本题满分 7 分)

(1)(本题满分 3 分)设 f, g 为连续可微函数, $u=f(x, xy), v=g(x+xy)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$.

P73,5 题

(2)(本题满分 4 分)设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$,其中 $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,求矩阵 B .

P188,17 题

四、(本题满分 8 分)

求微分方程 $y''' + 6y'' + (9+a^2)y' = 1$ 的通解,其中常数 $a > 0$.

P161,15 题

五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分)

(1)设常数 $k > 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

P135,1 题

(A)发散.

(B)绝对收敛.

(C)条件收敛.

(D)敛散性与 k 值有关.

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I = t \int_0^{\frac{t}{s}} f(tx) dx$,其中 $s > 0, t > 0$,则 I 的值

P60,29 题

(A)依赖于 s 和 t .

(B)依赖于 s, t, x .

(C)依赖于 t 和 x ,不依赖于 s .

(D)依赖于 s ,不依赖于 t .

(3)设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = -1$,则在 $x=a$ 处

P32,33 题

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a) \neq 0$.

(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.

(D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4)设 A 为 n 阶方阵,且 $|A| = a \neq 0$,而 A^* 是 A 的伴随矩阵,则 $|A^*| =$

P185,10 题

(A) a .

(B) $\frac{1}{a}$.

(C) a^{n-1} .

(D) a^n .

六、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^{n-1}$ 的收敛域,并求其和函数.

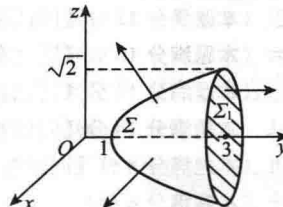
P141,20 题

七、(本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x(8y+1)dydz + 2(1-y^2)dzdx - 4yzdxdy,$$

其中 Σ 是曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{y-1}, \\ x=0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面,它的法向量与 y



轴正向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$ (如图).

P121,62 题

八、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 x ,函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x) \neq 1$. 证明:在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x ,使 $f(x)=x$.

P41,59 题

九、(本题满分 8 分)

问 a, b 为何值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解?无解?有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

P208,5 题

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1)设在一次试验中 A 发生的概率为 p ,现进行 n 次独立试验,则 A 至少发生一次的概率为_____;而事件 A 至多发生一次的概率为_____.

P259,18 题

(2)三个箱子,第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球,第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球,第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子,再从这个箱子中取出 1 个球,这个球为白球的概率等于_____. 已知取出的球是白球,此球属于第二个箱子的概率为_____.

P255,4 题

(3)已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}$. 则 $EX =$ _____, $DX =$ _____.

P289,1 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X, Y 相互独立,其概率密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

P283, 18 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

(1)(本题满分 6 分) 计算定积分 $\int_{-2}^2 (|x|+x)e^{-|x|} dx$.

P55, 14 题

(2)(本题满分 8 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 7 分)

设 $z=f(u, x, y)$, $u=xe^y$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P73, 6 题

四、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 12 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

十、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 试证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

P223, 1 题

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $x-y+z=0$. (2) $-\frac{1}{\ln 2}$. (3) $\frac{3}{2}$. (4) -18π . (5) $(1, 1, -1)$.

二、 $a=4, b=1$.

三、(1) $(1+y)g' \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial w} \right)$. (2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

四、 $y=Y+y^*=C_1+e^{-3x}(C_2 \cos ax+C_3 \sin ax)+\frac{x}{9+a^2}$.

五、选择题

(1)(C). (2)(D). (3)(B). (4)(C).

六、收敛域为 $[-2, 2)$, $S(x)=x \ln \frac{2}{2-x}$, $x \in [-2, 2)$. 七、 34π . 八、略.

九、① 当 $a \neq 1$ 时, 有唯一解; ② 当 $a=1$ 时, (i) 当 $b \neq -1$ 时, 无解; (ii) 当 $b=-1$ 时, 有无穷多组解, 通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意常数.}$$

十、填空题

(1) $1-(1-p)^n$; $(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$. (2) $\frac{53}{120}, \frac{20}{53}$. (3) $1; \frac{1}{2}$.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0 < z \leq 2, \\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z > 2. \end{cases}$$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、(1) $2-\frac{6}{e^2}$. (2) 略. 三、 $f_{uu}'' \cdot xe^{2y} + f_{uv}'' e^y + f_u' \cdot e^y + f_{vu}'' xe^y + f_{vv}''$.

四、略. 五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略. 十、略.

1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名 _____ 分数 _____

(试卷 I)

一、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

P139, 12 题

(2) 已知

$$f(x) = e^x, f[\varphi(x)] = 1-x, \text{ 且 } \varphi(x) \geq 0,$$

求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

P4, 1 题

(3) 设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分

$$I = \oiint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy.$$

P121, 63 题

二、填空题(本题共 4 小题, 每小题 3 分, 满分 12 分)

(1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2tx}$, 则 $f'(t) =$ _____.

P27, 14 题

(2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 _____.

P153, 44 题

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^2-1} f(t) dt = x$, 则 $f(7) =$ _____.

P60, 30 题

(4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知 $|A| = 4, |B| = 1$, 则行列式 $|A+B| =$ _____.

P176, 6 题

三、选择题(本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处的微分 dy 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小.

(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

(2) 设 $y=f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 且 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处

(A) 取得极大值.

(B) 取得极小值.

(C) 某邻域内单调增加.

(D) 某邻域内单调减少.

(3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$ 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则

(A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv.$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv.$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv.$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv.$

P22, 1 题

P33, 34 题

P93, 1 题

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处

(A) 条件收敛.

(B) 绝对收敛.

(C) 发散.

(D) 敛散性不能确定.

P139, 13 题

(5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ ($3 \leq s \leq n$) 线性无关的充分必要条件是

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_s$, 使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \neq 0$.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

P195, 1 题

四、(本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

P73, 7 题

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且其图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y=y(x)$.

P165, 32 题

六、(本题满分 9 分)

设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

P129, 86 题

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$, 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A 及 A^5 .

P181, 1 题

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似.

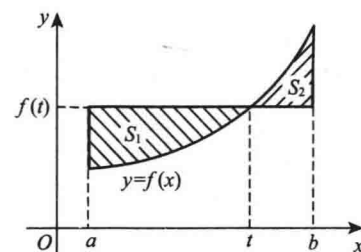
(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .

P228, 10 题

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi), x=a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi), x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍 (如图).

P42, 60 题



十、填空题(本题共 3 小题, 每小题 2 分, 满分 6 分)

(1) 设三次独立试验中, 事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则事件 A 在一次试验中出现的概率为 _____.

P259, 19 题

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为 _____.

P254, 1 题

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布. 已知

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Phi(2.5) = 0.9938,$$

则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为_____.

P265, 7 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

P269, 21 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 12 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四题】

(2) 计算二次积分

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy.$$

P95, 5 题

(3) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使 π 过已知直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

P87, 45 题

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、(1) $[0, 6)$. (2) $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0$. (3) $\frac{12}{5}\pi$.

二、填空题

(1) $(1+2t)e^{2t}$. (2) $\frac{3}{2}$. (3) $\frac{1}{12}$. (4) 40.

三、选择题

(1) (B). (2) (A). (3) (C). (4) (B). (5) (D).

四、0. 五、 $y = (1-2x)e^x$. 六、 $W = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

七、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A^5 = A$. 八、(1) $x=0, y=1$; (2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 九、略.

十、填空题

(1) $\frac{1}{3}$. (2) $\frac{17}{25}$ (或 0.68). (3) 0.9876.

十一、 $f_Y(y) = \frac{3}{\pi} \frac{(1-y)^2}{1+(1-y)^6}$.

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1) 略. (2) $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$. (3) $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名 _____ 分数 _____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 已知 $f'(3)=2$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h)-f(3)}{2h} =$ _____ . P22, 2 题(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$, 则 $f(x) =$ _____ . P50, 1 题(3) 设平面曲线 L 为下半圆 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____ . P103, 27 题

(4) 向量场

$$u(x, y, z) = xy^2 i + ye^z j + x \ln(1+z^2) k$$

在点 $P(1, 1, 0)$ 处的散度 $\operatorname{div} u =$ _____ . P128, 81 题

(5) 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则逆矩阵 $(A - 2E)^{-1} =$ _____ . P182, 3 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = x \sin \frac{1}{x}$

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.

(2) 已知曲面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x + 2y + z - 1 = 0$, 则点 P 的坐标是(A) $(1, -1, 2)$.(B) $(-1, 1, 2)$.(C) $(1, 1, 2)$.(D) $(-1, -1, 2)$.(3) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该非齐次方程的通解是(A) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$.(B) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$.(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$.(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$.

(4) 设函数

$$f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 1, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty,$$

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n=1, 2, 3, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2}) =$ (A) $-\frac{1}{2}$.(B) $-\frac{1}{4}$.(C) $\frac{1}{4}$.(D) $\frac{1}{2}$.(5) 设 A 是 4 阶矩阵, 且 $|A|=0$, 则 A 中

(A) 必有一列元素全为 0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $z = f(2x-y) + g(x, xy)$, 其中函数 $f(t)$ 二阶可导, $g(u, v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. P73, 8 题(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 且 $\varphi(0) = 0$. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 的值. P105, 31 题(3) 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x+z) dv$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域. P101, 22 题

四、(本题满分 6 分)

将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数. P148, 32 题

五、(本题满分 7 分)

设 $f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $f(x)$. P165, 30 题

六、(本题满分 7 分)

证明: 方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个不同实根. P42, 61 题

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = \lambda, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda + 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

有解, 并求出解的一般形式. P208, 6 题

八、(本题满分 8 分)

设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值, 证明:(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值; (2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值. P224, 2 题

九、(本题满分 9 分)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 上, 问当 R 取何值时, 球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大? P129, 85 题

十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A) = 0.5$, 随机事件 B 的概率 $P(B) = 0.6$ 及条件概率 $P(B|A) = 0.8$, 则和事件 $A \cup B$ 的概率 $P(A \cup B) =$ _____. P256, 5 题

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5, 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为 _____. P260, 20 题

(3) 设随机变量 ξ 在区间 $(1, 6)$ 上服从均匀分布, 则方程 $x^2 + \xi x + 1 = 0$ 有实根的概率是 _____. P265, 8 题

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, 且 X 服从均值为 1, 标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布, 而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z = 2X - Y + 3$ 的概率密度函数. P283, 19 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四、(1)题】

(2)求八分之一的球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

的边界曲线的重心,设曲线的线密度 $\rho=1$.

P130,87 题

(3)设空间区域 Ω 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成,其中 a 为正常数. 记 Ω 表面的外侧为 S , Ω 的体积为 V . 证明:

$$\oiint_S x^2 y z^2 dy dz - x y^2 z^2 dz dx + z(1 + x y z) dx dy = V.$$

P122,64 题

五、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同试卷 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、填空题

$$(1)-1. \quad (2)x-1. \quad (3)\pi. \quad (4)2. \quad (5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

二、选择题

(1)(A). (2)(C). (3)(D). (4)(B). (5)(C).

三、(1) $-2f'' + xg_w + xyg_w + g_v$. (2) $\frac{1}{2}$. (3) $\frac{\pi}{8}$.

四、 $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $(-1 \leq x < 1)$. 五、 $\frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$. 六、略.

七、 $\lambda=1$ 时,方程组有解;解为 $\begin{cases} x_1=1-x_3, \\ x_2=-1+2x_3, \end{cases}$ 其中 x_3 取任意常数.

八、略. 九、 $\frac{4}{3}a$.

十、填空题

(1)0.7. (2)0.75. (3) $\frac{4}{5}$.

十一、 $\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1)略. (2) $(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$. (3)略.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线

$$\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 3t - 4, \\ z = t - 1 \end{cases}$$

垂直的平面方程是_____.

P67,3 题

(2)设 a 是非零常数,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x =$ _____.

P7,8 题

(3)设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.

P4,2 题

(4)积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y} dy$ 的值等于_____.

P95,6 题

(5)已知向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 3, 4), \alpha_2 = (2, 3, 4, 5), \alpha_3 = (3, 4, 5, 6), \alpha_4 = (4, 5, 6, 7),$$

则该向量组的秩是_____.

P202,19 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1)设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x) = \int_x^{e^x} f(t) dt$,则 $F'(x)$ 等于

P60,31 题

(A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.

(B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$.

(D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$.

(2)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x) = [f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时, $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为

P30,24 题

(A) $n! [f(x)]^{n+1}$.

(B) $n! [f(x)]^{n+1}$.

(C) $[f(x)]^{2n}$.

(D) $n! [f(x)]^{2n}$.

(3)设 α 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

P136,2 题

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 敛散性与 α 取值有关.

(4)已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$,则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

P33,35 题

(A) 不可导.

(B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 取得极大值.

(D) 取得极小值.

(5)已知 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解, α_1, α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系, k_1, k_2 为任意常数,则方程组 $AX=b$ 的通解(一般解)是

P216,17 题

(A) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(B) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

(C) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$.

(D) $k_1 \alpha_1 + k_2 (\beta_1 - \beta_2) + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1)求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

P55,15 题

(2)设 $z = f(2x-y, y \sin x)$, 其中 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P73,9 题

(3)求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$ 的通解(一般解).

P161,16 题

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

P142,21 题

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} yz dx dz + 2 dx dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 外侧在 $z \geq 0$ 的部分.

P122,65 题

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,在开区间 (a, b) 内可导,且 $f(a) = f(b)$,证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使得 $f'(\xi) > 0$.

P44,66 题

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

且矩阵 A 满足关系式 $A(E - C^{-1}B)^T C^T = E$, 其中 E 为四阶单位矩阵, C^{-1} 表示 C 的逆矩阵, C^T 表示 C 的转置矩阵,将上述关系式化简并求矩阵 A .

P188,18 题

八、(本题满分 8 分)

求一个正交变换化二次型

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

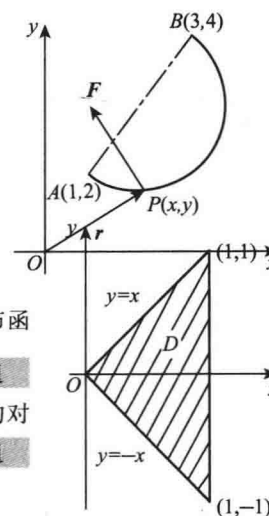
P240,1 题

成标准形.

九、(本题满分 8 分)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 F 作用(如图), F 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP ,且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 F 对质点 P 所作的功.

P130,88 题



十、填空题(本题共 3 小题,每小题 2 分,满分 6 分)

(1)已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$,则 X 的概率分布函数 $F(x) =$ _____.

P264,4 题

(2)设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\bar{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\bar{B}$ 的概率 $P(A\bar{B}) =$ _____.

P256,6 题

(3) 已知随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布, 且随机变量 $Z=3X-2$, 则 $EZ=$ _____.

P290, 2 题

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ (如图) 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 DZ .

P293, 10 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四、(1)题】

(2) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 满足条件 $y|_{x=e} = 1$ 的特解.

P156, 1 题

(3) 过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形, 求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

P63, 39 题

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $x-3y-z+4=0$. (2) e^{2a} . (3) 1. (4) $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$. (5) 2.

二、选择题

(2)(A). (2)(A). (3)(C). (4)(D). (5)(B).

三、(1) $\frac{1}{3} \ln 2$. (2) $-2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2 \sin x - y \cos x) \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + y \sin x \cos x \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \cos x \frac{\partial f}{\partial v}$.

(3) $(C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$.

四、收敛域是 $(-1, 1)$; $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$, $-1 < x < 1$.

五、 12π . 六、略.

七、 $A(C-B)^T = E, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

八、在正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 下, 二次型为 $f = 9y_3^2$.

九、 $2(\pi-1)$.

十、填空题

(1) $\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$ (2) 0.3. (3) 4.

十一、 $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}, D(Z) = \frac{2}{9}$.

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1) 略. (2) $\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x} \right)$. (3) $\frac{\pi}{6}$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=\cos t, \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____.

P28,19 题

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz =$ _____.

P76,22 题

(3) 已知两条直线

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}, L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1},$$

则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是_____.

P67,4 题

(4) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ _____.

P16,35 题

(5) 设 4 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的逆矩阵 $A^{-1} =$ _____.

P183,4 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 曲线 $y = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

(A) 没有渐近线.

(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

P37,47 题

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2,$$

则 $f(x)$ 等于

(A) $e^x \ln 2$.

(B) $e^{2x} \ln 2$.

(C) $e^x + \ln 2$.

(D) $e^{2x} + \ln 2$.

P165,31 题

(3) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于

(A) 3.

(B) 7.

(C) 8.

(D) 9.

P146,28 题

(4) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则

$\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy$ 等于

(A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$.

(B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$.

P93,2 题

(C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$.

(D) 0.

(5) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位阵, 则必有

(A) $ACB = E$.

(B) $CBA = E$.

(C) $BAC = E$.

(D) $BCA = E$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow +0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{x}{x+1}}$.

P7,9 题

(2) 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{\sqrt{6x^2 + 8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数.

P90,55 题

(3) 求 $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z) dv$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z = 4$ 所围成的立体.

P101,23 题

四、(本题满分 6 分)

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3) dx + (2x+y) dy$ 的值最小.

P105,32 题

五、(本题满分 8 分)

将函数 $f(x) = 2 + |x| (-1 \leq x \leq 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

P153,46 题

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, 且 $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$. 证明: 在 $(0,1)$ 内存在一点 c , 使 $f'(c) = 0$.

P44,67 题

七、(本题满分 8 分)

已知 $\alpha_1 = (1,0,2,3)$, $\alpha_2 = (1,1,3,5)$, $\alpha_3 = (1,-1,a+2,1)$, $\alpha_4 = (1,2,4,a+8)$ 及 $\beta = (1,1,b+3,5)$.

(1) a, b 为何值时, β 不能表示成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的线性组合?

(2) a, b 为何值时, β 有 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

P200,15 题

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 n 阶正定阵, E 是 n 阶单位阵, 证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

P249,16 题

九、(本题满分 8 分)

在上半平面求一条向上凹的曲线, 其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点), 且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

P165,33 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 设随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

P265,9 题

(2) 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点, 点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比. 则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为_____.

P254,2 题

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

P284,20 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题,每小题 6 分,满分 18 分)

(1) 求 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}}$.

P57,24 题

(2) 计算 $I = \iint_S -ydzdx + (z+1)dxdy$, 其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

P122,66 题

(3)【同试卷 I 第四题】

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第九题】

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $\frac{\sin t - t \cos t}{4t^3}$. (2) $dx - \sqrt{2}dy$. (3) $x - 3y + z + 2 = 0$. (4) $-\frac{3}{2}$. (5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

二、选择题

(1)(D). (2)(B). (3)(C). (4)(A). (5)(D).

三、(1) $e^{-\frac{\pi}{2}}$. (2) $\frac{11}{7}$. (3) $\frac{256}{3}\pi$.

四、 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

五、 $2 + |x| = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$, $x \in [-1, 1]$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. 六、略.

七、(1) $a = -1, b \neq 0$. (2) $a \neq -1, \beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+1}\alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4$.

八、略. 九、 $y = \frac{1}{2}(e^{x-1} + e^{-(x-1)})$.

十、填空题

(1) 0, 2. (2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$.

十一、 $F_z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - e^{-z} - ze^{-z}, & z > 0. \end{cases}$

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略. 四、(1) $\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$. (2) -8π . (3) 略.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos xy=0$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}=\underline{\hspace{2cm}}$. P27,15 题

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\text{grad } u|_M=\underline{\hspace{2cm}}$. P90,56 题

(3) 设

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$$

则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于_____.

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=\underline{\hspace{2cm}}$. P154,47 题

(5) 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0 (i=1,2,\dots,n)$, 则矩阵 A 的秩 $r(A)=\underline{\hspace{2cm}}$. P157,2 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 当 $x \rightarrow 1$ 时,函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2. (B) 等于 0. (C) 为 ∞ . (D) 不存在但不为 ∞ . P7,6 题

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\alpha}{n}\right)$ (常数 $\alpha > 0$)

(A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 α 有关. P136,3 题

(3) 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线

(A) 只有 1 条. (B) 只有 2 条. (C) 至少有 3 条. (D) 不存在. P87,44 题

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$, 则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. P22,3 题

(5) 要使 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解,只要系数矩阵 A 为

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. P190,23 题

$$(C) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}.$ P7,10 题

(2) 设 $z=f(e^x \sin y, x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$ P73,10 题

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)dx.$ P55,16 题

四、(本题满分 6 分)

求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解. P161,17 题

五、(本题满分 8 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2)dydz + (y^3 + ax^2)dzdx + (z^3 + ay^2)dx dy,$$

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. P123,67 题

六、(本题满分 7 分)

设 $f''(x) < 0, f(0)=0$, 证明: 对任何 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 有

$$f(x_1+x_2) < f(x_1) + f(x_2).$$

P38,52 题

七、(本题满分 8 分)

在变力 $F=yzi+zxj+xyk$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭圆面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$, 问 ξ, η, ζ 取何值时,力 F 所作的功 W 最大? 并求出 W 的最大值. P131,89 题

八、(本题满分 7 分)

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关,向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关,问:

(1) α_1 能否由 α_2, α_3 线性表出? 证明你的结论.

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论. P200,16 题

九、(本题满分 7 分)

设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, 对应的特征向量依次为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

又向量 $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(1) 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表出;

(2) 求 $A^n \beta$ (n 为自然数). P233,20 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 已知

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6},$$

则事件 A, B, C 全不发生的概率为_____.

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 $E(X + e^{-2X}) =$ _____.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, Y 服从 $[-\pi, \pi]$ 上的均匀分布, 求 $Z = X + Y$ 的概率分布密度

(计算结果用标准正态分布函数 Φ 表示, 其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$).

P256, 7 题

P290, 3 题

P284, 21 题

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分)

(1)【同试卷 I 第三、(1)题】

(2)【同试卷 I 第三、(2)题】

(3) 设 A, B 为 3 阶矩阵, I 为三阶单位阵, 满足 $AB + I = A^2 + B$, 又知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求矩阵 B .

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1)【同试卷 I 第四、(1)题】

(2) 求 $\frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - t) f(t) dt$, 其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

(3) 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx$.

五、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第九题】

P188, 19 题

P60, 32 题

P95, 7 题

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $\frac{y \sin xy - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \sin xy}$. (2) $\left\{ \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9} \right\}$. (3) $\frac{1}{2} \pi^2$. (4) $(x+c) \cos x$. (5) 1.

二、选择题

(1) (D). (2) (C). (3) (B). (4) (C). (5) (A).

三、(1) 1. (2) $f''_{11} e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x (y \sin y + x \cos y) f''_{12} + 4xy f''_{22} + f'_1 e^x \cos y$. (3) $\frac{7}{3} - \frac{1}{e}$.

四、 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{4} x e^{-3x}$.

五、 $\frac{29}{20} \pi a^5$.

六、略.

七、 $\xi = \frac{a}{\sqrt{3}}, \eta = \frac{b}{\sqrt{3}}, \zeta = \frac{c}{\sqrt{3}}; W_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{9} abc$.

八、(1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表出. 证明略. (2) α_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出. 证明略.

九、(1) $\beta = 2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3$. (2) $A^n \beta = \begin{pmatrix} 2 - 2^{n+1} + 3^n \\ 2 - 2^{n+2} + 3^{n+1} \\ 2 - 2^{n+3} + 3^{n+2} \end{pmatrix}$.

十、填空题

(1) $\frac{7}{12}$. (2) $\frac{4}{3}$.

十一、 $f_z(z) = \frac{1}{2\pi} \left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right) \right]$.

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略.

三、(1) 略. (2) 略. (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

四、(1) 略. (2) $2x \int_0^x f(t) dt$. (3) $\frac{3}{8} e - \frac{1}{2} \sqrt{e}$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 函数 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{t}\right) dt (x > 0)$ 的单调减少区间为_____.

P33, 36 题

(2) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12, \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为_____.

P88, 47 题

(3) 设函数 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x < \pi)$ 的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为_____.

P154, 48 题

(4) 设数量场 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$ _____.

P128, 82 题

(5) 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $AX=0$ 的通解为_____.

P217, 18 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt, g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

P17, 36 题

- (A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价的无穷小.
(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.

(2) 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为

P63, 40 题

- (A) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta.$ (B) $4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta.$
(C) $2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\theta} d\theta.$ (D) $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2 d\theta.$

(3) 设有直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 与 $L_2: \begin{cases} x-y=6, \\ 2y+z=3, \end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为

P68, 7 题

- (A) $\frac{\pi}{6}.$ (B) $\frac{\pi}{4}.$ (C) $\frac{\pi}{3}.$ (D) $\frac{\pi}{2}.$

(4) 设曲线积分

$$\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$$

与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于

- (A) $\frac{e^{-x} - e^x}{2}.$ (B) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}.$ (C) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1.$ (D) $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$

(5) 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ=O$, 则

P190, 24 题

(A) $t=6$ 时 P 的秩必为 1.

(B) $t=6$ 时 P 的秩必为 2.

(C) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 1.

(D) $t \neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x.$

P8, 11 题

(2) 求 $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$

P52, 8 题

(3) 求微分方程 $x^2 y' + xy = y^2$ 满足初值条件 $y(1) = 1$ 的特解.

P157, 3 题

四、(本题满分 6 分)

计算 $\iiint_{\Sigma} 2xz dydz + yz dzdx - z^2 dx dy$, 其中 Σ 是由曲面

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 与 } z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

所围立体的表面外侧.

P123, 68 题

五、(本题满分 6 分)

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 的和.

P146, 29 题

六、(本题共 2 小题,每小题 5 分,满分 10 分)

(1) 设在 $[0, +\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f'(x) \geq k > 0, f(0) < 0$. 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个零点.

(2) 设 $b > a > e$, 证明 $a^b > b^a$.

P42, 62 题

七、(本题满分 8 分)

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3 (a > 0),$$

通过正交变换化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$, 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

P241, 2 题

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 其中 $n < m$, E 是 n 阶单位矩阵. 若 $AB = E$, 证明 B 的列向量组线性无关.

P195, 3 题

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0, 1)$ 出发, 以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1, 0)$ 与 A 同时出发, 其速度大小为 $2v$, 方向始终指向 A . 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程, 并写出初值条件.

P168, 39 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 一批产品有 10 个正品和 2 个次品, 任意抽取两次, 每次抽一个, 抽出后不再放回, 则第二次抽出的是次品的概率为_____.

P256, 8 题

(2) 设随机变量 X 服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0, 4)$ 内的概率密度函数 $f_Y(y) =$ _____.

P269, 22 题

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$.

P281, 16 题

(1) 求 X 的数学期望 EX 和方差 DX ;

- (2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?
 (3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

(试卷 II)

一、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第一题】

二、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第二题】

三、(本题满分 15 分)【同试卷 I 第三题】

四、(本题共 3 小题, 每小题 6 分, 满分 18 分)

(1) 设 $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2)【同试卷 I 第四题】

(3) 已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个基为

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

与

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵 P .

五、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第五题】

六、(本题满分 10 分)【同试卷 I 第六题】

七、(本题满分 8 分)【同试卷 I 第七题】

八、(本题满分 6 分)【同试卷 I 第八题】

九、(本题满分 7 分)【同试卷 I 第九题】

P73, 11 题

P202, 21 题

答案速查(试卷 I)

一、填空题

(1) $(0, \frac{1}{4})$. (2) $\{0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\}$. (3) $\frac{2}{3}\pi$. (4) $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$. (5) $k(1, 1, \dots, 1)^T$.

二、选择题

(1)(B). (2)(A). (3)(C). (4)(B). (5)(C).

三、(1) e^2 . (2) $2x\sqrt{e^x-1} - 4\sqrt{e^x-1} + 4\arctan\sqrt{e^x-1} + C$. (3) $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

四、 $\frac{\pi}{2}$. 五、 $\frac{22}{27}$. 六、略.

七、 $a=2$; 正交变换矩阵 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. 八、略.

九、 $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} = 0$; 初始条件为 $y|_{x=-1} = 0, y'|_{x=-1} = 1$.

十、填空题

(1) $\frac{1}{6}$. (2) $\frac{1}{4\sqrt{y}}$.

十一、(1) $E(X)=0, D(X)=2$; (2) $\text{Cov}(X, |X|)=0$, X 与 $|X|$ 不相关; (3) X 与 $|X|$ 不独立. 证明略.

答案速查(试卷 II)

一、略. 二、略. 三、略.

四、(1) $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 f'_1 + x^2 f'_2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^5 f''_{11} + 2x^3 f''_{12} + x f''_{22}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4x^3 f'_1 + 2x f'_2 + x^4 y f''_{11} - y f''_{22}$.

(2) 略. (3) 过渡矩阵 $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

五、略. 六、略. 七、略. 八、略. 九、略.

1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题

姓名_____ 分数_____

(试卷 I)

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) =$ _____ .

P8,12 题

(2) 曲面 $z = e^x + 2xy = 3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为 _____ .

P88,48 题

(3) 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(2, \frac{1}{\pi})$ 处的值为 _____ .

P74,12 题

(4) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy =$ _____ .

P98,14 题

(5) 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 设 $A = \alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n =$ _____ .

P181,2 题

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^4 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^4 x) dx$, 则有

P50,2 题

- (A) $N < P < M$. (B) $M < P < N$.
(C) $N < M < P$. (D) $P < M < N$.

(2) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ 存在是 $f(x, y)$ 在该点连续的

P71,1 题

- (A) 充分条件而非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

(3) 设常数 $\lambda > 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \lambda}}$

P136,4 题

- (A) 发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 敛散性与 λ 有关.

(4) 设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x})} = 2,$$

其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则必有

P12,27 题

- (A) $b = 4d$. (B) $b = -4d$. (C) $a = 4c$. (D) $a = -4c$.

(5) 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则向量组

P195,4 题

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 线性无关.
(B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.
(C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

(D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$ 线性无关.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)

(1) 设 $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = t \cos t^2 - \int_1^t \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

P28,20 题

(2) 将函数 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$ 展开成 x 的幂级数.

P148,33 题

(3) 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$.

四、(本题满分 6 分)

计算曲面积分 $\iint_S \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及两平面 $z = R, z = -R (R > 0)$ 所围成立体表面(如图)的外侧.

P123,69 题

五、(本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 且

$$[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$$

为一全微分方程, 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

P105,34 题

六、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

P150,37 题

七、(本题满分 6 分)

已知点 A 与点 B 的直角坐标分别为 $(1, 0, 0)$ 与 $(0, 1, 1)$, 线段 AB 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面为 S , 求由 S 及两平面 $z = 0, z = 1$ 所围成的立体体积(如图).

P63,41 题

八、(本题满分 8 分)

设四元齐次线性方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组 (II) 的通解为

$$k_1(0, 1, 1, 0) + k_2(-1, 2, 2, 1).$$

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

P220,24 题

九、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵. 当 $A^* = A^T$ 时, 证明 $|A| \neq 0$.

P179,14 题

十、填空题(本题共 2 小题,每小题 3 分,满分 6 分)

(1) 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\bar{A}\bar{B})$, 且 $P(A) = p$, 则 $P(B) =$ _____ .

P257,9 题

(2) 设相互独立的两个随机变量 X 与 Y 具有同一分布律, 且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

, 则随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律为 _____ .

P273,1 题

十一、(本题满分 6 分)

已知随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 并且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1, 3^2)$ 和 $N(0, 4^2)$, X 与 Y 的相关系数

