高等学校"十三五"规划教材

线性代数

邵建峰　刘　彬　编

化学工业出版社

高等学校“十三五”规划教材

线性代数

邵建峰　刘　彬　编

化学工业出版社
·北京

本书是按照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成的。全书共分七章，主要内容包括行列式、矩阵的基本概念及其运算，矩阵的初等变换与初等矩阵，n 维向量空间，线性方程组解的结构与求解方法，矩阵的特征值与特征向量，以及矩阵的对角化，二次型及其标准化，线性空间与线性变换等。在第二、三章，我们介绍了 MATLAB 软件与编程方法。书后附有课程实验与应用案例附录。

在本书前六章的每一章中专门开辟了一节，介绍本章学科知识的实际应用。相信通过这些案例介绍，将加强不同数学学科之间的内在联系，阐述数学学科知识应用的广泛性。同时，通过这些实际应用性例子的介绍，能够拓展学生的学习思路，增强对线性代数课程的学习兴趣。

在课程实验部分，设计了两个单元的 MATLAB 系列实验与练习。在附录中，给出了几个带有一定综合性的线性代数应用案例并讨论了其建模与编程求解方法。

本书可作为高等院校理工科与经济管理类等专业线性代数课程的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/邵建峰，刘彬编．—北京：化学工业出版社，2017.9

高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-122-30401-8

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①邵…②刘…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 191838 号

责任编辑：唐旭华　郝英华

责任校对：宋　玮　　　　装帧设计：张　辉

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：三河市延风印装有限公司

710mm×1000mm　1/16　印张 17¼　字数 364 千字　2017 年 10 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：35.00 元

前言

线性代数是大学数学教育中一门重要的基础课程，是理工科大学生学科知识结构中的一个重要环节。本书的编写是按照《工科类本科数学基础课程教学基本要求》来实施的。首先考虑到作为高等院校理工科与经济管理类等专业线性代数课程教材，课内学时一般在40学时左右，所以在编写过程中充分考虑到理工科大学生的知识基础要求，内容上以基本概念与基本方法为核心，力求做到重点突出，简明扼要，清晰易懂，便于教学。

目前大学教育的一个重要任务就是对大学生创新思维与应用能力的培养。在计算机与“互联网＋”时代，怎么有效地开展大学教育，尤其数学等基础学科的教育，似乎碰到了一些瓶颈问题：比如高等数学与线性代数等课程的知识有什么作用，尤其是它与当前一些最新的科技发展领域有什么样的联系？这些在数学基础课程教学中通常很难体现。

已有的同类教材中有不少在理论体系的简洁性方面达到了一个非常高的水平，如果缩减课本中的任何内容，其逻辑体系就不完整，甚至影响到读者的理解。同时，从很多教材中我们也很难看到数学与不同学科之间，数学与专业学科之间存在哪些内在的知识联系，更不用说进一步了解该课程具有什么样的实际应用性。

如果对课程知识的新颖性与实用性，对它与其它学科，尤其是与当前最新的科技发展领域的联系无法了解并有所感受，学生对该学科的学习兴趣就会大大降低。所以一本大学教材，特别是数学类的基础课教材，不应局限在以传授本学科的基本理论与方法作为其唯一目的，而应该力求以教材为载体，向学生传授最新的课程内外的知识。新知识的传授更要兼具对学生的创新思维与应用能力的培养。

因此，本书的编写思想和目标是：不仅要包括本学科基础知识，同时也力求包含一定的学科外知识，尤其是应用性的知识；而且能够把教学基本目标与创新思维和应用能力培养“有机地”结合在一起，形成一本有自身特色、对读者有一定启发性、带有新思想与新知识传授的一本教材。然而在本书编写中要去实现这些想法，编者确实也面临了很大的困难。为此在编写过程中，我们至少是从两个方面做出了努力与改革尝试。

第一，介绍学科知识的广泛应用。在某个具体学科中，介绍一两个应用性例子，这往往是易于做到的。但是要介绍该学科中每个概念有什么应用意义与价值，它们与实际问题有什么联系，这对于数学课程来说通常是很难实现的。为了介绍线性代数学科知识的广泛应用性，我们在每一章中专门增加了一节来介绍本章概念与方法的应用。这些应用案例或者是跨学科的，或者是与某些科技应用领域相联系的。

比如在第一章增加了行列式几何意义与应用举例一节。除了介绍二、三阶行列式的几何意义外，还讨论了多项式的结式以及怎么用结式行列式判断多项式方程根

的类型与判别两个多项式是否有重根等问题。本节的探讨中，涉及高等数学学科中的向量运算与导数方程等知识，一定程度上体现了两个学科之间的联系。在第二章矩阵概念应用举例一节，我们介绍了二维图像增强，还讨论了一个空中交通线路问题。图像增强需要运用概率统计中的基本方法，而后者也可以推广到矩阵在图论应用中的一个著名案例，即哥尼斯堡七桥问题。在第三章中介绍了药方配制、种群基因间的距离以及保密通讯中的密码设计问题。在第四章中，介绍了化学方程式配平，电路网络分析与坐标测量。在第五章中探讨了生态系统的变化趋势，一阶常系数线性微分方程组求解与 Fibonacci 数列通项公式推导问题。在第六章则介绍了一类资金使用的优化问题，二次曲线和二次曲面的化简与类型判别，以及二次型在不等式证明与多元多项式因式分解方面应用的例子。

通过这些来自于不同实际领域、不同学科背景下的若干应用案例介绍，我们试图向读者传播这样的思想：首先，不同的数学学科之间有着不可分割的内在联系；其次，数学学科知识的应用是“无处不在”的，其应用的广泛性是毋庸置疑的；同时，希望通过这些实际应用例子的介绍，能够拓展学生的学习思路，增强对线性代数课程的学习兴趣。

在本书编写中我们也参考了一些国内外有影响、优秀的教材。经过比较权衡，最终采用了在每一章中单独增加一节来专门介绍本章知识的应用性这一模式。增加的应用举例一节带有 * 号，表明该节内容不一定要在课堂教学中全部讲解，也可以留作学生课外自学之用。这样既不影响受教学时数限制下的日常教学，同时又能使学生及时地获得学科应用知识与数学思想的渗透。

第二，工程软件应用能力培养。为了把线性代数课程教学与学生能力的培养更紧密地结合起来，增强学生运用数学知识与数学软件的能力，在本书第二、三章，以循序渐进的方式，简要地介绍了工程数学软件 MATLAB 在线性代数运算方面的基本功能与编程实现方法，力求解决大学生中常见的学习、运用软件入门难的问题。

在本书的每一个章节，如果所涉及的线性代数课程中的基本问题用单纯分析方法去解决（手工推导与计算）比较复杂与困难，我们就适时地介绍使用软件编程方法去解决问题的思想。尽力实现课程内容与软件使用方法的“无缝连接”，使学生感受到数学软件不是可有可无，或者只是起到一个锦上添花的作用，而是对传统分析方法必要的扩展与补充。

MATLAB 与很多流行软件一样，入门不易进阶更难。怎样使得学习者能达到软件使用与编程的更高水平，我们在书后增加了“课程实验”部分，不仅是对课程基础知识的巩固与提高，同时也会进一步加强学生运用 MATLAB 编程方法解决实际问题的能力。按照课程内容与问题的难易，实验部分又被分为两个小节，以便获得更好的递进学习效果。

把数学实验的思想引入到数学基础课程教学中，把课程教学、实验教学和应用性教学有机地结合在一起，逐步培养学生应用数学知识、运用计算机方法和使用已有的软件来解决实际问题的能力，这样的教学环节其重要性是毋庸置疑的。

在书后的附录部分，我们进一步给出了几个带有一定的综合性与复杂性的应用案例。在这些案例中，将把数学知识运用、应用性问题系统求解与软件使用的水平推进到一个更高的层次。

本书共分七章，外加课程实验与一个附录。前七章主要介绍了行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间、线性变换的基本概念，以及行列式计算，矩阵运算，线性方程组求解，特征值与特征向量计算和二次型标准化方法等线性代数传统内容。在第二、三章末尾，简要介绍了工程数学软件 MATLAB 的基本功能与编程方法。在前六章的每一章中，专门增加了本章知识的应用案例介绍一节。在实验部分给出了两个单元的上机练习指导；在附录中，我们介绍了几个综合应用案例与 MATLAB 编程求解。对每章配备的习题，以及编程实验部分的自我练习，书后给出了部分习题参考答案或解答。

本书是在原有同名教材基础上的一本新编教材。邵建峰、刘彬、王成、殷翔等参加了原教材的编写，后经多次的再版修订。这次再由邵建峰、刘彬对原教材做了系统和仔细的增删修改与审定工作，尤其在增强教材特色方面做了相当大的改变。施庆生、刘国庆，程浩老师对新版书编写提出了很多建议，石玮、鲁晓磊老师等审阅了部分书稿。本书的出版得到了南京工业大学教务处新教材建设立项支持和化学工业出版社的大力帮助。在此谨对在本书编写与出版过程中给予支持和帮助的有关部门表示感谢！

由于时间仓促和编者水平所限，书中错漏之处难免存在，还望使用本书的老师与学生批评指正。

编者

2017 年 6 月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本工具。在初等数学里已经介绍过二阶、三阶行列式，现在为了研究 n 元线性方程组，需要进一步讨论 n 阶行列式。本章将在二、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义并讨论其性质与计算。作为行列式的初步应用，还将解决一类 n 元方程组的求解问题。最后，讨论行列式知识的有关应用。

第一节　n 阶行列式

在讨论一般 n 阶行列式之前，先简单回顾一下二、三阶行列式。

一、二、三阶行列式

在初等数学中，二、三阶行列式的概念是在线性方程组的求解中提出的。例如，对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用消元法，在两个方程的两边分别同乘以 a_{22} 或 a_{12}，方程成为

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12} \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，两式相减消去变量 x_2 而求得 x_1 的解；同理也可求得 x_2 的解。其一组解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

从二元线性方程组解的形式可以发现，如果引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc \tag{1.3}$$

则式(1.2) 可表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\triangleq\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\triangleq\frac{D_2}{D}$$

其中分母 D 是方程组的系数行列式，而 D_1,D_2 是用方程组右端的常数列分别替换系数行列式的第一列和第二列所得到的行列式。

我们把按照式（1.3）来规定其值的，由 a, b, c, d 四个数构成的两行、两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式。用二阶行列式来表示二元线性方程组的解，其形式确实简洁明了。

【例 1.1】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+4x_2=1 \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$，又用方程组右端的常数列分别替换系数行列式的第一列和第二列，有

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-2, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}$$

类似地，如果在求解三元方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的过程中引入下列三阶行列式的记号，并规定其值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.4}$$

则当三元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

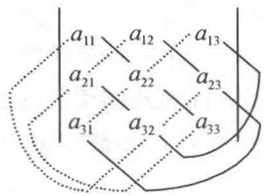
时，用消元法求解这个方程组同样可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_1=\frac{D_2}{D},\ x_1=\frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

式中，$D_j(j=1,2,3)$是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

在式（1.4）中三阶行列式的展开式可以用所谓主、副对角线法则得到



其中每一条实线上的三个元素的乘积带正号，而每一条虚线上的三个元素的乘积带负号。所得六项的代数和就是三阶行列式的值。

【例 1.2】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D=1\times2\times1+1\times(-1)\times1+0\times3\times3-1\times2\times3-1\times3\times1-0\times(-1)\times1=-8$$

但是需要指出的是：主、副对角线法则不易于向一般的 n 阶行列式推广。例如，在下列 4 阶行列式中

$$D=\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$这一项是来自于不同行与不同列的 4 个元素的乘积，但是其中元素 a_{11},a_{22}在主对角线方向上，而 a_{34},a_{43}则在副对角线方向上。该项应该带有什么符号？这用主、副对角线法则就不好确定了。

事实上，二、三阶行列式还有这样一个规律，它们都可以按第一行展开得到行列式的值。例如对三阶行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \tag{1.6}$$

式中，A_{11}, A_{12}, A_{13}分别是第一行元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}的代数余子式

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) \tag{1.7}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$$

这一展开的规律启示我们：对一般的n阶行列式，可以像式(1.6)、式(1.7)那样，用低阶行列式的值去定义高阶行列式的值。这样的定义方式具有内在的一致性。对于用这种方法定义的各阶行列式必然会有许多共同的性质和统一的计算方法。

二、 n 阶行列式

现给出n阶行列式的归纳式定义。

定义 1.1 由$n\times n$个数 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的具有n行n列的式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|a_{ij}|_{n\times n}$$

叫做**n阶行列式**（Determinant），并且规定其值为：

(1) 当$n=1$时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

(2) 当$n\geqslant 2$时，$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$ (1.8)

其中$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3j-1} & a_{3j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

并称M_{1j}为行列式D的元素a_{1j}的**余子式**（Cofactor），A_{1j}为行列式D的元素a_{1j}的**代数余子式**（Algebraic Cofactor）。

由行列式的定义，它的值为n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$的乘积构成的和式，称该和式为**行列式的展开式**。显然其有下面的性质：

性质 n阶行列式D的展开式中有$n!$个项，每项都是来自于行列式的不同行

不同列的 n 个元素的乘积。

证　对该性质不难用归纳法给予证明。

（1）当 $n=1$ 时，结论显然成立；

（2）假设对 $n-1$ 阶行列式结论也成立。则对 n 阶行列式 D，由式（1.8）

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

和归纳假定可知，行列式 D 的第一行每个元素 a_{1j} 的代数余子式 A_{1j} 均为 $n-1$ 阶行列式，因而它的展开式中有 $(n-1)!$ 个项，而且每一项都是来自于除第一行和第 j 列以外的 $n-1$ 个不同行、不同列的元素的乘积。将 D 的第一行 n 个元素的所有代数余子式 A_{1j} 代入展开式（1.8）中，易知这样产生的所有项都互不相同，并且可得到：n 阶行列式 D 的展开式中确实有 $n\times(n-1)!=n!$ 个项，且每项都是来自于不同行、不同列的 n 个元素的乘积。

综合上述，性质得证。

此外，我们实际上还可证明：在行列式的展开式中带正号的项和带负号的项各占一半。(证明过程留给读者)

【例 1.3】　计算 n 阶**上三角行列式**（Upper triangular determinant）

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　由行列式定义，按第一行展开时，元素 $a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}$ 的余子式皆等于零。所以

$$D_n=a_{11}\times(-1)^{1+1}\times M_{11}=a_{11}\times M_{11}$$

并且元素 a_{11} 的余子式 M_{11} 仍然是上三角的，以此类推，得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对下列（主）**对角行列式**（Diagonal determinant），有

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【例 1.4】　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 这是依照副对角线的 n 阶下三角行列式。由 n 阶行列式的定义，可以得到

$$D_n = a_{1n} \times (-1)^{1+n} \times M_{1n}$$

注意到上式右端中元素 a_{1n} 的余子式 M_{1n} 是位于原行列式左下角的那个 $n-1$ 阶行列式，而且有与 n 阶行列式 D_n 同样的形式，反复利用行列式定义去展开，有

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{1+n} \cdot (-1)^{1+(n-1)} \cdots (-1)^{1+2} \cdot a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{(n-1)2} a_{n1} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{(n-1)-1} \cdots (-1)^{2-1} \cdot a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1} \end{aligned}$$

值得注意的是：这个 n 行列式 D_n 的值并不总等于 $(-1) a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$。

【例 1.5】 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{4n}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times 1 - 0 + 0 - 2 \times 4 = -7 \end{aligned}$$

我们还看到，该行列式的第 4 行中的零元素比第 1 行中的零元素还要多。如果能够按照第 4 行去展开，那计算不是更加简单吗？事实上，若按行列式的第四行元素去展开行列式，就得到

$$D = 1 \times (-1)^{4+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

这与按 n 阶行列式定义计算的结果是一致的。

行列式不但可以按第一行元素展开，而且也可以按第一行以外的任一行或者任一列去展开，其结果都是相同的，即有

定理 1.1 n 阶行列式 D 等于它的任一行（列）元素与它们所对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.9}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad \forall j=1,2,\cdots,n \tag{1.10}$$

第二节　n 阶行列式的性质

由行列式的定义可知，当行列式阶数 n 较大时，直接用定义计算行列式较为烦琐。下面介绍行列式的一些性质，以此简化行列式的计算。

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 D 中的行与列互换，所得到的行列式记为 D'（或 D^{T}），即

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D'为行列式 D 的**转置行列式**（Transposed determinant）。

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等。

证　对行列式的阶数作数学归纳法。

(1) 当 $n=2$ 时，命题显然成立；

(2) 现假设对阶行列式命题成立，下证对 n 阶行列式命题也成立。事实上，若将 D 和 D'分别按第一行和第一列元素展开，有

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k} \tag{1.11}$$

$$D'=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1} \tag{1.12}$$

式中，A_{1k}，M_{1k} 是 D 的第一行元素的代数余子式和余子式；B_{k1}，N_{k1} 是 D'的第一列元素的代数余子式和余子式。

M_{1k}，N_{k1} 都是 $n-1$ 阶行列式，而且显然可看出 N_{k1} 是 M_{1k} 的转置行列式。由归纳法假设知 $N_{k1}=M_{1k}$，$\forall k=1,2,\cdots,n$ 成立，从而由式(1.11)、式(1.12)得 $D=D'$，即命题对 n 阶行列式也成立。

综合上述，命题得证。

性质 1.2 说明，行列式中行和列的地位是对称的。行列式关于行成立的性质对于列也同样成立。反之亦然。

性质 1.3 互换行列式中两行（或互换两列），行列式变号。

证 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

互换第 i 行与 j 行（$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，$i\neq j$），得

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \end{array}$$

下面用数学归纳法证明$\overline{D}=-D$。

（1）当 $n=2$ 时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}$$

显然$\overline{D}=-D$。

（2）假设对阶数小于 n 的行列式，结论皆成立，下证对 $n(\geqslant 3)$ 阶的行列式命题结论也成立。

注意到行列式 D 与$\overline{D}$中除去第 i 行与第 j 行的位置互换外，其余各行均相同。取定一个 $k(k\neq i,j)$，并将行列式 D 与$\overline{D}$都按第 k 行展开，由第一节定理 1.1 的结论，得到

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}M_{kl} \tag{1.13}$$

$$\overline{D}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}B_{kl}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\cdot(-1)^{k+l}N_{kl} \tag{1.14}$$

式中，A_{kl}，M_{kl}是D的第k行元素的代数余子式和余子式；B_{kl}，N_{kl}是$\overline{D}$的第k列元素的代数余子式和余子式。

M_{kl}，N_{kl}都是$n-1$阶行列式，而且N_{kl}与M_{kl}除去两行的元素互换外，其余各行都相同。由归纳法假设知$N_{kl}=-M_{kl}$，$\forall l=1,2,\cdots,n$成立，从而由式(1.13)、式(1.14)知$\overline{D}=-D$，即命题对n阶行列式也成立。

综合上述，命题得证。

推论 1.1 如果行列式中有两行（列）元素对应相等，则此行列式为零。

性质 1.4 行列式中的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 将等号左、右两边的行列式分别记为$\overline{D}$与D，并将行列式$\overline{D}$按第i行展开，得

$$\begin{aligned}\overline{D}&=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}\\&=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=kD\end{aligned}$$

推论 1.2 行列式中某一行（列）中所有元素的公因数k，可以提取到行列式符号的前面来。

推论 1.3 如果行列式中某行（列）的元素全为零，则此行列式为零。

推论 1.4 如果一个行列式的两行（列）元素对应成比例，则此行列式为零。

性质 1.5 如果行列式中某行（列）的各元素都是两数之和，则这个行列式就可拆分为两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 与性质 1.4 的证明类似，将等式左边的行列式按第i行展开即可。