普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

主编　孟翔燕

科学出版社

普通　划教材

线性代数

主　编　孟翔燕

主　审　敖长林　任永泰

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等6章，并有数学实验和Matlab语言相关线性代数的应用介绍；书末附有习题参考答案、Matlab语言简介、参考文献.

本书可作为高等院校农林类、经济管理类、农业工程类各专业及其他相关专业的线性代数课程教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/孟翔燕主编. —北京：科学出版社，2017.8
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-054106-2

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①孟…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 191796 号

责任编辑：王　静／责任校对：郭瑞芝
责任印制：白　洋／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017年8月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2017年8月第一次印刷　印张：16 1/2
字数：333 000

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数》编写组

主　编　孟翔燕

副主编　徐文仲　成　琨

编　者　（按姓氏笔画排序）

王春祥　成　琨　杜　晶

孟翔燕　赵红杰　徐文仲

前　言

线性代数是大学公共数学课程的主要组成部分, 是工程技术、农林牧渔和经济相关专业后继课程的重要基础, 在培养相关专业学生具有良好的专业素养和数学修养方面起着重要作用, 与高等数学、概率论与数理统计共成为大学数学的三大基础课.

目前, 国内外有关线性代数的教材众多, 各有特色, 其中不乏一些经典之作. 随着教学改革的深入, 人们对教育不断提出新的要求, 教材也应当推陈出新, 跟上时代发展的步伐. 东北农业大学组织多位身处线性代数教学第一线的教师, 集思广益, 深入讨论和研究, 编写了适用于高等院校农林类、农业工程类、经济管理类各专业的线性代数教材. 本书有以下特点.

1. 理论与应用并重, 兼顾培养学生的数学修养和实际应用创新能力

理论方法与思维方式是数学的精髓, 是一本数学教材应呈现的主要内容. 本书对线性代数主干内容起到重要作用的定理给出了证明, 透过定理证明的过程, 可以引导学生逐步理解其数学本质, 使学生了解处理线性代数问题的思维轨迹和应用线性代数解决实际问题的基本原理.

同时, 线性代数是一门极具应用活力的学科. 为了提高学生的学习兴趣, 使学生更多了解线性代数在经济上的应用, 加强学生分析实际问题、归结实际问题为数学问题、用线性代数这一有力工具去解决实际问题等方面的能力. 本书努力加强了从线性代数途径建立数学模型的思想, 对应各章内容, 在各章结尾都给出了建立和求解数学模型的实际应用案例, 其中不乏投入产出问题、人口迁移与预测等经典模型. 通过这些案例, 力图使学生拓宽知识面, 初步具有数学来源于实践、应用于实践的认识和实际运作的本领.

2. 线性代数教学与高速发展的计算机技术、移动终端技术相结合

近十年来, 计算机的软硬件技术和移动终端技术突飞猛进, 极大地改变了人们的生活方式、思维方式和科学研究的方式. 线性代数教学应当顺应潮流, 反映这一发展趋势. 在本书中, 通过加入实验课内容, 应用 Matlab 软件对矩阵相关运算进行计算机实现, 从而达到让学生了解数学软件, 会应用软件解决一些基本的数学运算的目的, 并为将来学生能够应用软件解决实际问题打下良好的基础. 同时, 将教材中的相关数学家简介、实验等内容用二维码关联, 方便学生在课下通过移动终端进行学习, 进而拓展学生的学习手段和途径.

3. 内容安排合理、简洁, 适当配置例题、习题, 方便教师教学和学生学习

教材是教师教学内容的主要来源, 这就要求教材和课堂教学能够形成良好的衔接, 本书的编者对教材内容进行了认真细致的处理, 力求内容紧凑、简洁, 前后叙述一致、明确.

富于启迪而精道的例题与习题是一本好教材不可缺少的有机部分. 本书根据线性代数主干内容精选例题, 力求使例题不仅配合所讲授的理论, 更使学生从中学到分析和解决问题的方法. 考虑到学生考研的需要, 在配置习题时兼顾教学基本内容和考研大纲要求, 并将历年考研线性代数部分的试题放在了习题 (B) 部分, 力求让学生获得足够的训练, 以达到事半功倍的效果.

本书的总体框架与编写大纲由孟翔燕确定. 第 1 章由赵红杰执笔, 第 2 章由杜晶执笔, 第 3 章由成琨执笔, 第 4 章由徐文仲执笔, 第 5 章由王春祥执笔, 第 6 章由孟翔燕执笔. 初稿完成后, 编写组听取了数学系全系范围的意见, 再经过集体多次推敲修改最后定稿. 付梓前, 由孟翔燕对教材的整体格式和行文作了统一处理, 并对全书的文字进行了润色.

本书可供全日制高等院校经济管理类、农林类、农业工程类各专业使用, 根据不同需求, 授课教师可酌情安排授课内容.

囿于学识, 本书虽经多次讨论和修改, 不足和缺陷仍在所难免, 恳请广大读者提出宝贵的批评和建议, 以便今后改进.

编　者

2016 年 10 月于哈尔滨

目　　录

第1章 行 列 式

行列式的概念最早是由 17 世纪日本数学家关孝和提出来的. 它是一种有效的计算工具, 在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用. 特别是在本课程中, 它是研究线性方程组、矩阵及向量组线性相关性的一种重要工具.

1.1 二阶行列式与三阶行列式

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

易知, 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 求得方程组 (1.1.1) 的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

这就是一般二元线性方程组的公式解. 但这个公式不好记忆, 应用时不方便, 因此, 我们引进新的符号来表示这个结果, 这就是行列式的起源.

定义 1.1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为**二阶行列式**, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的**元素**, 横排叫做**行**, 竖排叫做**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做**行标**, 表明该元素位于第 i 行, 第二个下标 j 叫做**列标**, 表明该元素位于第 j 列. 由上述定义可知, 二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和. 这个规律性表现在行列式的记号中就是 "对角线法则". 如图 1-1 所示为二阶行列式对角线法则, 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**, 把 a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为**副对角线**, 于是, 二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

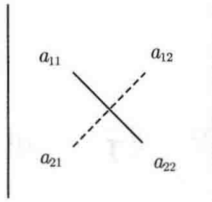

图 1-1　二阶行列式对角线法则

利用二阶行列式的定义, 记

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

于是, 在行列式 $D \neq 0$ 的条件下, 方程组 (1.1.1) 有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.3}$$

从形式上看, 这里分母是由方程组 (1.1.1) 的系数所确定的二阶行列式 (称为**系数行列式**), x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}, a_{21} 所得的二阶行列式, x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1, b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}, a_{22} 所得的二阶行列式. 本节后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性.

例 1　用二阶行列式解二元线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - (-1) \times 1 = 5,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-1) \times 4 = 10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5.$$

因为 $D \neq 0$, 故方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{10}{5} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{5}{5} = 1.$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

类似地, 为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

解的简洁表达式, 我们引入三阶行列式.

定义 1.1.2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为**三阶行列式**, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.1.4}$$

由上述定义可见, 三阶行列式有六项, 每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号, 其运算的规律性可用 "对角线法则"(图 1-2) 来表述.

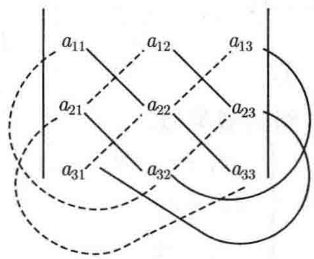

图 1-2 三阶行列式对角线法则

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\times1\times0+0\times2\times2+4\times1\times(-1)-4\times1\times2-3\times2\times(-1)-0\times1\times0$$
$$= -4-8+6=-6.$$

例 3　求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解　方程左端的三阶行列式记为 D, 则

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6.$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

类似于二元线性方程组的讨论, 对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时, 则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

例 4　解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

解　方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 0 \times 1 + (-1) \times 2 \times (-1) - (-1) \times 1 \times 1$$

$$- 1 \times 0 \times (-1) - 1 \times 2 \times 0 = 3 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

故所求方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{3} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{3} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{3} = -2.$$

*1.2 排　　列

为了给出 n 阶行列式的定义, 本节先介绍有关排列的概念和性质.

1.2.1 排列的相关概念

定义 1.2.1 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 按照一定次序不重复地排成一列, 称为一个 **n级排列** (简称**排列**).

例如, 1234 和 3412 都是一个 4 级排列, 而 52341 是一个 5 级排列. 由自然数 1, 2, 3 组成的所有 3 级排列为 123, 132, 213, 231, 312, 321, 共有 3!=6 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为**自然数顺序排列**.

定义 1.2.2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中, 若数 $i_s > i_t$, 则称 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**, 记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

容易看出, 自然数顺序排列的逆序数为 0.

根据上述定义, 可按下面方法计算排列的逆序数.

设有一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 比 $i_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 大且排在 i_k 前面的数共有 t_k 个, 则 i_k 的逆序数为 t_k, 那么该排列中所有自然数的逆序数之和就是这个排列的逆序数, 即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

例 1 计算排列 52341 的逆序数.

解 因为 5 排在首位, 故其逆序数为 0;

在 2 前面且比 2 大的数有 1 个, 故其逆序数为 1;

在 3 前面且比 3 大的数有 1 个, 故其逆序数为 1;

在 4 前面且比 4 大的数有 1 个, 故其逆序数为 1;

在 1 前面且比 1 大的数有 4 个, 故其逆序数为 4.

于是, 这个排列的逆序数为

$$N(52341) = 0 + 1 + 1 + 1 + 4 = 7.$$

定义 1.2.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**; 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 2 试求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数, 并讨论其奇偶性.

解 因为 n 排在首位, 故其逆序数为 0;
在 $n-1$ 前面且比 $n-1$ 大的数有 1 个, 故其逆序数为 1;
在 $n-2$ 前面且比 $n-2$ 大的数有 2 个, 故其逆序数为 2;

$$\cdots\cdots$$

在 2 前面且比 2 大的数有 $n-2$ 个, 故其逆序数为 $n-2$;
在 1 前面且比 1 大的数有 $n-1$ 个, 故其逆序数为 $n-1$.
于是, 所求排列的逆序数为

$$N(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

容易得出, 当 $n=4k$, $n=4k+1$ 时, 该排列为偶排列; 当 $n=4k+2$, $n=4k+3$ 时, 该排列为奇排列.

定义 1.2.4 在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中, 如果其中某两个数 i_s 与 i_t 对调位置, 其余各数位置不变, 就得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$, 这样的变换称为一个**对换**, 记作 (i_s, i_t). 将相邻两个元素对换, 称为**相邻对换**.

例如, 将排列 3412 中的 4 与 2 对换, 得到新排列 3214.

1.2.2 排列的性质

性质 1.2.1 任意一个排列经过一次对换后, 其奇偶性改变.

例如, 偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后, 变成了奇排列 3214. 反之, 奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后, 变成了偶排列 3412.

性质 1.2.2 奇排列变成自然数顺序排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然数顺序排列的对换次数为偶数.

证明 由性质 1.2.1 知, 对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而自然数顺序排列是偶排列 (逆序数为 0), 因此结论成立.

性质 1.2.3 n 个自然数 $(n>1)$ 共有 $n!$ 个 n 级排列, 其中奇偶排列各占一半.

证明 设在 $n!$ 个 n 级排列中, 奇排列共有 p 个, 偶排列共有 q 个. 若对每个奇排列都作同一对换, 则由性质 1.2.1, p 个奇排列均变为偶排列, 由于偶排列一共只有 q 个, 所以 $p\leqslant q$; 同理对每个偶排列都作同一对换, 则 q 个偶排列均变为奇排列, 于是又有 $q\leqslant p$, 所以 $p=q$, 即奇排列与偶排列的个数相等.

1.3 n 阶行列式

这里由二阶、三阶行列式的计算特点的研究, 进一步引出 n 阶行列式的定义.

由 1.1 节的讨论可知, 二阶与三阶行列式的值分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

我们容易看出:

(1) 二阶行列式是 2! 项的代数和, 三阶行列式是 3! 项的代数和;

(2) 二阶行列式的每项都是取自不同行不同列的两个元素的乘积, 三阶行列式的每项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积;

(3) 每项的符号是: 当该项元素的行标按自然数顺序排列时, 若对应的列标为偶排列则取正号, 是奇排列则取负号.

下面作为二、三阶行列式的推广, 我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n*阶行列式**. 其中横排称为**行**, 竖排称为**列**, n 阶行列式的值可以表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 各项的符号是: 当该项各元素的行标排成自然数顺序排列后, 若对应的列标构成的排列为偶排列则取正号; 为奇排列则取负号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式简记为 D, $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$, 这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**, 称 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**.

按此定义的二阶、三阶行列式与 1.1 节中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 当 $n=1$ 时, 一阶行列式为 $|a_{11}|=a_{11}$. 注意不要与绝对值记号相混淆.

定理 1.3.1　n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

定理 1.3.2　n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}.$$

例如, $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$ 是四阶行列式中一项, 它前面的符号应为

$$(-1)^{N(2314)+N(1243)} = (-1)^{2+1} = -1.$$

例 1　判断下列三项是否是四阶行列式的项, 如果是, 判断其应带什么符号?

(1) $a_{11}a_{23}a_{34}a_{41}$;　(2) $a_{11}a_{22}a_{44}$;　(3) $a_{23}a_{44}a_{12}a_{31}$.

解　(1) 该项虽然是 4 个元素的乘积, 但含有 2 个第一列的元素, 故该项不是四阶行列式的项;

(2) 该项是 3 个元素的乘积, 不含有第三行的元素, 故该项不是四阶行列式的项;

(3) 该项是不同行不同列的四个元素的乘积, 故该项是四阶行列式的项, 按定义 1.3.1 计算, $a_{23}a_{44}a_{12}a_{31} = a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$, 而 2314 的逆序数 $N(2314) = 0+0+2+0=2$, 是偶排列, 故 $a_{23}a_{44}a_{12}a_{31}$ 前边应带正号.

例 2　计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解　这是一个四阶行列式, 共有 $4! = 24$ 项. 一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4},$$

现考察不为零的项. a_{1j_1} 取自第一行, 但只有 $a_{14} = 1 \neq 0$, 故只可能 $j_1 = 4$; 同理可得 $j_2 = 3$, $j_3 = 2$, $j_4 = 1$, 即行列式中不为零的项只有 $(-1)^{N(4321)} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, 所以 $D = 24$.

一般地, 可得到下列结果:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 3　计算上三角形行列式 (主对角线以下元素全为 0, 且主对角线以上元素不全为 0 的矩阵) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 其中 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$.

解　一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, 现考察不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行, 但只有 $a_{nn} \neq 0$, 故只可能 $j_n = n$; $a_{n-1j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行, 只有 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 不为零, 因为 a_{nn} 取自第 n 列, 故 $a_{n-1j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列, 从而 $j_{n-1} = n-1$, 同理可得 $j_{n-2} = n-2, \cdots, j_1 = 1$. 所以行列式中不为零的项只有 $(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, 故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似可求得**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上 (下) 三角形行列式及对角形行列式的值, 均等于主对角线上元素的乘积.