

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第二编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第二编



时代文化出版社

半闲数学集锦（第二编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文化出版社

地 址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司

地 址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼

电 话：010-68920114 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18455-0-4

定 价：全套 1890.00元（共22编）



版权所有 翻印必究

第二编序

这一编就是一本专著 图的可嵌入性理论[137]。只简略地谈一谈这一专著的起因, 主要新结果, 以及后继影响。

谈及起因, 也许因为在代数拓扑学方面的积累, 使我沿着吴文俊的方向, 在判定图的平面性方面, 取得一些新结果的基础上, 因为他的上同调的对偶, 在图上的意义不甚了了, 一直想建立, 新的同调与上同调的系统. 当我引进自己的 2-胞腔之后, 才使我初见曙光. 事实上, 此后又开辟了一个, 新的理论途径, 取得了一系列的进展. 考虑到普遍性, 特别是后继的发展方向, 不能不着手写这一专著.

在 [137](2.01—2.20) 中, 主要涵盖以下十三个方面.

第一、即 2.03([137] 的第一章). 在图的一些基本知识方面, 考虑到规范化, 按照科学性、分明性和统一性 (特别是在整个数学学科中) 的原则, 至少全书一致, 而勿引起混淆. 主要在代数和拓扑方面. 精炼地, 提到群与商群, 同伦与基本群, 曲面与嵌入等. 尤其需要注意的, 是将全书都限制在胞腔嵌入上, 以减少不必要的麻烦, 而且毫发无损, 我们所关心的理论, 在 2-流形(特别地, 曲面)上, 的普遍性.

第二、即 2.04—2.05([137] 的第二章和第三章). 前者旨在阐明图中的一种基本构形, 树的理论意义, 和在专题理论研究中的利用价值. 后者首次提出, 我本人构建的同调和上同调空间, 以及试显示它们, 在解释图的内在结构上, 的理论意义. 特别地, 在此基础上, 所得到的图平面性判准, 一举导出 Whitney, MacLane, 以及 Lefschetz 按照他们各自独立的理论路线, 所得到的三个著名定理.

第三、即 2.06([137] 的第四章). 不仅提供了, Jordan 平面闭曲线定理, 我建立起来, 用多面形表示的三种形式. 而且求出了, 一个图在平面上, 有实质上唯一嵌入, 的充分, 也必要, 的条件, 和一个图, 在平面上, 有凸嵌入的充分, 也必要, 的条件. 这两个充分条件, 分别为 Whitney 的一个定理和 Tutte 的一个定理.

第四、即 2.07([137] 的第五章). 在 1.06[008] 和 1.07[009] 中, 所得理论结果的基础上, 讨论图在平面上的可嵌入性. 同时, 也提供一种有效化的实现.

首先, 将吴文俊和 Tutte 表征图的平面性的定理, 统一地, 用上同调空间. 但这空间的对偶, 同调空间, 在图论上的意义尚未了然. 在吴文俊所建立的 GF(2) 上方程组, 进一步改进的的基础上, 引进平面性辅助图(派生图, 参见 1.06[008]), 现在用演生网更切题, 将判定图的平面性, 转化为, 在演生网上, 求一个树. 将演生网的阶从二次降到了一次.

第五、即 2.08([137] 的第六章). 高斯平面闭曲线交叉猜想. 这里, 第一次简单地证明, 给出 Gauss 关于用他引进的交叉图, 刻画一个平面闭曲线交叉

序列的猜想. 他的这个交叉图, 现在看来, 可以视为 2.07 所提到的演生网, 将用以导出它的树, 为路的一种特殊情形.

第六、即 2.09([137] 的第七章). 用演生网推演出, 可平面图的一个平面嵌入. 从理论上, 论证了线性性. 并且, 给出了这条线的斜率不超过 6.

第七、即 2.10 和 2.11([137] 的第八章和第九章). 纵横与网格可嵌入性. 在计算机科学中, 纵横嵌入也称正交画法. 网格嵌入, 也就是无折嵌入.

这里, 在于从理论上, 首先, 证明了每一个 4-正则平面图, 都有每边至多 3 折的纵横嵌入. 然后, 找出全部有一条边 3 折的 3-嵌入的图, 给出有每边至多 2 折纵横嵌入图的刻画. 找出全部有一条边 2 折的 2-嵌入的图, 给出有每边至多 1 折纵横嵌入图的刻画. 完成存在网格嵌入图的刻画. 找出全部, 凡有折边, 都只有 1 折, 嵌入的图. 这一套理论的顺带品, 就是完满完成, 困扰 Marchioro, Morgana, Petreschi 和 Simeone 的, 确定一个图是, 或否, 有一个凡有折边, 都恰 1 折, 纵横嵌入的问题. 同时, 还完成了, 确定图的平面嵌入之最小总折数, 以及占用面积最小的有效化.

第八、即 2.12([137] 的第十章). 同构识别. 提供了两类, 判定两个多面形同构的算法. 一个基于顶点. 另一个, 基于面. 为此后, 建立更简单, 以至最简单的算法, 打下了理论基础.

第九、即 2.13([137] 的第十一章). 基于演生网, 确定图的, 平面与连通度分解. 前者也称层分解.

第十、即 2.14([137] 的第十二章). 对于图的最大与最小亏格的研究. 未触及到, 图在给定非零亏格曲面上, 可嵌入性的判别.

第十一、即 2.15([137] 的第十三章). 有关嵌入网络上, 一些极值确定.

第十二、即 2.16([137] 的第十四章). 在 2.05 和 2.07 的基础上, 提供判定一个拟阵是, 或否, 是图拟阵, 或上图拟阵, 的各两个新判准.

第十三、即 2.17([137] 的第十五章). 在 2.08 的基础上, 揭示了纽结的一个, 新的多项式不变量. 由此不但可以导出拓扑学中 Jones 多项式, 而且还可以导出图论中 Tutte 多项式.

其它部分, 都是为了阅读方便, 而纳入的. 特别要提一提地, 参考文献中, 虽然绝大部分, 与本书正文无关, 对于全面了解有关专题的历史, 是不可, 或缺的. 名词索引, 对于统一图论中, 一意多词和一词多意等, 易引起读者烦恼的现象, 也许有所补偿.

刘彦佩

2015 年 5 月

於北京上园村

第二编目录

专著[137] 图的可嵌入性理论	499
2.01 序	501
2.02 目录	505
2.03 第一章 预备知识	509
2.04 第二章 图中的树	534
2.05 第三章 图中的空间	548
2.06 第四章 可平面图	576
2.07 第五章 平面性	601
2.08 第六章 高斯交叉问题	629
2.09 第七章 平面嵌入	650
2.10 第八章 纵横可嵌入性	684
2.11 第九章 网格可嵌入性	721
2.12 第十章 多面形的同构	753
2.13 第十一章 图的分解	779
2.14 第十二章 曲面可嵌入性	808
2.15 第十三章 极值问题	840
2.16 第十四章 图和上图拟阵	869
2.17 第十五章 纽结不变量	894
2.18 参考文献	921
2.19 名词索引(汉英)	970
2.20 名词索引(英汉)	987

目 录

第一章	预备知识	1
§1.1	集合	1
§1.2	序	5
§1.3	图	9
§1.4	群	14
§1.5	曲面	18
§1.6	注记	24
第二章	图中的树	26
§2.1	树与上树	26
§2.2	确向树与确向上树	32
§2.3	注记	38
第三章	图中的空间	40
§3.0	二分空间	40
§3.1	循环, 上循环和双循环	43
§3.2	循环空间	46
§3.3	上循环空间	53
§3.4	双循环空间	59
§3.5	注记	66
第四章	可平面图	68

§4.1 Euler 公式的利用	68
§4.2 Jordan 曲线定理	76
§4.3 唯一性	80
§4.4 凸表示	85
§4.5 注记	91
第五章 平面性	93
§5.1 浸入	93
§5.2 吴 (文俊)-Tutttle 定理	98
§5.3 平面性辅助图	106
§5.4 主要定理	112
§5.5 注记	118
第六章 高斯交叉问题	121
§6.1 交叉序列	121
§6.2 Dehn 定理	126
§6.3 高斯猜想	132
§6.4 注记	140
第七章 平面嵌入	142
§7.1 左和右确定	142
§7.2 禁用构形	148
§7.3 基本序表征	157
§7.4 平面嵌入的数目	167
§7.5 注记	175
第八章 纵横可嵌入性	176
§8.1 纵横嵌入	176

§8.2 叁可嵌入性	185
§8.3 双可嵌入性	195
§8.4 单可嵌入性	203
§8.5 注记	211
第九章 网格可嵌入性	213
§9.1 许可性	213
§9.2 隅序列	220
§9.3 一般判准	227
§9.4 特殊判准	235
§9.5 注记	243
第十章 多面形的同构	245
§10.1 多面形的自同构	245
§10.2 Euler 和非 Euler 码	252
§10.3 多面形的同构	262
§10.4 注记	269
第十一章 图的分解	271
§11.1 双连通分解	271
§11.2 叁连通分解	276
§11.3 平面分解	283
§11.4 页分解	288
§11.5 纵横分解	294
§11.6 注记	298
第十二章 曲面可嵌入性	300
§12.1 必要条件	300

§12.2 上可嵌入性	305
§12.3 商嵌入	311
§12.4 下可嵌入性	320
§12.5 注记	329
第十三章 极值问题	332
§13.1 最优凸嵌入	332
§13.2 最短三角剖分	338
§13.3 极少折数嵌入	344
§13.4 极小面积嵌入	353
§13.5 注记	359
第十四章 图和上图拟阵	361
§14.1 二分拟阵	361
§14.2 正则性	368
§14.3 图性与上图性	375
§14.4 注记	384
第十五章 纽结不变量	386
§15.1 纽结类型	386
§15.2 图的模型	391
§15.3 纽结多项式	398
§15.4 注记	411
参考文献	413
名词索引 (汉英)	462
名词索引 (英汉)	479

纯粹数学与应用数学专著 第 31 号

图的可嵌入性理论

刘彦佩 著

科学出版社

1994

(京) 新登字 092 号

内 容 简 介

本书对于与图的可嵌入性有关的问题提供一个统一的理论框架。内容包括：图的平面性判定与平面嵌入、高斯平面曲线相交、同构性、图的分解；图的曲面可嵌入性；拟阵的正则性以及图性、上图性；和纽结从拓扑学到组合学的发展等问题。书中许多内容和方法是作者本人的研究成果。从中还提出几十个问题供有兴趣的读者做进一步的研究。

本书可供大专学院与图论有关的专业师生阅读和参考。

2004年，网络版.

纯粹数学与应用数学专著 第 31 号 图 的 可 嵌 入 性 理 论

刘彦佩 著

责任编辑 刘嘉善

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 10 月 第 一 版 开本：850 × 1168 1/32

1994 年 10 月 第一次印刷 印张：16 插页：2

印数：1-1 200 字数：423 000

ISBN 7-03-004442-8/O-767

定价：21.50 元

序

图的可嵌入性的概念导源于平面性, 关于后者, 至少组合学工作者深知它是图论中重要的研究课题之一. 早在 30 年代初, 首先是波兰的数学家 K.Kuratowski, 其后不久, 还有美国的数学家 H.Whitney 和 S.MacLane 都作过精湛的研究. 他们在这方面都创立了各自的理论. 时至今日仍不减其生命力. 这些均已被世人所承认. 然而, 本书则打算提供另一种看来在文献中还是新鲜的理论.

在 50 年代, 中国数学家吴文俊基于代数拓扑学中的上同调理论揭示了判定图的平面性的一个判准. 另一方面, 10 多年之后, 生于英国的加拿大数学家 W.T.Tutte 基于在 50 年代他本人引进的实域上链群的理论也发现了一个判准. 然, 于 80 年代, 本书作者基于二元域 ($GF(2)$) 上的空间理论将这二个判准简化为一个. 这就是在 §5.2 节中所说的吴 (文俊)-Tutte 定理.

60 年代初, 从 L.Auslander 和 V.Parter 发表用计算机的算法思想判定图的平面性方面的第一篇文章直到 J.Hopcroft 和 R.Tarjan 的第一个线性时间算法的出现, 在文献中讨论这一经典课题的文章竟有数百篇之多. 在 70 年代, 吴也构造了一种算法将它转化为解一组模 2 方程的问题. 接着, 本书作者把这一结果改进到每个方程至多含有两个模 2 变量. 然后, 他又得到了一些新的判准, 表明从算法复杂性的角度, 平面性的问题相当在 §5.3 节中引进的平面性辅助图上求一个支撑树. 在 §5.4

中的主要定理就是这些判准.

第七章提供了第五章中所描述的基本理论的进一步发展. 对于平面性和平面嵌入揭示了基于确向树与确向嵌入的禁用构形的完备集. 这就使我们能够求出节点数和边数均为原图的节点数和边数的线性函数的平面性辅助图. 从而, 在算法复杂性上也达到了线性之顶峰.

第二、三和四章是第五和七章的基础. 在第二章中, 引进了确向树和确向上树以及它们的一些将会用到的性质. 第三章是关于图中的空间. 其中包括循环空间, 上循环空间, 双循环空间以及它们的结构. 第四章处理平面图的关键性的结果, 例如, 那些由 Euler 公式能导出的, 唯一性, 直线和凸表示等. 特别是还讨论了 Jordan 曲线定理的离散形式. 当然, 第一章简述了全书所必需的集合、序、图、群以及曲面的基本知识.

在第六章中, 可以看出平面性的理论怎样用于研究高斯的平面曲线交叉问题. 虽然, 于 30 年代, 它首先由 M.Dehn 解决. 不过, 他的解答不是像高斯所猜想的. 事实上, 高斯猜想确用不同的方法予以证实. 但, 这里提供了一种新的看上去较为简单的证明.

第八和九章包含了本书作者最近在纵横可嵌入性与网格可嵌入性方面的一系列新结果. 其要旨是使得这种嵌入中每一条边上的折数尽量地小以致没有折. 第八章从事于叁、双和单可嵌入性. 也就是说只允许每边至多有三、二和一个折的情形. 在第九章中, 研究 0-可嵌入性或者说网格可嵌入性. 它是最难的一种情形. 这里的论题动意于为超大规模集成电路设计中的布局, 特别是布线提供一个理论基础.

第十章是关于确定一个曲面上的二个多面形是否同构的问题. 对于可平面图, 这个问题首先由 L.Weinberg 多项式地解

决了. 现在, 根据 J.Hopcroft 和 J.Wong 的说法我们还知道它是线性可解的. 对于一般的多面形, 在这里利用确向术处理这个问题. 而且, 对于非可平面图可以利用相仿的方法处理.

第十一和十二章着重讨论非可平面图. 第十一章所讨论的分解可分为二个部分. 其一是将一个图分解为各分图均有较高的连通度. 其二是使各分图均为可平面的或者是纵横的并且要求分图之数目愈小愈好或者说每个分图含的边愈多愈好. 第十二章是关于曲面可嵌入性. 它有两个重要组成部分. 其一即所谓上可嵌入性, 或者说使得所在曲面的亏格为最大. 其二是下可嵌入性, 即使所在曲面的亏格为最小. 前者用确向术构造性地得到了解决. 虽然, 在这章中可以看到商嵌入对于确定不少图类的下可嵌入性起了重要作用. 其中包括 Hilbert-Cohn Vossen 的引线问题的解决. 后者距完全解决仍很遥远.

在第十三章中, 提出和解决了一些最优化的问题. 其中, 人们可能会想到最小折数与最小面积的问题尤其对于那些从事超大规模集成电路布局设计的人不无裨益. 这里, 也包括了本书作者的最新的研究进展.

正如人们所意识到的, 拟阵是这样的一个对象, 当图为非可平面的, 它起着对偶图的作用. 第十四章研究一个拟阵是二分的, 正则的以及图的或上图的表征. 这些均视为平面性理论的深入发展. 它首先应归功于 W.T.Tutte 的开创性的工作. 这里我们用自己的方式讨论.

最后, 在第十五章, 着眼于纽结问题从拓扑学到组合学的发展. 对于边上带二元权的平面图提供了二类组合不变量. 由此出发, 可导出 Jones 多项式和括号多项式这二类新的拓扑不变量作为特殊情形.

本书的主要目的在于为上面提到的有关可嵌入性的问题提供一种理论处理. 同时, 也考虑了算法构造. 为了节省篇幅

每章最后一节均安排为注记以便将有关问题的最新进展,理论与实际的背景,以及一些历史的发展作一简要说明.同时,也提出了一些公开的问题和可能有助于进一步研究的建议以供在有关方面有兴趣的读者猎奇.然,这里不允许我们讨论算法的方方面面,既使可以自然地导出.因为这或许会使本书之预定的页数增加一倍.由于同样的原因我们也只能略去有关地图的理论及其计数.虽然,这方面的结果正灿烂夺目.

在结束之前,我必须对那些在学术上或技术上对本书作过贡献的人们表达对他们的衷心的感谢.由于版面所限只能在这里提到一小部分人的名字.首先,本项研究之初,曾得到吴文俊教授文章的启迪和 W.T.Tutte 教授文章的充实.没有他们的贡献,这本书也许决难在此时问世.同时, P.L.Hammer, 许国志, F.S.Roberts, P.Rosenstiehl, B.Simeone, 万哲先, 王元, 吴方, 越民义等教授一直关心作者的研究进展. E.Aparo, 马仲蕃, P.Marchioro, A.Morgana, P.Petreschi, 徐伟宣, 颜基义等教授经常与作者讨论有关问题.在国内外所办的讨论班的听众,例如崔显峰, 董峰明, 康羽, 李安平, 李祥贵, 刘新(博士), 刘莹, 吕涛军, 任韩, 孙晓荣(博士), C.H.Velasquez(博士), 徐寅峰(博士), 杨振起, 于濂, 郑茂林(博士)等部分或全部地勘校此书初稿.当然,现存的任何错处均是我本人的责任.最后绝非次要,我还得特别地感谢加拿大滑铁卢大学的组合学与最优化系,美国罗杰斯大学的运筹学中心,和意大利罗马大学(主校)的统计系的热情好客和各国的研究基金以及我国国家自然科学基金对本书中有关各项目的研究资助.

刘彦佩

1994年4月

于北京

目 录

第一章	预备知识	1
§1.1	集合	1
§1.2	序	5
§1.3	图	9
§1.4	群	14
§1.5	曲面	18
§1.6	注记	24
第二章	图中的树	26
§2.1	树与上树	26
§2.2	确向树与确向上树	32
§2.3	注记	38
第三章	图中的空间	40
§3.0	二分空间	40
§3.1	循环, 上循环和双循环	43
§3.2	循环空间	46
§3.3	上循环空间	53
§3.4	双循环空间	59
§3.5	注记	66
第四章	可平面图	68