普通高等教育"十三五"规划教材

工科离散数学

◎ 牛连强　陈　欣　张胜男　编著

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

工科离散数学

牛连强 陈 欣 张胜男 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

离散数学是研究离散结构及其相互关系的数学学科，是计算机科学与技术及其相关专业的理论基础。本书以数理逻辑为基础，介绍命题逻辑、一阶谓词逻辑、集合论、关系、函数、代数结构和图论。

不同于一般的离散数学书籍，本书内容主要以满足一般工科院校计算机科学与技术、软件工程、信息与计算科学以及其他信息领域相关专业的离散数学课程教学要求为主，不求大求全，尤其是根据工程教育的要求，注重介绍有应用价值的理论，避免理论上的缠绕，内容简介务求通俗明了。同时，还增加了相当数量的工程应用方面的简介以及相关参考文献，使学习者能够快速了解这些理论的实际工程用途。

本书的配套网络课程、电子教案和习题辅导用书将陆续推出，以满足现在立体化教学的要求。本书不仅能很好地满足一般工科院校的离散数学课程教学需要，也特别适合自学。

图书在版编目 (CIP) 数据

工科离散数学 / 牛连强，陈欣，张胜男编著. —北京：电子工业出版社，2017.2

ISBN 978-7-121-30641-9

I. ①工… II. ①牛… ②陈… ③张… III. ①离散数学－高等学校－教材 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 305974 号

策划编辑：王羽佳
责任编辑：郝黎明
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×980　1/16　印张：12.75　字数：367.2 千字
版　　次：2017 年 2 月第 1 版
印　　次：2017 年 2 月第 1 次印刷
定　　价：35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010)88254535，wyj@phei.com.cn。

前　言

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的一门学科，是由逻辑学、集合论、关系理论、图论、抽象代数、布尔代数甚至算法设计、组合分析、离散概率和计算模型等汇集起来的一门综合学科。由于数字电子计算机是一个离散结构，只能处理离散的或离散化了的数量关系和数学模型，这正是离散数学的主要内容，因此，离散数学构成了计算机相关学科的基础学科。为此，《中国计算机科学与技术学科教程 2002》将其界定为计算机科学与技术专业的核心基础课程，美国 IEEE&ACM 也确定其为计算机专业的核心课程。

应该说，计算机及其相关专业的绝大部分课程，都是直接以离散数学作为理论基础的，也可以说是离散数学的直接运用，或者说需要依靠离散数学课程中建立的观点、方法和逻辑思维能力去解决具体问题。因此，离散数学课程的教学目的就是要建立逻辑（数学）推理能力、了解重要的离散对象与结构、构建和应用解决离散问题的模型及具备算法思维等。

现在有一些相当成功的离散数学教材，如 Kenneth H. Rosen 的《Discrete mathematics and its applications》、左孝凌的《离散数学》和屈婉玲、耿素云的《离散数学》等。在近 30 年的教学实践中，我们采用这些教材取得过一定的成功，但也存在着诸多问题。概括地说，这些教材大而全，更关注理论与系统的完整性，这与教材的定位甚至国家对精品教材、规划教材、优秀教材等的要求和评价标准不无关联，缺乏对学习对象本身的情况和层次、学时的减少以及工程教学目的的变化等实实在在因素的关注。这些问题在湖南大学的张洪圣等老师编写的同名教材中已经部分提及，我们深有同感。举例说，普通工科高校在我国高校中占大多数，但她们的学生与 985、211 高校存在着很大的差异，以学术研究为目标的教材和教学内容上的趋同不仅达不到“拔高”的目标，反而使学生过早丧失了学习兴趣，形成一系列不良的连锁反应。又如，在仅有 48～64 学时的教学时间里，我们不能期望把类似数论、离散概率、组合设计、形式语言、自动机等内容都灌输给普通院校的学生。

本书的写作目的是为一般的而非拔尖的普通工科高校的计算机、软件工程及其相关专业提供一本通俗、易于理解、易于自学、有一定工程应用背景和实际问题引导的教材。因此，本书不追求体系的完整、内容的全面和对理论的深入探讨，也不关注竞赛、考研等问题。为了达到目标，体现自身的特点，我们注重如下问题并采取了我们认为适当的做法：

- **内容按教学实际取舍**。舍弃中学学过的简单组合计数、前文提到的离散概率、数论、组合设计、形式语言等内容，以及数据结构等课程中涵盖的算法，不使内容过于膨胀，并尽量避免与后续课程重复。
- **次序编排突出逻辑思维**。以逻辑学而不是集合论为出发点，用命题逻辑和谓词逻辑主导解决后续所有问题的思维，以便强化分析、解决问题的逻辑性和能力。
- **对问题平实、透彻讲解**。离散数学也是数学，内容抽象。通过信息相关领域实例、问题引

导、分析、评价、辨析等步骤，将问题讲解透彻，避免读者需要花过长的时间思考或借助参考书才能读懂，甚至利用“理解”标签予以提示并展示应理解的程度。特别地，对大量值得注意或认真分析的关键问题，都通过“辨析”标签给出讨论和警示。

- **概括、突出问题核心**。对解决一类问题的核心内容给予总结、概括和突出，说明此类问题的实质和解决方法的关键，而不是给出一个具体题目的解法。
- **适当引入工程问题**。选取相关领域中有代表性的工程应用实践问题作为示例或习题，消除学生总认为学理论与实际脱节的误解，激发其学习课程和解决实际问题的兴趣。
- **对思考和应用进行引导**。作为教材，对于新的成果、大量的相关问题及其解决方案不可能全部囊括，仅是一斑。对于很多问题，通过“延伸”标签指出其发展方向、实际应用案例、存在的解决方法等，并列出可供参考的论文等素材，以引导学生自己探索。当然，这些内容作为课堂的延伸，以辅助学习和思考为主，研究为辅。因此，列出的论文都不是专门研究理论而是程度较浅的应用型文章、教学论文乃至书籍。
- **洗练定理与习题**。过多罗列已有的结果令人眼花缭乱，还会误导学生机械记忆而不是由基本概念出发进行主动思考、探究和发现结果。同时，尽管多做习题有助于问题的理解，但需要大量的时间和精力，过多习题也容易使人恐惧并产生排斥心理。为此，尽量精简了定理与习题。考虑到本课程中概念（定义）对内容理解和题目求解的极端重要性，故将重要概念纳入习题，直接提醒学生弄懂并记住这些定义。

使本书体现上述特点源自于学生的实际情况、教学上的要求以及人才培养工程化的形势变化等因素。我们认为，在把更多的时间、思考、总结、发现任务交给学生时，教师要能使学生学会学习，教材要有助于学生自主学习。教材既不能包罗万象，求深求全，也不能只是“干巴巴”的纲，更不应连一节中有几个重要概念、主要方法之类的总结都由教材代替。考虑到目前离散数学课程多在一年级中开设，我们没有对算法的描述以及程序实现提出过多要求，以免徒增额外负担且冲淡主题。此外，还对重要名词配以英文对照，以期可以辅助对专业外文词汇的掌握。

全书分为 8 章，分别是“命题逻辑”“谓词逻辑”“集合论基础”“关系”“函数”“运算与代数系统”“环、域、格和布尔代数”“图”。这种安排次序的目的是期望以严密的逻辑思维贯穿各部分内容，以使思考和推理更富有理论依据。全书的内容可在 70 个学时内讲完。

本书的几位作者都具有 20 多年的课程教学经验，且未间断地从事本科离散数学课程的教学工作，无论是对课程内容、体系、教学方法和安排，还是工程教育的发展方向与工科学生的实际情况均有着深刻的理解，这使得本书的写作更有针对性。我们期望通过本书使离散数学的内容更容易理解、学习和掌握，促进课程教学质量的提高，但囿于个人见解，仍会存在诸多缺憾，欢迎读者指出其不足，也期待能与读者做更多的交流（niulq@sut.edu.cn）。

此外，本书的出版得到了沈阳工业大学和学校诸多老师的支持和帮助，作者深表感谢！

作　者

目　录

第1章 命题逻辑

逻辑（logic）一词源于希腊文 logoc，有“思维”和“表达思考的言辞”之意。逻辑学则是研究思维形式及思维规律的科学。

逻辑分为辩证逻辑和形式逻辑。辩证逻辑是指以辩证法认识论为基础的逻辑学，形式逻辑则是指依据对思维的形式结构和规律进行形式上的推演构成的逻辑学。这里的“形式”是相对于“内涵”（或内容）而言的，形式逻辑只从形式上进行推导，只关心前提和结论之间的逻辑关系而不关心内涵是否真实，故为“形式”上的逻辑。

形式逻辑所研究的思维形式结构就是指概念、判断和推理之间的结构和关系。其中，**概念**是指反映事物本质属性的思维形式，是思维的基本单位。概念用于给一个名词做界定，也是对其公共属性所做的抽象。例如，“商品是用来交换的劳动产品”就描述了一个“商品”的概念。

判断是指对事物是否具有某种属性，即是否符合某概念进行肯定或否定的回答。例如，根据商品的概念，“手机是商品”是一个判断。当然，判断也用于对事物之间是否存在某些关系做回答。

推理是指由一个或几个判断推出另一个判断的思维形式。

现代形式逻辑是利用数学方法或者说借助符号体系进行推理规律研究的，因此，也称为**数理逻辑**或**符号逻辑**，这是《离散数学》课程所讨论的范畴。最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的学者是德国数学家莱布尼茨（G.W.Leibnitz），经过乔治·布尔（George Boole）、弗雷格（G.Frege）、怀特海（A.N.Whitehead）和罗素（B.Russell）等人的创造性工作，使得数理逻辑形成了专门的学科。1938 年，克劳德·艾尔伍德·香农（Claude Elwood Shannon）在“继电器和开关电路的符号分析”一文中提出利用布尔代数对开关电路进行相关分析，证明了可以通过继电器电路来实现布尔代数的逻辑运算，并给出了实现加、减、乘、除等运算的电子电路设计方法，开启了数理逻辑在开关电路理论和计算机科学方面的应用，也使其成为计算机科学的基础理论之一。

1.1 命 题

推理是对判断之间的关系进行的逻辑推导，这里的判断称为“命题”。

[定义 1-1] 表达判断的可判别真假的陈述句称为**命题**（proposition 或 statement）。一个命题所表达判断的或“真”或“假”的结果称为命题的**值**或**真值**（truth）。真值为真的命题称为**真命题**，真值为假的命题称为**假命题**。

上述定义说明，命题是一个陈述事实的句子，是应该能够肯定对或错的陈述句，不能非真非假，也不能既真又假。

[辨析] “真值”就是值，只是一种称呼方法，不是“真”的意思。真值可以是真或假。

命题一般用字母来标记，如 p 或 P。例如：p：沈阳是一个大城市。

如果一个命题的真值为真，可用 **T**、1 或"真"表示；若真值为假则用 **F**、0 或"假"表示。可见，p 的值为 1。

[辨析] 用 **T/F** 表示逻辑值直观，用 1/0 表示则更接近计算机，也便于演算。这种量在计算机内部或程序设计语言中多用 1/0 表示，称其为逻辑量。

作为代表命题的符号，前述的 p 是**命题常量**（proposition constant），因为它代表一个确定的命题。如果符号 p 可以任意指代，则称为**命题变元**（变量，proposition variable）。不可再拆分的命题称为**原子命题**（atom）或**简单命题**，否则是**复合命题**（compound proposition），即复合命题是由原子命题与联结词构成的命题。

例 1-1 判别下列陈述是否为命题。若是，说明其真值。

(1) 日本人民是伟大的。 (2) 雪是黑的。

(3) 1+101＝110。 (4) 火星上有生物。

(5) 一个偶数可表示成两个素数之和。 (6) $x+y=z$。

(7) 动作快点！ (8) 天安门真雄伟啊！

(9) 请给我一杯茶。 (10) 你掌握命题这个概念了吗？

(11) 我正在说谎。 (12) 我只给不给自己刮胡子的人刮胡子。

(13) 如果天气好，我就去散步。

解 (1) 是命题，值为 1。一个人可能不伟大，但哪国人民都是伟大的，判断命题的真假不能掺杂个人喜好和感情色彩。

(2) 是命题，值为 0。不要管有没有污染，应是客观真相。

(3) 是命题，值因进制不同而不同，给定进制条件后就可确定其值。

(4) 是命题，值目前不能确定，但终究有一天会确定。

(5) 是命题，其值有待证明。此即哥德巴赫猜想。

(6) 不是命题，因为语句中的量都是变量，值不确定。

(7)(8)(9)(10) 不是命题。祈使句、感叹句和疑问句都不是陈述句，自然不是命题。

(11)(12)不是命题。这是一类特殊的句子，称为"悖论"。悖论虽有命题的形式，但不能表示判断，无法确定真假。

[辨析] 悖论近乎诡辩，无法确定真假。若假定其为真，由字面可推出值为假，反之亦然。或者说，悖论不能自圆其说，总存在漏洞。例如，对于(12)，试想："我"的胡子应由谁来刮？

(13) 是命题。复合命题，其值要依据两个原子命题的值才能确定。

在逻辑学中，命题与判断是两个既有联系又有区别的概念，命题是对事物情况的陈述，判断是对思维对象有所断定的思维形式，是断定者在一定时空条件下对一个命题是真或假的断言。因此，判断一定是命题，而命题不一定是判断。例如，"火星上有生物。"是命题，但没有经过证实，不是判断。

思考与练习 1.1

1-1 何谓形式逻辑？形式逻辑、数理逻辑与符号逻辑是什么关系？我们学习的是什么逻辑？

1-2 何谓命题？何谓命题的真值？如何表示命题的值？何谓复合命题？

1-3 何谓判断？何谓推理？

1-4 下述语句是否为命题？若是，是何种命题，命题的真值是什么？

(1) 下水救人的男孩真勇敢啊！

(2) 下水救人的男孩真勇敢。

(3) $3x+2>0$。

(4) 2 是素数或合数。

(5) 你下午有时间吗？如果有，请到我这儿来一下。

(6) 如果 a 与 b 是对顶角，则角 a 等于角 b。

(7) 做你的作业。

(8) 本语句为假。

1-5 找出命题中的所有原子命题并用符号表示它们。

(1) 李雨春一边看书一边听音乐。

(2) 我不去旅游。

(3) 只有社会主义能够救中国。

(4) 杨明既不在教室，也没在寝室，他出去了。

(5) 当山花开的时候，你爹就回来了。

1.2 逻辑联结词

为了由一个或两个原子命题直接构成复合命题，可以定义 9 个**逻辑联结词**（logical connectives）。自然地，只要联结词使用正确，就可以由原子命题构成新的复合命题。在符号演算时，联结词代表着运算符，命题是参与运算的量。

1.2.1 基本联结词

[定义 1-2] 否定$\neg$。若 p 为命题，新命题$\neg p$是对 p 的**否定**（negation，not）。$\neg p$的值与 p 相反，读作“非 p”。

这是唯一一个“一元”联结词。C 和 Java 等语言中体现为逻辑否定运算，用!表示。

例 1-2 令 p：沈阳是一个大城市，给出命题$\neg p$的描述。

解 $\neg p$可以有多种叙述方式，如：

(a) 沈阳不是一个大城市。

(b) 沈阳是一个不大的城市。

(c) 沈阳是一个大城市不真。

[辨析] 从此例可感受到采用符号表示（数学方法）的好处：表示简单且具有唯一性，而用自然语言描述却存在着多种说法，也不严格。

通常，原子命题对应着肯定形式的命题，含有“不”、“非”等联结词的命题则被视为复合命题。例如，用 p 表示原子命题“他是好人”，则命题“他不是好人”构成复合命题 $\neg p$。

[定义 1-3] 合取 $\wedge$（逻辑积）。若 p 和 q 为命题，则 p 和 q 的**合取**（conjunction，and）构成新命题 $p \wedge q$，读作“p 与 q”或“p 与 q 的合取”。当且仅当 p 和 q 都为 1 时，$p \wedge q$ 为 1，否则为 0。

从演算角度看，$p \wedge q$ 表示按逻辑求积，即 $p \wedge q = p \times q$，运算规则为：

$$1\times 1=1, \quad 1\times 0=0, \quad 0\times 1=0, \quad 0\times 0=0 。$$

自然语言中的联结词“和”、“与”、“且”、“同”、“一边、一边”，以及所有并列句、转折句都对应着合取联结词。在 C 和 Java 等语言中体现为逻辑与运算，用&&表示。

例 1-3 用符号表示命题“不仅 $\sin x$ 是奇函数，x^3 也是奇函数”。

解 令 p：$\sin x$ 是奇函数，q：x^3 是奇函数，则原命题可表示为：

$$p \wedge q 。$$

注意自然语言中的转折句也对应着合取联结词。例如，p：道路曲折，q：前途光明，则命题“道路虽然曲折，但前途光明”应表示为 $p \wedge q$。

[定义 1-4] 析取 $\vee$（逻辑和）。若 p 和 q 为命题，则 p 和 q 的**析取**（disjunction，inclusive or）构成新命题 $p \vee q$，读作“p 或 q”或“p 与 q 的析取”。当且仅当 p 和 q 都为 0 时，$p \vee q$ 为 0，否则为 1。

从演算角度看，$p \vee q$ 表示按逻辑求和，即 $p \vee q = p + q$，运算规则为：

$$1+1=2 \text{（逻辑意义仍是1）}, \quad 1+0=1, \quad 0+1=1, \quad 0+0=0 。$$

自然语言中的联结词“或”、“或者”和“亦或”均对应于析取联结词。在 C 和 Java 等语言中对应着逻辑或运算，用||表示。

例 1-4 用符号表示命题“马云是阿里巴巴集团主席或首席执行官”。

解 令 p：马云是阿里巴巴集团主席，q：马云是阿里巴巴集团首席执行官，则原命题可表示为：

$$p \vee q 。$$

一个非常重要的问题是自然语言中的“逻辑或”包括两类，其一为定义 1-4 中的析取，也称为“可兼析取”，另一类为“不可兼析取”。

[辨析] 析取 $\vee$ 也称“可兼或”或“可兼析取”，这是指 p 和 q 都为 1 时，$p \vee q$ 也为 1，即两者可以兼有。

[定义 1-5] 不可兼析取 $\bar{\vee}$。若 p 和 q 为命题，则 p 和 q 的**不可兼析取**（exclusive or，或称**不可兼或、排斥或**）构成新命题 $p \bar{\vee} q$。此命题用于描述两者不能兼有的情况，当且仅当 p 和 q 的真值相同（都为 1 或都为 0）时，$p \bar{\vee} q$ 为 0，否则为 1。

不可兼析取$\bar{\vee}$与著名的“异或”运算（XOR）相对应，也可用$\oplus$表示。对于任意的命题p，有如下运算结果：

$$p\bar{\vee}0=p，\quad p\bar{\vee}1=\neg p，\quad p\bar{\vee}p=0。$$

[延伸] 不可兼或的特殊性质使其应用非常广泛。C 和 C++等语言中虽没有对应的逻辑运算，但有按位异或运算^。对于任意的整数a，有

$$a\text{^}0=a，a\text{^}a=0。$$

如果屏幕上的一个像素具有颜色b，可以用某种颜色a与其做按位异或^运算，$a\text{^}b$使颜色产生变化。当使用颜色a与其再次运算时，有$a\text{^}(a\text{^}b)=(a\text{^}a)\text{^}b=b$，这就恢复了最初的颜色$b$。这是一种快速“擦除”技术，可用于实现绘图软件中拉伸线条的橡皮筋等功能[1]。

[定义 1-6] 条件$\to$。若p和q为命题，则p**条件**q（conditional）构成新命题$p\to q$，读作“p则q”，或“p条件q”，或“如果p那么q”，或“只要p就q”。当且仅当p为 1 而q为 0 时，$p\to q$为 0，否则为 1。

[辨析] $p\to q$一般称为条件句，而p和q分别称为“前件”和“后件”。最值得注意的是，当前件p为 0 时，条件句$p\to q$为 1，与后件q的真假无关。这被称为“善意的推断”。

什么是善意的推断呢？就是前提不成立时命题就真，不用计较结果。考虑如下示例：

“如果我中了彩票，我把一半奖金分给你”。

如果我中了彩票，必须分给你一半奖金才不算食言。但是，当我没中彩票时，无论分给你与否这话都是真的。既然只是“如果”，就是假设。假设不成立，一切休提。

自然语言中的条件联结词很多，包括“因为、所以”、“只要、就”、“仅当”、“当”、“只有、才”、“除非、才”和“除非、否则（非）”等。

例如，令p：函数$f(x)$在x_0处可导，q：$f(x)$在x_0处连续，则命题“如果函数$f(x)$在x_0处可导，则$f(x)$在x_0处连续”表示为：

$$p\to q。$$

[定义 1-7] 双条件$\leftrightarrow$。若p和q为命题，则p**双条件**q（biconditional）构成新命题$p\leftrightarrow q$（或$p\rightleftarrows q$）。读作“p双条件q”或“p当且仅当q”。当且仅当p和q的真值相同时，$p\leftrightarrow q$为 1，否则为 0。

很明显，命题$p\leftrightarrow q$表示p和q互为充分必要条件。

例 1-5 用符号表示命题“两个圆S_1和S_2的面积相等的充分必要条件是它们的半径相等”。

解 令p：两个圆S_1和S_2的面积相等，q：它们的半径相等，则原命题可表示为：

$$p\leftrightarrow q。$$

例 1-6 用符号表示命题“你可以坐飞机当且仅当你买了机票”。

解 令p：你可以坐飞机，q：你买了机票，则原命题可表示为：

$$p\leftrightarrow q。$$

在以上 6 个联结词中，$\neg$、$\wedge$、$\vee$是最基本的联结词，其他联结词都可由它们表示出来。例

如，比较 p 和 q 取不同真值时复合命题的真值即可发现，不可兼析取 $\bar{\vee}$ 可以表示为：

$$p\bar{\vee}q=(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)。$$

观察对联结词 $\bar{\vee}$ 和 $\leftrightarrow$ 的规定还可知：

$$p\bar{\vee}q=\neg(p\leftrightarrow q)。$$

这是两种重要的联结词转换关系。

在自然语言或者说生活中，组成复合命题的原子命题之间是有联系的，组成条件句的两个原子命题一般也会有因果关系，但数理逻辑中并无此要求。例如，下述命题都是正常的：

(1) 程序是用某种语言编制的，而网络是一种重要的交流工具。

(2) 如果天是蓝的，那么，太阳从东方升起。

[延伸] 逻辑联结词的用处广泛，网页中普遍采用逻辑运算进行信息检索，也称作布尔逻辑搜索。此时，联结词（布尔逻辑运算符）的作用是把检索词连接起来，构成一个逻辑检索项。常见的浏览器中可能直接使用 not、and 和 or 表示否定、合取和析取，也可能使用–、&（或空格）和+（或|）等符号表示。例如，Google 中使用–、and 和 or 表示，可用条件表达式“课程 and 教师–学生”表示含有关键词“课程”和“教师”，但不包含“学生”的页面。百度中对应的逻辑联结词为–、空格和|[2]。

1.2.2 其他联结词

[定义 1-8] 与非↑。若 p 和 q 为命题，则 p **与非** q（not and）构成新命题 $p\uparrow q$，含义是 $p\uparrow q=\neg(p\wedge q)$。

[辨析] 与非就是“与的非”，或者说“合取的否定”。

[定义 1-9] 或非↓。若 p 和 q 为命题，则 p **或非** q（not or）构成新命题 $p\downarrow q$，含义是 $p\downarrow q=\neg(p\vee q)$。

[辨析] 或非就是“或的非”，或者说“析取的否定”。

[定义 1-10] 条件否定 $\overset{c}{\rightarrow}$。若 p 和 q 为命题，则 p **条件否定** q（not if then）构成新命题 $p\overset{c}{\rightarrow}q$，含义是 $p\overset{c}{\rightarrow}q\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$。条件否定也称为“逆条件”。

通过分析真值的情况容易说明，合取、析取、不可兼析取、与非、或非都满足交换律和结合律。

思考与练习 1.2

1-6 利用开关、电源和一个灯泡描述与否定、合取和析取联结词对应的电路。

1-7 说明 p 和 q 取何值时，命题 $\neg p\rightarrow q$ 为 0？当 p 和 q 的值均为 1 时，命题的真值是什么？

1-8 对于一个命题 p，复合命题 $p\bar{\vee}1$、$p\bar{\vee}0$、$p\bar{\vee}p$ 和 $p\bar{\vee}\neg p$ 的真值都是什么？

1-9 对于一个命题 p，复合命题 $p\uparrow p$ 和 $p\downarrow p$ 的真值都是什么？

1-10 写出“–2 是偶数或 3 是正数”的否定命题，再尝试用不同的联结词来表示它。

1-11 “中国和巴基斯坦是兄弟”中的“和”与联结词 $\wedge$ 有何不同？

1-12 写出一个命题，可以表示为符号形式 $p \leftrightarrow (\neg q \wedge r)$。

1-13 令 p：明天下雨，q：我去镇上，那么，$\neg(p \wedge q)$ 和 $p \bar{\vee} q$ 分别表示什么命题？

1-14 用$\neg$、$\wedge$、$\vee$分别表示联结词$\uparrow$和$\downarrow$。

1-15 利用百度浏览器搜索含有“XOR”和“异或”这两个词的网页，阅读并尝试找到它们的一些用途。

1.3 命题公式与真值表

1.3.1 命题公式

原子命题或复合命题可以借助联结词再组成复合命题。例如，若 p、q 和 r 均为命题常量，那么，$p \wedge q$ 为复合命题，且$(p \wedge q) \to r$ 也是复合命题。当这些命题标识符代表命题变元时，$p \wedge q$ 和$(p \wedge q) \to r$ 不再是命题，称其为“命题公式”、“合式公式”或“命题合式公式”，也可简称为“公式”。当然，并不是任意的命题标识符与联结词组成的符号串都是命题公式，需要遵循一定的原则。

[定义 1-11] 命题演算的**合式公式**（well-formed formula，简称 wff）定义为：

(1) 单个命题变元或常量是一个合式公式。

(2) 如果 p 是合式公式，那么$\neg p$ 是合式公式。

(3) 如果 p 和 q 是合式公式，那么 $p \wedge q$、$p \vee q$、$p \bar{\vee} q$、$p \to q$ 及 $p \leftrightarrow q$、$p \uparrow q$、$p \downarrow q$、$p \overset{c}{\to} q$ 都是合式公式。

(4) 当且仅当有限次地应用规则(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、常量、联结词和括号的符号串是合式公式。

组成合式公式的命题变元（或常量）可称为公式的“分量”。

[理解] 不必深究此定义，它可以被不严格地解释成：由命题常量、变元和联结词组成的有意义的式子就是合式公式。这里的“有意义”就是指要遵循运算规则的要求，如$(p \wedge 1) \to q$ 有意义，而$(\vee p \wedge 1)\neg q$ 则无意义。这与程序设计语言中对表达式的不严格描述是相同的，而命题公式就是命题逻辑中的表达式。

[辨析] 定义中之所以称其为命题公式或合式公式而不是命题，是因为其中可能含有值未知的命题变元，这如同不能说表达式是一个数一样。例如，在 p 和 q 为变元时，命题公式$(p \wedge 1) \to q$ 的值是不确定的。

在一个命题公式 A 含有 n 个原子变元时一般可这样描述：

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) = (p_1 \vee p_2) \to \cdots。$$

类似地，一个数学表达式一般这样描述：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + x_2)^* \cdots。$$

它们没有本质区别，但 x_1，x_2，…，x_n 通常取连续区间的实数，f 亦然。相对地，p_1，p_2，…，

p_n仅取值为 1 或 0，A 本身亦如此。从这一点上说，命题公式比一般数学表达式更简单。同时，命题公式也称为“命题函数”，公式中的分量就是函数的自变量。

为避免一个命题公式中出现太多括号，规定主要联结词（运算符）的优先次序（优先级）如下：

$$\neg \xrightarrow{\text{优先于}} \wedge \xrightarrow{\text{优先于}} \vee \xrightarrow{\text{优先于}} \rightarrow \xrightarrow{\text{优先于}} \leftrightarrow$$

对于同级运算，$\neg$ 按从右至左的顺序依次进行，其他运算则按从左至右的顺序依次进行。使用圆括号可以改变或强调运算的优先次序，如 $p \vee q \rightarrow r$ 等同于 $(p \vee q) \rightarrow r$，但不等同于 $p \vee (q \rightarrow r)$。

1.3.2 真值表

为了表示一个联结词的内涵或分析一个命题（公式）的真值情况，可以对命题（公式）中所含有的原子变元的所有可能取值及其对应的命题（公式）的真值进行分析。

[定义 1-12] 若 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是出现在命题公式 A 中的所有原子变元，任意指定 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的一组真值称为 A 的一个**解释**（Interpretation），也称为**指派或赋值**（assign）。简言之，对一个命题公式的一个解释就是对其所有原子变元的一次赋值。

显然，n 个原子变元共有 2^n 个解释。例如，命题公式 $p \wedge q$ 的 2 个原子变元共有 $2^2=4$ 个解释，分别是 11、10、01 和 00。

[定义 1-13] 将一个命题的所有解释与对应命题的真值汇聚成表称为**真值表**（truth table）。用于规定一个联结词组成的复合命题公式的真值表就是程序设计语言中的运算表。表 1-1 和表 1-2 分别确定了联结词 $\wedge$ 和命题 $\neg p \rightarrow \neg q$ 的真值情况。

表 1-1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

表 1-2

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

表 1-3 同时描述了前文定义的 9 个联结词的真值情况。

表 1-3

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \bar{\vee} q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \overset{c}{\rightarrow} q$
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0

[辨析] 注意真值表中变元赋值的排列顺序。若有 n 个命题变元，按 $2^n-1 \rightarrow 0$ 或 $0 \rightarrow 2^n-1$ 的顺序将这些整数转换为 n 位二进制串排列即可，如 11、10、01、00，这也说明了真值表的行数。

除了表示原子命题的变元外，一个真值表中可以列出一个或几个命题公式的真值，但最后总要包括最关注的命题公式列。

思考与练习 1.3

1-16 何谓命题公式的一个解释？含有 n 个原子变元的公式有多少种解释？

1-17 利用真值表说明联结词 $\wedge$、$\vee$、$\bar{\vee}$、$\uparrow$、$\downarrow$ 均满足结合律和交换律。

1-18 利用真值表说明联结词 $\wedge$ 对 $\vee$ 满足分配律。

1-19 构造下述公式的真值表。

(a) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ (b) $p\to(q\bar{\vee}r)$

(c) $(\neg p\to q)\bar{\vee}(p\to r)$ (d) $p\to(q\leftrightarrow s)$

(e) $(p\bar{\vee}q)\downarrow q$

1.4 命 题 翻 译

为了实现符号推导，必须先将自然语言描述的命题用符号表示，称为命题**符号化**或**翻译**。翻译后的符号串应是正确的命题公式。

1.4.1 合取命题

例 1-7 将下述命题用符号表示。

(1) 黄渤既聪明又勤学苦练。 (2) 黄渤聪明，而且勤学苦练。

(3) 中国人民是勤劳和勇敢的。 (4) 你是好人，他不是好人。

(5) 他虽然聪明但不用功。 (6) 我努力了，可是没有达到理想的效果。

(7) 张三或李四都可以做这件事。

解 上述所有复合命题均应表示为两个命题的合取。例如，对于(3)，令 p：中国人民是勤劳的，q：中国人民是勇敢的。则原命题表示为：

$$p\wedge q。$$

虽然(7)中的命题联结采用了“或”，但重在“都”，是一种不太规范的说法。

[辨析] 注意用符号表示原子命题时不能包括汉语中的联结词，如既、又、而且、虽然、但是等，且需要根据上下文补足句子中省略的成分。

汉语的“和”、“与”等词有特殊的用法，即仅表示原子命题而非合取，如：

(1) 中国和巴基斯坦是全天候战略合作伙伴。

(2) 吾与汝毕力平险。

怎么衡量“p 与 q”、“p 和 q”这样的命题是原子命题还是复合命题呢？通常，如果句子的谓语部分反映的是人或物（如 p 和 q）之间的关系或者共同完成的事情则是原子命题，否则为复合