工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计

同济大学数学系 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十二五”规划教材

数学系列教材

AND STATISTICS

概率论与数理统计

同济大学数学系 ◎ 编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（C I P）数据

概率论与数理统计 / 同济大学数学系编. -- 北京 :
人民邮电出版社，2017.3
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42274-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第202505号

内 容 提 要

本书是在教育部制定的教学大纲基础上，参照同济大学“概率论与数理统计”课程及教材建设的经验和成果，按照全国硕士研究生入学统一考试数学一的考试大纲要求，根据作者十多年的教学实践经验编写而成. 全书共分八章，包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、统计量和抽样分布、参数估计和假设检验.

本书着眼于“概率论与数理统计”中的基本原理和基本方法，强调直观性；语言通俗，注重用生动浅显的方式说明基本概念的直观意义；例题丰富，可读性强. 本书可作为高等院校本科生（理工类和经管类）“概率论与数理统计”课程的教材或参考书，也可供概率统计初学者自学使用.

◆ 编　　　　同济大学数学系
　责任编辑　武恩玉
　执行编辑　税梦玲
　责任印制　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：15.75　　　　2017 年 3 月第 1 版
　字数：373 千字　　　2017 年 3 月北京第 1 次印刷

定价：35.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

前　言

本书是同济大学数学系多年教学经验的总结，编者参考了近年来国内外出版的多本同类教材，吸取它们在内容安排、例题配置、定理证明等方面的优点，并结合工科院校的实际需求来编写，形成了本书如下特点.

一、优化编排，重点突出

概率部分从随机事件到随机变量，着重强调一维随机变量和多维随机变量这两部分内容，把常用的数字特征归纳总结在同一章中，而将大数定律和中心极限定理单独成章. 统计部分着重强调参数的点估计和区间估计，假设检验可作为课外选读.

二、难度降低，帮助理解

在满足教学基本要求的前提下，适当减少或降低了理论推导的要求，注重用生动浅显的方式对概念进行解释. 对所有章节中的部分性质或定理进行了处理. 例如，分布函数的性质的证明没有列出，取而代之的是通过例题图像来进行说明，让初学者可以更直观地学习. 另外，对选学内容加 * 号处理，如泊松定理的证明.

三、习题丰富，题型多样

每小节和每章结束时均设置练习题，每小节的习题与该小节内容匹配，用以帮助理解和巩固基本知识；每章的测试题在题型上更为多样，且难度高于每小节的习题，用于帮助学生提高. 另外，本书将部分考研真题编入测试题中，供学有余力的学生选做.

四、归纳总结，提升素养

设置章总结，并通过微课视频的形式呈现. 章总结阐明了这一章内容的重点和基本要求，对某些重点概念和方法作了进一步的阐述，并指出了学习该章内容时应注意的地方. 章总结能帮助学生系统性地归纳该章所学重点，起到提纲挈领的作用. 另外，每章还设置了拓展阅读栏目，在增强趣味性的同时让学生能够了解学科背景.

本书由杨筱菡编写第一、二、六、七、八章，由王勇智编写第三、四、五章，并由杨筱菡完成统稿. 在编写过程中，钱伟民教授耐心细致地审阅了本书的初稿，提出了很多宝贵建议，同济大学数学系殷俊峰教授和概率统计教研组多位老师也提供了很多的帮助，在此表示衷心感谢. 另外，南京理工大学侯传志和南京师范大学李启才对书稿进行了审查，提出了很多可行的修改意见，也在此表示感谢.

编　者

2016 年 4 月

目　录

第一章　随机事件与概率

[课前导读]

这一章要介绍随机事件的定义，以及怎样求解随机事件发生的概率问题. 正确计数对概率求解十分重要，需要回忆和计数相关的排列组合的基础知识.

加法原理：完成一件事，可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法.

乘法原理：完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第一步时有 m_1 种不同的方法，做第二步时有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法.

组合：从 n 个不同的元素中任取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个不同元素，不考虑次序将它们并成一组，称之为组合. 所有不同的组合种数记为 $\binom{n}{r}$ 或 C_n^r.

排列：从 n 个不同的元素中任取 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 个不同元素，按一定的顺序排成一列，称之为排列. 所有不同的排列种数记为 A_n^r.

组合数的计算公式：$\binom{n}{r}=C_n^r=\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}$.

排列数的计算公式：$A_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$.

第一节　随机事件及其运算

一、随机试验

在自然界和人类活动中，发生的现象多种多样，偶数能被 2 整除，函数在间断处不存在导数，课程结束时要通过考试测评，必修课程不及格要重修等. 这一类现象在一定条件下必然发生，因此称这类现象为**确定性现象**. 一个新生婴儿可能是男孩也可能是女孩，期末考试可能及格也可能不及格，一条高速公路上一天之内经过的车辆数量等，在这些现象中，事先无法预知会出现哪个结果，因此称这类结果不确定的现象为**随机现象**. 概率论便是一门研究随机现象的统计规律性的数学学科. 随机现象在一次试验中呈现不确定的结果，而在大量重复试验中结果将呈现某种规律性，例如相对比较稳定的性别比例，这种规律性称为**统计规律性**. 为了研究随机现象的统计规律性，就要对客观事物进行观察，观察的过程叫**随机试验**(简称**试验**). 例如，为了验证骰子是否均匀，可以将这颗骰子反复地投掷并记录其结果. 本小节将讨论概率论中的随机试验，随机试验有以下三个特点.

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一种，但是试验之前必须明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验将会出现什么样的结果是事先无法预知的.

例 1 随机试验的例子：

(1) 抛掷一枚均匀的硬币，观察其正反面出现的情形；

(2) 抛掷一枚均匀的骰子，观察其出现的点数；

(3) 某快餐店一天内接到的订单量；

(4) 某航班起飞延误的时间；

(5) 一支正常交易的 A 股股票每天的涨跌幅.

二、样本空间

随机试验的一切可能结果组成的集合称为**样本空间**，记为 $\Omega=\{\omega\}$，其中 ω 表示试验的每一个可能结果，又称为**样本点**，即样本空间为全体样本点的集合.

例 2 下面给出例 1 中随机试验的样本空间：

(1) 抛掷一枚均匀硬币的样本空间为 $\Omega_1=\{H, T\}$，其中 H 表示正面朝上，T 表示反面朝上；

(2) 抛掷一枚均匀骰子的样本空间为 $\Omega_2=\{1, 2, \cdots, 6\}$；

(3) 某快餐店一天内接到的订单量的样本空间为 $\Omega_3=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$；

(4) 某航班起飞延误时间的样本空间为 $\Omega_4=\{t: t\geqslant 0\}$；

(5) 一支正常交易的 A 股股票每天涨跌幅的样本空间为 $\Omega_5=\{x: -10\%\leqslant x\%\leqslant 10\%\}$.

从这个例子中可以看出，样本空间中的元素可以是数，也可以不是数. 从样本空间中含有样本点的个数来看，可以是有限个也可以是无限个；可以是可列个也可以是不可列个. 例如，Ω_1 和 Ω_2 中样本点的个数是有限个，Ω_3、Ω_4 和 Ω_5 中样本点的个数是无限个；Ω_1、Ω_2 和 Ω_3 中样本点的个数是可列个，而 Ω_4 和 Ω_5 中样本点的个数是不可列个.

三、随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时，每一次试验都只能出现 Ω 中的某一个结果 ω，各个可能结果 ω 是否在一次试验中出现是随机的. 在随机试验中，常常会关心其中某一些结果是否出现. 例如，抛掷一枚均匀的骰子，关心掷出的点数是否是奇数；航班起飞关心延误时间是否超过 3 个小时等. 这些在一次试验中可能出现，也可能不出现的一类结果称为**随机事件**，简称为**事件**，随机事件通常用大写字母 A，B，C，…表示.

随机事件

如上述，抛掷一枚均匀的骰子，关心掷出的点数是否是奇数，定义 A=“掷出的点数是奇数”即是一个可能发生也可能不发生的随机事件，可描述为 $A=\{1, 3, 5\}$，它是样本空间 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$ 的一个子集. 所以，从集合的角度来说，样本空间的部分样本点组成的集合称为随机事件.

在事件的定义中，注意以下几个概念.

(1) 任一随机事件 A 是样本空间 Ω 的一个子集.

(2) 当试验的结果 ω 属于该子集时，就说事件 A 发生了. 相反地，如果试验结果 ω 不属于该子集，就说事件 A 没有发生. 例如，如果掷骰子掷出了 1，则事件 $A=\{1, 3, 5\}$ 发生，如果掷出 2，则事件 A 不发生.

(3) 仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**.

(4) 样本空间 Ω 也是自己的一个子集，所以它也称为一个事件. 由于 Ω 包含所有可能的试验结果，所以 Ω 在每一次试验中一定发生，又称为**必然事件**.

(5) 空集 $\varnothing$ 也是样本空间 Ω 的一个子集，所以它也称为一个事件. 由于 $\varnothing$ 中不包含任何元素，所以 $\varnothing$ 在每一次试验中一定不发生，又称为**不可能事件**.

例 3　抛掷一枚均匀的骰子的样本空间为 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 6\}$；

随机事件 A="出现 6 点"$=\{6\}$；

随机事件 B="出现偶数点"$=\{2, 4, 6\}$；

随机事件 C="出现的点数不超过 6"$=\{1, 2, \cdots, 6\}=\Omega$，即一定会发生的必然事件；

随机事件 D="出现的点数超过 6"$=\varnothing$，即一定不会发生的不可能事件.

四、随机事件间的关系与运算

众所周知，集合之间有各种关系，是可以进行运算的. 因此，在随机事件之间也可以讨论相互的关系，进行相应的运算.

1. 给定一个随机试验，Ω 是它的样本空间，A，B，C，…都为 Ω 的子集，随机事件间的关系有以下几种.

(1) 如果 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，则称事件 A 包含在 B 中(或称 B 包含 A)，如图 1.1 所示. 从概率论的角度来说：事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

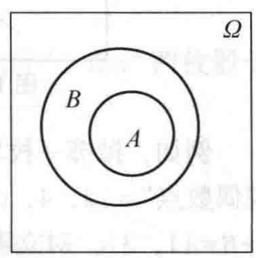

图 1.1　$A\subset B$

在例 3 中，事件 A="出现 6 点"的发生必然导致事件 B="出现偶数点"的发生，故 $A\subset B$.

(2) 如果 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 从概率论的角度来说：事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且 B 发生必然导致 A 发生，即 A 与 B 是同一个事件.

(3) 如果 A 与 B 没有相同的样本点，则称事件 A 与 B 互不相容(或称为互斥)，如图 1.2 所示. 从概率论的角度来说：事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

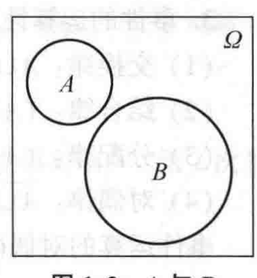

图 1.2　A 与 B 互不相容

例如，在抛掷一枚均匀骰子的试验中，"出现 6 点"与"出现奇数点"是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生.

2. 与集合的运算一样，随机事件的运算也有并、交、差和余四种运算.

(1) 事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，如图 1.3 所示，表示由事件 A 与 B 中所有样本点组成的新事件. 从概率论的角度来说：事件 A 与 B 中至少有一个发生.

(2) 事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$(或 AB)，如图 1.4 所示，表示由事件 A 与 B 中公共

的样本点组成的新事件. 从概率论的角度来说：事件 A 与 B 同时发生.

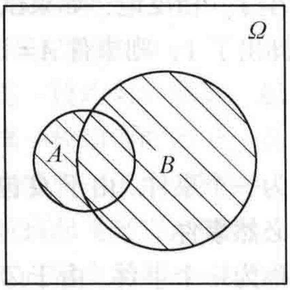

图 1.3　$A\cup B$

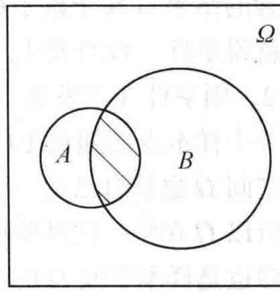

图 1.4　$A\cap B$

（3）事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$，如图 1.5 所示，表示由在事件 A 中且不在事件 B 中的样本点组成的新事件. 从概率论的角度来说：事件 A 发生且 B 不发生.

（4）事件 A 的对立事件(或称为逆事件、余事件)，记为 $\overline{A}$，如图 1.6 所示，表示由 Ω 中且不在事件 A 中的所有样本点组成的新事件，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 从概率论的角度来说：事件 A 不发生.

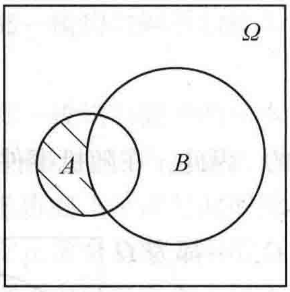

图 1.5　$A-B$

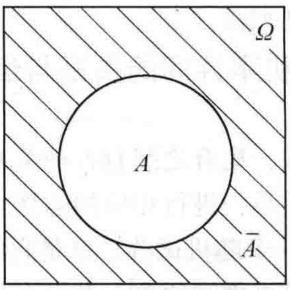

图 1.6　$\overline{A}$

例如，抛掷一枚均匀骰子，记事件 A=“出现点数不超过 3”$=\{1,2,3\}$，事件 B=“出现偶数点”$=\{2,4,6\}$，则并事件 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$，交事件 $A\cap B=\{2\}$，差事件 $A-B=\{1,3\}$，对立事件 $\overline{A}=\{4,5,6\}$.

从随机事件间的关系和运算中可以看出：

（1）对立事件一定是互不相容的事件，即 $A\cap\overline{A}=\varnothing$，但互不相容事件不一定是对立事件；

（2）根据差事件和对立事件的定义，事件 A 与 B 的差还可以表示成 $A-B=A\overline{B}$；

（3）必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

3. 事件的运算性质，如集合的运算性质一样满足下述定律.

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

（4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

事件运算的对偶律是非常有用的公式，且以上的定律都可以推广到任意多个事件.

例 4　用事件 A，B，C 的运算关系式表示下列事件，则

（1）A 出现，B，C 都不发生(记为 E_1)；

（2）所有三个事件都发生(记为 E_2)；

（3）三个事件都不发生(记为 E_3)；

(4) 三个事件中至少有一个发生(记为 E_4);

(5) 三个事件中至少有两个发生(记为 E_5);

(6) 至多一个事件发生(记为 E_6);

(7) 至多两个事件发生(记为 E_7).

解 (1) $E_1=A\bar{B}\,\bar{C}$;　　(2) $E_2=ABC$;

(3) $E_3=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;　　(4) $E_4=A\cup B\cup C$;

(5) $E_5=AB\cup AC\cup BC$;　　(6) $E_6=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\,\bar{C}\cup \bar{A}B\,\bar{C}\cup \bar{A}\bar{B}C=\bar{E}_5=\overline{AB\cup AC\cup BC}$;

(7) $E_7=\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω 与随机事件 A:

(1) 抛掷三枚均匀的硬币;事件 A=“至少两枚硬币是正面朝上”;

(2) 对一密码进行破译,记录破译成功时总的破译次数,事件 A=“总次数不超过 8 次”;

(3) 从一批手机中随机选取一个,测试它的电池使用时间长度;事件 A=“使用时间在 72 到 108 小时之间”.

2. 抛掷两枚均匀骰子,观察它们出现的面.

(1) 试写出该试验的样本空间 Ω;

(2) 试写出下列事件所包含的样本点:A=“两枚骰子上的点数相等”,B=“两枚骰子上的点数之和等于 8”.

3. 在以原点为圆心的一单位圆内随机取一点.

(1) 试描述该试验的样本空间 Ω;

(2) 试描述下列事件所包含的样本点:A=“所取的点与圆心的距离小于 0.5”,B=“所取的点与圆心的距离小于 0.5 且大于 0.3”.

4. 袋中有 10 个球,分别编有号码 1~10,从中任取 1 球,设 A=“取得球的号码是偶数”,B=“取得球的号码是奇数”,C=“取得球的号码小于 5”,问下列运算表示什么事件:

(1) $A\cup B$;(2) AB;(3) AC;(4) $\overline{AC}$;(5) $\bar{A}\cap\bar{C}$;(6) $\overline{B\cup C}$;(7) $A-C$.

5. 在区间[0,10]上任取一数,记 $A=\{x:1<x\leqslant 5\}$,$B=\{x:2\leqslant x\leqslant 6\}$,求下列事件的表达式:

(1) $A\cup B$;(2) $\bar{A}B$;(3) $A\bar{B}$;(4) $A\cup\bar{B}$.

6. 一批产品中有合格品和废品,从中有放回地抽取三个产品,设事件 A_i=“第 i 次抽到废品”,试用 A_i 的运算表示下列各个事件:

(1) 第一次、第二次中至少有一次抽到废品;

(2) 只有第一次抽到废品;

(3) 三次都抽到废品;

(4) 至少有一次抽到合格品;

(5) 只有两次抽到废品.

7. 试给出下列事件的对立事件：

(1) 事件 A=“三门课程的考核成绩都为优秀”；

(2) 事件 B=“三门课程的考核成绩至少一门为优秀”.

8. 证明下列等式：

(1) $B=AB\cup\bar{A}B$；

(2) $A\cup B=A\cup\bar{A}B$.

第二节 概率的定义及其性质

在 n 次试验中如果事件 A 出现了 n_A 次，则称比值$\frac{n_A}{n}$为这 n 次试验中事件 A 出现的频率. 记为$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$，n_A 称为事件 A 发生的频数. 概率的统计定义为：随着试验次数 n 的增大，频率值逐步“稳定”到一个实数，这个实数称为事件 A 发生的概率.

1933 年柯尔莫哥洛夫(苏联)首次提出了概率的公理化定义，这是概率论发展史的第一个里程碑，有了这个公理化定义后，概率论得到了迅速发展. 概率的公理化定义如下.

定义 设任一随机试验 E，Ω 为相应的样本空间，若对任意事件 A，有唯一实数 $P(A)$ 与之对应，且满足下面条件，则数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率：

(1) **非负性公理** 对于任意事件 A，总有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性公理** $P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性公理** 若 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

由概率的三条公理，可以得到以下概率的一些重要基本性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证明 由可列可加性公理，不妨取 $A_i=\varnothing$，$i=1$，2，…，则

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由非负性公理，$P(\varnothing)\geqslant 0$. 因此，由上述可得 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 设 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容的事件，则有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明 在可列可加性公理中，不妨取 $A_i=\varnothing$，$i=n+1$，$n+2$，…，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$$

得证.

性质 3 对任意事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证明 因为事件 A 与 $\bar{A}$ 互不相容，且 $\Omega=A\cup\bar{A}$，由规范性公理和性质 2 可知，$P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A})=1$，由此得证.

这个性质告诉我们，有时某些事件的概率直接求解较为复杂，而考虑其对立事件则相对比较简单，对这一类的问题可以利用该性质求解.

例 1(生日问题) $n(n\leqslant 365)$ 个人中至少有两个人的生日相同的概率是多少?

解 设一年以 365 天计，记事件 A 表示"n 个人中至少有两个人的生日相同"，对该事件的讨论非常复杂，故我们考虑其对立事件 $\bar{A}$，即可以表示为"n 个人的生日全不相同"，事件 $\bar{A}$ 的发生过程比较单一，故其概率的求解就很简单，概率为

$$P(\bar{A})=\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\cdots\cdot(365-(n-1))}{365^n},$$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\cdots\cdot(365-(n-1))}{365^n}.$$

通过计算，我们发现有趣的是，当 $n=23$ 时，$P(A)>0.5$；当 $n=60$ 时，n 个人中至少有两个人的生日相同的概率约为 0.9922. 也就是说，当有随机的 60 个人聚在一起，则他们中至少有两个人的生日在同一天的可能性非常大；随着 n 的增大，这个概率将更大. 在这个例子中，当 n 很大时，n 个人的生日全不相同可以视为小概率事件，人们在长期的实践中总结得到"概率很小的事件在一次试验中实际上几乎是不发生的"(称之为实际推断原理)，因此可以说，在实际情况中，虽然 n 个人中至少有两个人的生日相同的概率不为 1，但几乎一定会发生.

性质 4 若事件 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明 因为事件 $A\subset B$，所以 $B=A\cup(B-A)$，且 A 与 $B-A$ 互不相容，由性质 2 有限可加性得

$$P(B)=P(B-A)+P(A),$$

即得

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

推论 若事件 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证明 由非负性公理得 $P(B-A)=P(B)-P(A)\geqslant 0$，因此 $P(A)\leqslant P(B)$.

值得注意的是，这个推论的逆命题不一定成立，即使 $P(A)\leqslant P(B)$，也无法判断事件 A 与 B 的关系.

性质 5(减法公式) 设 A，B 为任意事件，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

证明 $A-B=A-AB$，且 $AB\subset A$，由性质 4 得

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB).$$

性质 6(加法公式) 设 A，B 为任意事件，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 A 与 $B-AB$ 互不相容，由性质 2 有限可加性得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

我们还可以将性质 6 的加法公式推广到多个事件的情况. 例如，设 A，B，C 为任意的三个事件，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

更一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为任意的 n 个事件，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 2 已知事件 A，B，$A\cup B$ 的概率依次为 0.2，0.4，0.5，求概率 $P(A\overline{B})$.

解 由性质 6 的加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 及已知条件可得 $0.5=0.2+0.4-P(AB)$，由此解得 $P(AB)=0.1$.

再由性质 5 的减法公式得

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2-0.1=0.1.$$

例 3 设事件 A、B、C 为三个随机事件，已知 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，$P(AB)=0$，$P(BC)=P(AC)=0.1$，则 A、B、C 至少发生一个的概率是多少？A、B、C 都不发生的概率是多少？

解 因为 $ABC\subset AB$，由性质 4 的推论 $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$ 及非负性公理 $P(ABC)\geqslant 0$，可知 $P(ABC)=0$. 再由加法公式，A、B、C 至少发生一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.2+0.3+0.4-0-0.1-0.1+0=0.7.\end{aligned}$$

又因为"A、B、C 都不发生"的对立事件是"A、B、C 至少发生一个"，所以

$$P(\overline{ABC})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=0.3.$$

习题 1-2

1. 已知事件 A，B 有包含关系，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.6$，求：

(1) $P(\overline{A})$，$P(\overline{B})$；(2) $P(A\cup B)$；(3) $P(AB)$；(4) $P(\overline{B}A)$，$P(\overline{A}B)$；(5) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

2. 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，试求：

(1) $P(AB)$；(2) $P(A-B)$；(3) $P(B-A)$.

3. $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，分别在(1) A，B 互不相容；(2) A，B 有包含关系情况时，求 $P(A-B)$.

4. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=0.25$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$. 求：

(1) $P(A\cup B)$；(2) $P(A\cup B\cup C)$；(3) $P(\overline{B}\cap\overline{C})$.

5. 设随机事件 A，B，C 的概率都是 1/2，且 $P(ABC)=P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{3}$，求 $P(ABC)$.

6. 设 A，B 是两个事件，已知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，求：

(1) 在什么条件下，$P(AB)$ 取最大值？最大值是多少？

(2) 在什么条件下，$P(AB)$ 取最小值？最小值是多少？

7. 对任意的随机事件 A，B，C，证明：

(1) $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$；

(2) $P(AB)+P(AC)+P(BC)\geqslant P(A)+P(B)+P(C)-1$.

第三节 等可能概型

在概率论发展的历史上，最先研究的是一类最直观、最简单的随机现象. 在这类随机现象中，样本空间中的每个基本事件发生的可能性都相等，这样的数学模型我们称之为等可能概型. 其中，当样本空间只包含有限个不同的可能结果(即样本点)，如抛掷一枚均匀的硬币、抛掷一枚均匀的骰子等，研究这一类随机现象的数学模型我们称之为古典概型. 而当样本空间是某个区域(可以是一维区间、二维平面或三维空间)，如搭乘地铁等待时间、蒲丰投针问题等，研究这一类随机现象的数学模型我们称之为几何概型.

一、古典概型

一般地，古典概型的基本思路如下：

(1) 随机试验的样本空间只有有限个样本点，不妨记作 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

(2) 每个基本事件发生的可能性相等，即

$$P(\{\omega_1\})=\cdots=P(\{\omega_n\})=\frac{1}{n},$$

若随机事件 A 中含有 n_A 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所有样本点的个数}}=\frac{n_A}{n}.$$

古典概型是概率论发展初期确定概率的常用方法，所得的概率又称为古典概率. 在古典概型中，关键在于计算样本空间及事件 A 中样本点的个数，所以在计算中经常用到排列组合的计算工具.

例 1 抛掷两枚均匀的骰子，观察出现的点数，设事件 A 表示“两个骰子的点数一样”，求 $P(A)$.

解 按照定义，样本空间 Ω 是由两枚骰子可能出现的所有不同结果组成的. 因此，$\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,6)\}$，共包含 36 个样本点，而 $A=\{(1,1),(2,2),\cdots,(6,6)\}$,共 6 个样本点，因而 $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

例 2(抽样模型) 已知 N 件产品中有 M 件是不合格品，其余 $N-M$ 件是合格品. 今从中随机地抽取 n 件. 试求：

(1) 不放回抽样 n 件中恰有 k 件不合格品的概率；

(2) 有放回抽样 n 件中恰有 k 件不合格品的概率.

解 抽样方式有两种：有放回抽样和不放回抽样，有放回抽样是抽取一件后放回，再抽取下一件，如此重复至抽取 n 件完成；不放回抽样是抽取一件后不放回，再抽取下一件，如此重复.

(1) 先计算样本空间 Ω 中样本点的总数，因为是不放回抽样，从 N 件抽取 n 件，所以

样本点的总数为$\binom{N}{n}$，因为是随机抽样的，故这$\binom{N}{n}$个样本点是等可能发生的.

再计算事件 A 中样本点的个数，因为事件 A 要求 n 件中恰有 k 件不合格品，即必须从 M 件不合格品中选取 k 件不合格品，还要从 $N-M$ 件合格品中选取 $n-k$ 件合格品，根据乘法原理，事件 A 中含有$\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$个样本点，因此可得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

(2) 如果是有放回抽样，每一次都是从 N 件抽取 1 件，共抽 n 次，故样本空间 Ω 中样本点的总数为 N^n，因为是随机抽样的，故这 N^n 样本点还是等可能发生的.

n 件中恰有 k 件不合格品，可以看成在 n 次抽取过程中有 k 次抽到不合格品，考虑到这 k 次可以在总的 n 次中的任何 k 次抽取中得到，故有$\binom{n}{k}$种不同的出现顺序，每次抽到不合格品都是从 M 件不合格品中选取 1 件不合格品，故有 M^k 种，还要从 $N-M$ 件合格品中选取 $n-k$ 次合格品，故有$(N-M)^{n-k}$种，根据乘法原理和加法原理，事件 A 中含有$\binom{n}{k}M^k(N-M)^{n-k}$个样本点，因此可得事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}M^k\,(N-M)^{n-k}}{N^n}.$$

例 3(抽奖(抓阄)模型)　今有某公司年会的抽奖活动，设共有 n 张券，其中只有一张有奖，每人只能抽一张，设事件 A 表示为“第 k 个人抽到有奖的券”，试在有放回、不放回两种抽样方式下，求 $P(A)$.

解　在有放回情形中，第 k 个人抽与第 1 个人抽情况相同，因而所求概率为$\frac{1}{n}$.

在不放回情形中，样本空间的样本点总数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$，而事件 A 的样本点个数为$(n-1)(n-2)\cdots(n-1-(k-1)+1)\cdot 1$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

值得注意的是，此概率值与抽样次数 k 无关. 尽管每个人抽奖先后次序不同，但是每个人中奖的概率是一样的，大家机会相同. 另外还值得注意的是，有放回抽样和不放回抽样情况下概率是一样的.

二、几何概型

几何概型是古典概型的推广，保留每个样本点发生的等可能性，但去掉了 Ω 中包含有限个样本点的限制，即允许试验可能结果有无穷不可列个.

一般地，几何概型的基本思路如下：