分析動力學

陳 濱 編著

臺灣高等教育出版社印行

分析動力學

陳 濱 編著

臺灣高等教育出版社印行

分析動力學

著作者：陳　濱
發行者：臺灣高等教育出版社
地　址：台北中和興南路二段34巷22弄1號
電　話：(02)940-4016・940-2430
登記證：新聞局局版台業字第肆肆玖玖號
印刷廠：台元彩色印刷股份有限公司
總經銷：學英文化事業有限公司
地　址：台北新店民權路130巷6號
電　話：912-7307
中華民國七十八年八月三十日台灣發行一版甲數

 定價：370元

序

由Lagrange和Hamilton 所奠基的分析動力學（亦稱爲“分析力學”或“經典動力學”）是一門已經成熟發展了的學科。和目前興起的種種新學科相比，它確實顯得古老了。但是，這門古老的學科在今天人類認識和改進自然界的爭鬥中，其價值並沒有減少。生產和科學的實踐還正在提出一系列的新課題，迫切地需要這門學科加以研究。

分析動力學作爲經典物理學普遍而統一的動力學理論一直很引人注目。它是經典物理的基石之一，同時也是很多數學理論的發源地和恰當的應用對象。成熟發展的經典動力學理論給現代物理學的發展準備好了階梯。分析動力學的研究不僅有理論價值，也有著巨大的實用意義。它的研究一方面提供了現代應用力學以及動力學一般理論最基本的原理和方法，另一方面，它本身也給出了在振動、穩定性、剛體與剛體系統、天體與宇航器的運動等領域中一系列有實用價值的成果。

正是由於這個原因，目前不少科系的大學本科教學計劃中都安排有分析動力學的初步內容，而在高年級選修課和研究生課程中則有著分析動力學更深入更完備的論述。作爲這種較深入課程用的教材或專著，在國外已有不少，但國內出版的却還不多。作者在給北京大學力學系一般力學與控制理論科系研究生講授分析動力學課程時只好自編講義。本書就是在這個講義的基礎上修改補充而成的。爲了不和本科生教學計劃中的內容有太多的重複，有關用第二類Lagrange方程解題的部分本書就不再發揮，而把重點放在基本理論的發展上。由於最近幾年關於非綫性非完整系統動力學的研究，在分析動力學的某些基本概念問題上產生了不少爭論，而在這些爭論問題上的觀點顯然會影響著我們對分析動力學基本理論的陳述。在本書中，我們論證了我們

的觀點和方法。但只要有可能，我們將盡量保持著傳統的敍述方式。關於應用課題，本書對振動，陀螺，車輛動力學，宇航器以及天體力學給予了特別的注意。在本書的基本內容中，我們只使用比較普及的數學工具，這是爲了適應目前一般非數學科系學生的普遍情況。但是在某些非基本的補充材料中，我們則比較自由地使用一些更深入的數學工具。在這樣做的時候，將盡可能給予說明或註明出處，以方便於讀者的理解。

作者感謝汪家訸教授，黃克累教授，李灝教授，呂茂烈教授，他們在百忙中審閱了本書初稿並提出了寶貴的修改意見。我的老師錢敏教授審閱了全書。對於他的指導和幫助，作者表示深切的謝意。本書的習題是選編的不太成熟，其中一部分是自編的，一部分來自其他的著作①。對於這些著作的作者、譯者，這裡一併誌謝。

陳　濱

於北京大學

---

①例如，Е.С.Пятницкий 等編：«Сборник по аналитической механике», Издательство «Наука», 1980，劉正福，王忠禮譯，華東工程學院印，1982年

緒　論

觀察自然界或研究工程技術，機械運動是一個經常碰到的普遍現象。研究物質機械運動和平衡的規律是力學的任務①。

項目 階段	時　期	主要人物及工作	主要特徵
第一階段	1687年	牛頓：≪自然哲學的數學原理≫	力學和分析數學的開端
	17世紀到18世紀的一百年	Bernoulli, Euler, d'Alembert等	數學和力學發展的黃金時代
第二階段	1788年	Lagrange：≪分析力學≫	創建了分析的和體系的力學理論——Lagrange力學
	18世紀到19世紀的一百年	Laplace, Gauss, Hamilton, Jacobi, Hertz, Liouville, Poincaré, Maxwell等	分析動力學的成熟發展與在物理學上碰到困難
第三階段	1881年	Michelson實驗與Einstein的狹義相對論	現代物理學的開端
	19世紀到20世紀的一百年	Lorentz, Einstein Planck, Schrödinger, Heisenberg等 Plandtl, 居烏卡夫斯基 Saint-Venant, Лякунов等	相對論力學與量子力學的發展 現代應用力學的發展

①當然，這是就力學的狹義理解而言。

除史前期以外，力學學科的開始可以算自 1687 年牛頓（ I. Newton ）的《自然哲學的數學原理》一書的出版。這本書，Lagrange 稱之爲“人類智慧的最偉大的產物”。從那時至今，正好約三百年。非常湊巧，我們可以以一百年爲一段，把這三百年分成三個階段。上頁的表格粗略地回顧了這三百年力學發展各個階段的特徵。

作爲力學學科的開創人物——牛頓，他的重大貢獻是：找到了制約自然界物質機械運動的相當普遍的規律，同時也發明了研究這種規律的數學方法——微積分，也就是今天發展成爲“分析”的數學學科。牛頓的原理及其方法的成就使得當時科學界不少人產生這樣的觀念：好像已經找到了制約自然界一切運動的根本規律，一切都可以納入牛頓的模式來加以理解和認識了。

但是，人們在研究實踐中發現問題不是那麼簡單。實際的困難至少來自這三個方面：

1　牛頓的模式把影響物體運動的原因統統歸結爲力。而實際上，大量的運動是受約束的運動。原則上說，約束對運動的作用雖確可以歸結爲力，但這些力就像未知的運動一樣，是有待決定的。因此，如果局限在牛頓的力學模式中，尋求受約束系統的運動就產生了困難。換句話說，牛頓的模式對研究受約束系統的力學是不方便的。

僅從概念上說，約束（至少是幾何約束）的作用可以看成是沿約束面法向強度極大的吸大場作用的極限（見 1.5.1）。採用這種看法似乎可以不把約束作爲獨立的動力學基本因素，而僅研究牛頓的模式。但可惜的，這種想法對動力學的研究來說並不富有成果。動力學也可以走另一個極端，這就是Hertz 的理論。他完全摒棄力這個概念，而僅以約束爲基礎。這樣的做法也是不自然的。Lagrange走的是中間道路，在他的體系中，力和約束都作爲動力學的基本因素。既承認力的作用，又承認約束的作用。我們今天的分析動力學仍然本著 Lagrange 的這個思想。

2　數學的困難：建立了動力學原理或者建立了系統的動力學方程，並不是研究的終結。因爲我們並沒有一般的辦法去找到動力學方

程的積分。這就像微分方程理論中Liouville關於Riccati方程的研究結果一樣①，使得動力學方程的求解問題成爲一個一直需要研究的課題。在力學上，著名的結果是關於重剛體繞不動點的傳動問題和三體問題，在一般情況下找不到足夠的第一積分。這對於我們原來的願望來說，是一個重大的打擊。如何千方百計地去尋找較多的動力學方程積分以及如何最好地利用這些積分，成爲古典數學力學們努力的重要目標。在找不到動力學方程組足夠的第一積分的情況下，如何研究力學系統的運動特性，如何定性地研究解的結構，如何定量地進行計算，這構成近代數學、力學中極爲重要的課題。特別是分析動力學位形空間所具有的微分流形構造以及近年來關於奇異吸引子的發現，使得這些研究更具有豐富的色彩。

3. 物理上的困難：當人們天眞地想把牛頓的模式拿去研究光、電磁、微觀粒子等現象時，碰到了像接近光速的相對論效應，微觀粒子的波粒二象性等難題。在這種情況下，作爲整個經典動力學的基本觀念：時間的絕對性與時空分離的觀念，質能分離的觀念，運動的確定性描述觀念等等都受到了挑戰。在人們不得不承認新的物理事實之後，就極需要在已經成熟的經典力學理論中尋找那樣一些理論的形式和方法，使得它能夠順利地擺脫經典概念的束縛，而且成爲自然地過渡向非經典力學的橋樑。經典力學的分析動力學形式爲這種過渡作出了最好的準備。

分析動力學是數學、力學研究者們在克服上述諸困難中工作成果的部分記錄。1788年，也就是牛頓的經典著作發表之後約一百年，Lagrange完成了他的著作《分析力學》。這開辟了經典力學的第二個階段。這本著作在很大的程度上克服了牛頓力學上述的第一個困難（並沒有完全克服。在Lagrange的著作中還沒有非完整約束的概念。非完整系統動力學是後來研究的成果），在一定的程度上克服了牛頓

①參閱秦元勛，《微分方程所定義的程分曲綫》，上册，第7頁，科學出版社，北京，1959.

力學的第二個困難。Lagrange得到了力學系統在完全一般性廣義座標描述下具有不變形式的動力學方程組，並突出了能量函數的意義。Lagrange系統實際上概括了比牛頓力學要廣泛得多的系統，同時它也提供了對力學系統的動力學，穩定性，振動過程作一般性研究的可能。在這方面的研究中，Liouville, Routh, Rayleigh, Ляпунов, Whittaker等人的成果最爲著名。這些成果不但構成了Lagrange力學的重要內容，而且在更廣泛的系統中（例如電氣系統、控制系統等等）得到應用。Lagrange力學的另一重要發展是研究完整系統。特別是非綫性非完整系統的研究，導致了對分析動力學一系列基本概念。諸如虛位移，虛速度，d∂交換性，變分原理等作深入的探討。非完整系統在工程技術上的重要性也促進了這種研究的發展。這種研究一直延伸到現在，並在最近一些年來受到很大的重視①

經典力學發展的第三階段是和Hamilton的工作分不開的。Hamilton對光學和力學之間深刻連繫的思想促進了他對經典動力學作出了創造性的研究。他的成就概要爲兩點：第一，力學的原理不僅可以按牛頓的方式來敍述，也可以按某種作用量（數學上是某種泛函）的逗留值（有時是極小值）方式來敍述。第二，力學的狀態描述和動力學方程可以找到一種優美的正則形式以及等價的"波動形式"，這些形式有著極好的數學性質。Jacobi繼續了Hamilton的研究。Hamilton-Jacobi方法不僅僅開辟了解決天體力學以及物理學中一系列重要的動力學問題的途徑，同時作爲波動力學的先導，給量子力學的發展提供了啓示。按Hamilton所描述的經典力學原理和動力學方程的形式，最適宜於成爲向現代物理學過渡的橋樑。在這方面，我們只要舉出最小作用量原理提供了建立相對論力學和量子力學最簡潔的而富有概括性的出發點，以及Schrodinger方程、Heisenberg方程和Hamilton力學的緊密連繫就可以說明。即使局限在經

①見參考文獻〔4〕,〔5〕,〔11〕,〔12〕,〔13〕.

典範圍內，Hamilton體系所包含的動力學現象也有著異常豐富的研究前景。非保守的經典動力學系統中奇異吸引子的發現以及有關所謂“渾沌”（Chaos）現象的研究模糊了確定性與隨機性的界限，這是近年來關於動力學理論有基本意義的成果之一①。

最近一百年來現代物理學的發展只是使經典力學失去了那種誤認爲可以“統率一切”的虛假的光輝，但並沒有使它失去巨大的應用價值。近一百年來現代應用力學的迅速發展就是明證。客觀世界中宏觀物質規律的錯綜複雜性以及力學方程組求解的困難，提供了應用力學長期研究的領域。分析動力學提供了這種應用力學研究最基本的原理和方法。由分析動力學研究所直接生長起來的關於振動、穩定性、陀螺、剛體與剛體系統、宇航器與天體力學的理論已經成爲相當寬廣的領域，而非綫性力學，基於變分原理的直接法，可控體或生物體的動力學，以及有限自由度體系和連續體動力學之間的連繫與過渡等等都正在受到很大的重視。有關這些問題的研究一定能更加豐富分析動力學的內容並大大開闊它的應用範圍。

①見參考文獻〔14〕，〔15〕，〔16〕.

目　錄

第三章 非完整系動力學……………………………… 261