



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

工程电磁场数值 分析与优化设计

Numerical Analysis and Optimization of
Engineering Electromagnetic Fields

谢德馨 杨仕友 编著

 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

工程电磁场数值分析 与优化设计

谢德馨 杨仕友 编著

机械工业出版社

本书吸纳了计算电磁学的最新研究成果，系统地阐述了工程电磁场数值分析与优化设计的基本原理和方法。全书分为3篇，共17章，其中工程电磁场正问题主要包括节点有限元法、棱边有限元法、有限体积法和无网格法；工程电磁场耦合问题涵盖电磁场与电路系统和机械运动的耦合；工程电磁场优化设计问题介绍了进化类标量和矢量优化算法、与随机化优化算法相结合的表面响应模型、鲁棒优化设计理论与方法，以及电磁场优化设计的最新进展——拓扑优化设计。书中包含若干典型算例，每章后面附有参考文献，书末附有典型计算机源程序，包括求解稀疏对称方程组的ICCG法源程序、简单禁忌搜索算法程序，以及简单一维伽辽金无单元法程序。

本书既可作为高等工科院校电气、电子工程学科的研究生深层次的教学或参考学习用书，也可供从事电磁场理论与应用研究的教师、科研工作者和工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程电磁场数值分析与优化设计/谢德馨，杨仕友编著. —2版. —北京：机械工业出版社，2017.4

ISBN 978-7-111-56340-2

I. ①工… II. ①谢… ②杨… III. ①电磁场—数值分析②电磁场—最优设计 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 051129 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：王雅新 责任编辑：王雅新 李 乐 刘丽敏

责任校对：刘志文 封面设计：陈 沛

责任印制：李 昂

三河市宏达印刷有限公司印刷

2017 年 7 月第 2 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 24.5 印张 · 599 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-56340-2

定价：59.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线：010-88379833 机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649 机工官博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网：www.golden-book.com

前 言

本书在2009年1月机械工业出版社出版的《工程电磁场数值分析与综合》的基础上，与时俱进地集成了近年来计算电磁学的最新研究成果，即快速高效的大规模工程涡流场计算方法、媒质电磁特性数值模拟、不确定性因素下的电磁场逆问题和优化设计，以及拓扑优化设计等内容，并修改、完善了《工程电磁场数值分析与综合》的主要内容。与此相对应，本书定名为《工程电磁场数值分析与优化设计》。

工程电磁场数值分析与综合设计是计算电磁学的重要组成部分。计算电磁学以电磁场理论为基础，将数值计算、优化方法和计算机软件技术结合起来，解决复杂的工程电磁场问题，在最近数十年，特别是20世纪90年代以来得到了蓬勃发展，成为一门新兴的综合性学科。由于电气装备的工业需求和控制技术的广泛应用、计算机技术的持续进步和日益普及、计算数学和软件技术的快速发展，促使计算电磁学研究的深度和广度不断拓展，在电磁场正问题、逆问题与优化设计和耦合问题分析的诸多领域都取得了重大进步。特别是近几年来，在快速高效的大规模工程涡流场计算、媒质电磁特性数值模拟、不确定性因素条件下电磁场的优化设计，以及拓扑优化设计等方面取得了长足的发展。这一迅速发展的形势，对从事工程电磁场理论与应用研究的研究生、教师、科研工作者和工程技术人员提出了新的要求。

在这种新形势下，本书作者试图将自己的研究成果和国际著名学者的部分研究成果结合起来，提供一本既有电磁场分析与优化设计的基本理论、基本方法，又有近年来国际上提出的一些新理论与新方法，在文字表述上力图由浅入深的实用参考书。因此，本书内容既包括节点有限元法，又包括棱边有限元法，同时也介绍了有限体积法和无网格法；既有三维涡流问题的稳态分析，又有瞬态分析；既含正问题的数值分析，也含近年来逆问题和优化设计的最新发展，同时也介绍了受到研究者关注的耦合问题。在《工程电磁场数值分析与综合》的基础上，本书增加了关于提高超大规模工程电磁场计算效率、建立多角度各向异性及非线性材料电磁特性模型、考虑不确定性的电工设备优化设计方法，以及拓扑优化设计等最新研究成果。为使内容更为集中，删去了《工程电磁场数值分析与综合》中高频电磁场的时域有限差分法。全书分为3篇，共17章，为了便于读者查询，每章后面均附有较为详细的参考文献。书中提供了较多实际算例，以便将理论与算法具体化。书末附有若干计算机源程序，可作为进行有关实际问题计算时程序编写的基础和参考。

本书第1章第1.5节“线性和非线性数学规划”、第5章“无网格法”、第3篇“工程电磁场优化设计”的6章以及附录B“简单禁忌搜索算法程序”、附录C“简单一维伽辽金无单元法程序”由浙江大学杨仕友教授撰写；第7章第7.8节“表面阻抗法”、第7.9节“计算实例：铁磁材料中的涡流与磁场”和第6章第6.2.4节“计算实例”由浙江大学姚纓英

教授撰写；沈阳工业大学谢德馨教授撰写了其余章节，并负责全书的校阅和定稿。

本书内容也融入了作者所在单位研究团队中博士生、硕士生多年来的研究成果；保定天威集团程志光教授、沈阳工业大学张艳丽教授审阅了第7章的主要内容，提出了宝贵的修改意见，在此一并表示谢意。

由于作者水平有限，书中可能还有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编著者

目 录

前言

第 1 章 工程电磁场数值分析与优化设计的基本问题 1

- 1.1 概述 1
 - 1.1.1 电磁场数值分析与优化设计方法的分类 1
 - 1.1.2 计算电磁学的研究现状与技术进步 3
- 1.2 电磁场控制方程的表述 7
 - 1.2.1 麦克斯韦方程组 8
 - 1.2.2 唯一性定理和矢量场的分类 9
 - 1.2.3 场矢量和位函数的微分方程 11
 - 1.2.4 工程电磁场数值分析中电磁位方程的表述 15
- 1.3 边界条件 20
 - 1.3.1 不同媒质的分界面条件 20
 - 1.3.2 场域边界条件 22
 - 1.3.3 开域问题与空间变换 25
- 1.4 基函数与权函数 29
 - 1.4.1 加权余量法简介 29
 - 1.4.2 基函数的类型 30
 - 1.4.3 权函数的类型 32
- 1.5 线性和非线性数学规划 33

- 参考文献 35

第 1 篇 工程电磁场数值分析

第 2 章 有限元法 I (节点元) 40

- 2.1 概述 40
- 2.2 基于变分原理的有限元法 41
 - 2.2.1 古典变分法简介 41
 - 2.2.2 变分有限元法 45
 - 2.2.3 单元插值基函数的构成 47
 - 2.2.4 静态场泊松方程边值问题的变分有限元法 53
 - 2.2.5 各类边界条件的处理 60
- 2.3 伽辽金有限元法 65
 - 2.3.1 三维涡流场分析的矢量磁位和标量电位数学模型 65
 - 2.3.2 标量电位的作用 69
 - 2.3.3 三维正弦涡流场问题的伽辽金有限元离散化 71
- 2.4 三维瞬态涡流场分析 83
 - 2.4.1 时步法 84
 - 2.4.2 状态空间法 88
- 2.5 计算实例 90

- 2.5.1 线性正弦稳态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 7) 90
- 2.5.2 非线性瞬态涡流问题 (TEAM Workshop 问题 10) 92
- 参考文献 95

第 3 章 有限元法 II (棱边元) 97

- 3.1 概述 (从节点元到棱边元) 97
- 3.2 六面体 Whitney 单元插值函数的构建 98
 - 3.2.1 六面体 Whitney 单元的插值函数 98
 - 3.2.2 六面体 Whitney 单元插值函数的旋度 102
- 3.3 六面体 Mur 单元的插值函数 103
- 3.4 棱边元与节点元在三维电磁场分析中的比较 105
- 参考文献 106

第 4 章 有限体积法 108

- 4.1 概述 108

4.2 有限差分法简介	109	7.2.2 磁化曲线的表示法	151
4.2.1 差分与差商	109	7.3 时谐电磁场计算中非线性媒质的	
4.2.2 截断误差	110	磁导率	152
4.2.3 二维泊松方程的差分离散	111	7.3.1 问题的复杂性	152
4.3 有限体积法	113	7.3.2 有效磁导率的计算	153
4.3.1 格点型有限体积法	114	7.4 各向异性问题	154
4.3.2 格心型有限体积法	116	7.4.1 结构各向异性	154
4.3.3 有限体积法在电磁场分析中的		7.4.2 材料各向异性	157
应用	116	7.5 各类磁滞模型	160
参考文献	118	7.5.1 Mandelung 定则	160
第5章 无网格法	119	7.5.2 Preisach 模型	161
5.1 概述	119	7.5.3 Jiles-Atherton 模型	162
5.1.1 无网格法的发展历史	119	7.5.4 矢量磁滞模型的新发展——考虑	
5.1.2 无网格法的近似函数	120	旋转磁化的 E&S 模型	163
5.2 伽辽金无单元法的基本原理和实施		7.5.5 基于二维矢量磁特性模型的电磁	
过程	123	场数值分析方法	166
5.2.1 边值问题及其弱形式泛函	123	7.6 谐波平衡有限元法	170
5.2.2 伽辽金无单元法的形状函数	124	7.7 时间周期有限元法	172
5.2.3 不同媒质交界面处边界条件的		7.8 表面阻抗法	175
处理	124	7.8.1 一维表面阻抗条件的导出	175
5.2.4 离散化方程	125	7.8.2 对一维表面阻抗条件的修正	176
5.2.5 权函数的支撑区间	126	7.8.3 饱和和工作状态时的表面阻抗	178
5.2.6 算法验证	126	7.8.4 表面阻抗法的有限元模型	179
5.3 计算实例	128	7.9 计算实例: 铁磁材料中的涡流与磁场	
参考文献	129	(Team Workshop 问题 21)	182
第6章 电磁场数值计算的后处理	131	参考文献	185
6.1 局部与总体电磁量的计算	131	第8章 有限元离散化方程组解法的	
6.1.1 磁感应强度	131	若干问题	189
6.1.2 电流密度	132	8.1 线性代数方程组的求解方法	189
6.1.3 电感、能量与涡流损耗	132	8.2 预处理共轭梯度法	190
6.1.4 绕组磁链	135	8.2.1 共轭梯度法简介	190
6.2 力与力矩的计算	137	8.2.2 预处理共轭梯度法	193
6.2.1 麦克斯韦应力法	137	8.2.3 ICCG 法应用中的几个问题	196
6.2.2 虚功原理	139	8.2.4 ICCG 法的改进	197
6.2.3 节点力法	142	8.3 非线性代数方程组求解的牛顿-拉弗	
6.2.4 计算实例	142	森法	199
参考文献	145	8.3.1 牛顿-拉弗森法简介	199
第7章 铁磁材料磁特性模拟与		8.3.2 牛顿-拉弗森法在静磁场有限元	
电磁场数值分析	147	分析中的迭代格式	200
7.1 铁磁材料中电磁场计算的特点	148	8.3.3 时谐电磁(涡流)场有限元分析	
7.2 各种磁化曲线及其应用	150	的牛顿-拉弗森法	203
7.2.1 各种磁化曲线	150	8.4 计算实例: 改进的预处理共轭	
		梯度法	207

参考文献	209	9.3 区域分解法	213
第9章 提高大规模工程电磁场有限元计算效率的若干方法	210	9.3.1 重叠区域分解法	213
9.1 大规模工程电磁场有限元计算的困境	210	9.3.2 非重叠区域分解法	214
9.2 子问题扰动有限元法	211	9.4 并行算法的新发展——基于单元级的并行有限元法	215
		参考文献	217
第2篇 工程电磁场与电路系统和机械运动的耦合问题			
第10章 电磁场与电路系统的耦合问题	220	并联导线中环流损耗的计算	224
10.1 概述	220	参考文献	230
10.2 间接场路耦合法	220	第11章 电磁场、电路系统与机械运动系统的耦合问题	231
10.2.1 二维电磁场方程与电路方程的耦合	220	11.1 场—路—运动耦合问题的控制方程	231
10.2.2 计算实例：笼型感应电动机稳态起动电流的计算	221	11.2 场—路—运动耦合问题分析中时间步长的控制	235
10.3 直接场路耦合法	224	11.3 动态有限元网格的处理	237
10.3.1 直接场路耦合法的研究概况	224	参考文献	241
10.3.2 计算实例：变压器大电流绕组			
第3篇 工程电磁场优化设计			
第12章 工程电磁场逆问题和优化设计	244	13.3.4 连续变量优化的一种实用模拟退火算法	263
12.1 概述	244	13.3.5 模拟退火算法的改进	266
12.2 电磁场逆问题的特点和计算过程	245	13.3.6 计算实例	268
12.3 优化算法	246	13.4 禁忌搜索算法	269
12.4 电磁场逆问题和优化设计数值分析中的特殊问题	247	13.4.1 概述	269
12.5 计算实例	248	13.4.2 连续变量优化设计的基本禁忌搜索算法	270
参考文献	250	13.4.3 一种改进的禁忌搜索算法	270
第13章 进化类标量优化算法	251	13.4.4 禁忌搜索算法的若干改进措施	273
13.1 概述	251	13.4.5 算法验证	275
13.2 遗传算法	251	13.5 粒子群算法	276
13.2.1 遗传算法的基本原理	251	13.5.1 粒子群算法的基本原理和迭代过程	276
13.2.2 遗传算法的实现	253	13.5.2 粒子群算法控制参数分析	278
13.2.3 遗传算法的改进	256	13.5.3 一种改进的粒子群优化算法	279
13.2.4 算法验证	257	13.5.4 杂交粒子群优化算法	280
13.3 模拟退火算法	258	13.5.5 粒子群优化算法与遗传算法的异同点	283
13.3.1 模拟退火算法的基本原理	258	13.5.6 应用算例	284
13.3.2 连续变量 SA 算法的收敛条件	260		
13.3.3 模拟退火算法的实现	262		

13.6 基于概率模型的进化算法：交叉熵算法	284	15.2.2 优势解、非支配解和 Pareto 最优解	309
13.6.1 交叉熵优化算法的基本原理和 实施过程	285	15.3 多目标优化问题适值计算机制和 方法	310
13.6.2 一种改进的交叉熵优化算法	287	15.3.1 原始方法	310
13.6.3 算法验证	290	15.3.2 非基于 Pareto 意义的矢量 方法	312
参考文献	292	15.3.3 基于 Pareto 最优解的方法	315
第 14 章 表面响应模型及其在电磁场 逆问题和优化设计分析与 计算中的应用	294	15.4 适值共享和种群多样性	316
14.1 概述	294	15.5 矢量进化算法的实现	317
14.2 基于径向基函数的表面响应模型	295	15.5.1 优等群体的引入及其更新 规则	317
14.2.1 基本原理	295	15.5.2 适值计算方法	317
14.2.2 常用径向基函数及其优、 缺点	295	15.5.3 适值共享	318
14.2.3 MQ 径向基函数中形状参数 h 的选择	297	15.5.4 个体总适值	318
14.3 基于移动最小二乘近似的表面响应 模型	299	15.5.5 计算实例	318
14.3.1 基本原理	299	15.6 多维多目标进化算法：多重单目标 Pareto 采样算法	319
14.3.2 权函数的选择	300	15.6.1 多重单目标 Pareto 采样算法的 基本原理	319
14.3.3 MLS 的函数重构能力	300	15.6.2 改进的多重单目标 Pareto 采样 算法	321
14.4 基于紧支集径向基函数的表面响应 模型	301	参考文献	324
14.4.1 紧支集径向基函数	301	第 16 章 鲁棒优化设计理论与方法	325
14.4.2 基于紧支集径向基函数的表面 响应模型	302	16.1 概述	325
14.5 基于支持向量机的表面响应模型	302	16.2 鲁棒优化的基本概念和术语	326
14.6 基于表面响应模型和标量进化算法 相结合的快速全局优化算法	304	16.2.1 参数不确定性与扰动	326
14.7 采样点的产生规则	304	16.2.2 可行解与解的性能	326
14.7.1 应用模拟退火算法产生 采样点	304	16.2.3 鲁棒优化与鲁棒控制	327
14.7.2 均匀网格取点法	304	16.2.4 鲁棒解与鲁棒优化设计	327
14.7.3 随机智能取点法	304	16.2.5 鲁棒性能与鲁棒性能度	327
14.8 模型验证	305	16.2.6 工程设计问题的不确定性	328
参考文献	306	16.3 不可控参数或设计参数的扰动	328
第 15 章 矢量进化算法	308	16.3.1 随机概率密度分布扰动	328
15.1 概述	308	16.3.2 不确定性参数集合	330
15.2 矢量（多目标）优化问题的基本 概念和术语	308	16.4 鲁棒优化设计方法	331
15.2.1 理想最优解或绝对最优解	309	16.4.1 敏感度分析方法	331
		16.4.2 随机概率鲁棒优化设计方法	331
		16.4.3 非概率鲁棒优化设计方法	332
		16.4.4 约束函数鲁棒优化的概率设计 方法	333
		16.5 电磁场逆问题鲁棒优化的数学 模型	333

16.6 鲁棒优化设计若干关键技术.....	335	第 17 章 电磁场优化设计的最新	
16.6.1 多项式混沌及其应用.....	335	进展——拓扑优化设计.....	342
16.6.2 鲁棒性能参数计算新机制.....	337	参考文献.....	345
16.6.3 兼具鲁棒和全局寻优的优化求解		附录.....	348
策略.....	337	附录 A 求解稀疏对称方程组的 ICCG 法源	
16.7 电磁场逆问题鲁棒优化进化算法.....	338	程序.....	348
16.7.1 粒子群鲁棒优化算法.....	338	附录 B 简单禁忌搜索算法程序.....	356
16.7.2 应用实例.....	339	附录 C 简单一维伽辽金无单元法程序.....	361
参考文献.....	340		

第1章

工程电磁场数值分析与优化设计的基本问题

工程电磁场数值分析与优化设计问题包括电磁场的正问题、逆问题以及电磁场与电路或其他系统的耦合问题。本章介绍这一研究领域的发展概况和共性问题，包括电磁场控制方程的表述、边界条件的确定、基函数与权函数的类型以及数学规划的基本概念。

1.1 概述

尽管电磁学的研究具有悠久的历史，但计算电磁学的蓬勃发展却是最近约 40 年的事。计算电磁学以电磁场理论为基础，以高性能计算技术为手段，运用计算数学提供的各种方法，解决复杂的工程问题，是电磁学中一个十分活跃的研究领域，已经构成了一门新兴的边缘交叉学科。

电磁场数值分析的理论和方法是计算电磁学的重要组成部分，属于电磁场正问题，它的任务是在已知电气设备设计方案的前提下通过数值分析的手段对方案的优劣做出评价。具体地说，就是已知给定区域内的几何结构与物理参数，求解一个电磁场定解问题，得到所研究区域中的电场或磁场的空间分布和时间变化，并在此基础上计算出设备的电感、电容、能量、损耗、电磁力等各种特性参数。与正问题相对的电磁场逆问题，在工程上大多属于电磁装置的优化设计问题，由于在优化设计过程中必然涉及电磁场的数值分析和计算，因此又称之为电磁场优化设计问题，它的任务是给定电磁场的期望分布或理想特性参数，通过对场源、场域以及场域中媒质分布的优化设计，实现电磁场和电磁能量的最优控制和利用。电磁装置的优化设计、无损检测、医学图像重构等问题都属于电磁场逆问题的研究范围。

电磁场数值分析方法的提出可以溯源到 20 世纪 40 年代就已付诸工业应用的有限差分法^[1]，但是当时的计算工具只限于计算尺和手摇计算机，限制了数值方法的发展。数十年来，现代电气和电子工业的不断发展和迫切需求成为促进计算电磁学发展的动力，同时，由于计算机技术的持续进步和日益普及，以及计算数学和软件技术的快速发展，提供了强大的物质基础和计算工具，使得计算电磁学的研究取得了重大的进步。从二维到三维，从线性到非线性，从静态场到时变场，从单一电磁场问题到电磁场与电路系统、机械运动系统或其他物理场的耦合问题，从正问题到逆问题，计算能力有了飞跃的提高。

1.1.1 电磁场数值分析与优化设计方法的分类

对已经发展起来的电磁场数值分析方法进行大体上的分类，有助于根据所研究问题的基

本属性来选择恰当的数学工具，建立相应的数学模型，从而方便地求得问题的解答。电磁场数值分析离不开场域的离散化。从离散化的形式来区分，可将这些方法分为场域元法、边界元法和等效源法。其中边界元法也可看作激励源位于边界上的等效源法。若从数学模型中控制方程的形式上分类，则可将这些方法分为微分方法和积分方法。

在电气工程电磁场分析中，最早应用的是有限差分法。有限差分法属于场域元法。这一方法的基本原理可用“以差商近似代替微商”来概括。其基本步骤是，首先将求解区域分成等距或不等距的矩形网格（二维）或立方形网格（三维），然后在网格的节点上用差分方程近似微分方程，形成离散化的差分方程组并求解之。但经典有限差分法的规则网格不能满意地模拟几何形状复杂的问题，而电工设备中的电磁场却往往正是以包含复杂的几何形状和不同媒质的物理参数为特征，这就成为有限差分法的主要缺点；此外，如果需要引入泰勒级数的高阶项来提高有限差分法的计算精度，也将遇到困难。因此有限差分法在电磁场分析中的应用逐渐被有限元法替代。但是应当指出，有限差分法仍具有生命力，高频电磁场分析中使用的传统时域有限差分法就是一种显式的有限差分法；在流体力学的数值计算领域有限差分法也仍然占据重要地位。

有限元法是应用最为广泛的电磁场数值解法，同样也属于场域元法，这一方法最初是在力学领域提出并发展起来的。有限元法本身又可分为节点元和棱边元两个分支，前者将待求电磁场的物理量定义在网格节点上，后者则定义在网格棱边上。最初的研究工作集中于节点元，此后棱边元的研究也在平行发展。把有限元法首先用于电工设备电磁场计算的是 Winslow^[2]，他用有限元法分析了加速器磁铁的饱和效应。Silvester 和 Chari^[3] 则提出了电动机内电磁场问题的第一个通用非线性变分表述。自此以后，有限元法在各种电工问题中得到了广泛应用，与此有关的研究文章不胜枚举。其中，1970 年以后 Anderson^[4] 对变压器漏磁场的研究，Okuda^[5] 等人对汽轮发电机端部磁场的研究，1980 年以后 Nakata^[6] 等人对电磁媒质特性的数值模拟和实验研究，Morisue^[7]、Biro^[8] 等人对规范问题的新见解，这些都是富有开创性的成果。

边界元法是另一种使用较多的电磁场数值分析方法^[9,10]，与有限元法和有限差分法的剖分对象为整个求解场域不同，边界元法的剖分对象为场域边界，对于二维平行平面场和轴对称场而言即为边界线；对于三维场即为边界面。从场的激励源的角度来看，边界元法中的场源实质上是体现在边界上的等效源。

典型的等效源法^[11]包括模拟电荷法、模拟电流法和模拟磁荷法等方法，这些方法用位于计算场域之外的所谓“无效区”的等效源来代替场的激励。等效源法在静态场特别是静电场分析中得到广泛应用。

上面所述的有限差分法和有限元法同时又属于微分方法，其数学模型是从电磁场的偏微分方程定解问题出发而建立的。与微分方法平行发展的还有积分方法，例如边界元法有时也称为边界积分方法或者边界积分方程方法，其数学模型中的积分方程称为直接边界积分方程；在高频电磁场领域广泛应用的矩量法，则是一种采用加权余量法对间接边界积分方程进行离散化的方法。图 1-1 和图 1-2 列出了各种传统数值方法的大致分类。

除了上述传统数值方法以外，一些后来发展的算法，例如吸收了有限元法的分片插值思想并兼有有限差分法的简单性的有限体积法；以独特的网格单元形式直接将场矢量在场域网格中离散并进行差分求解的有限积分法；免除了有限元法中烦琐的网格剖分的无单元法；在

粗网格和细网格之间迭代以取得足够精度的解答，并加速收敛的多重网格法等，都可以看作传统数值方法的新的扩展。此外，来源于解析法的一些半解析方法，例如多极展开法、奇点展开法和新型等效源法^[12]等，也被独立地或与其他数值方法相结合^[13]地应用于工程电磁场分析。图1-3表示了这些新方法与传统方法之间的联系。由于同一方法可能与若干其他方法存在内在的联系，因此该图只是给出了不同方法的大体关系。

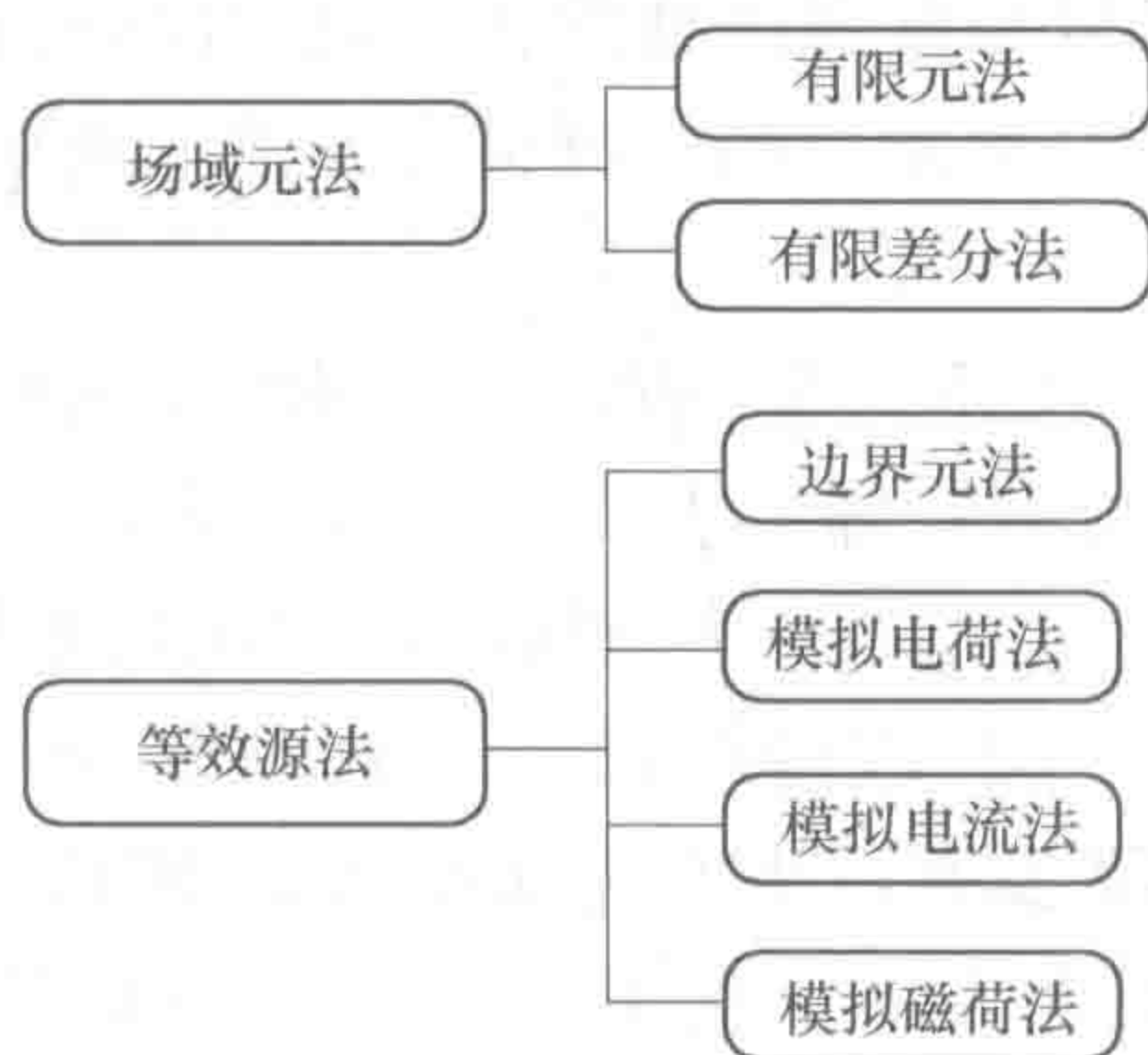


图 1-1 各种数值方法的分类（根据离散化方式）

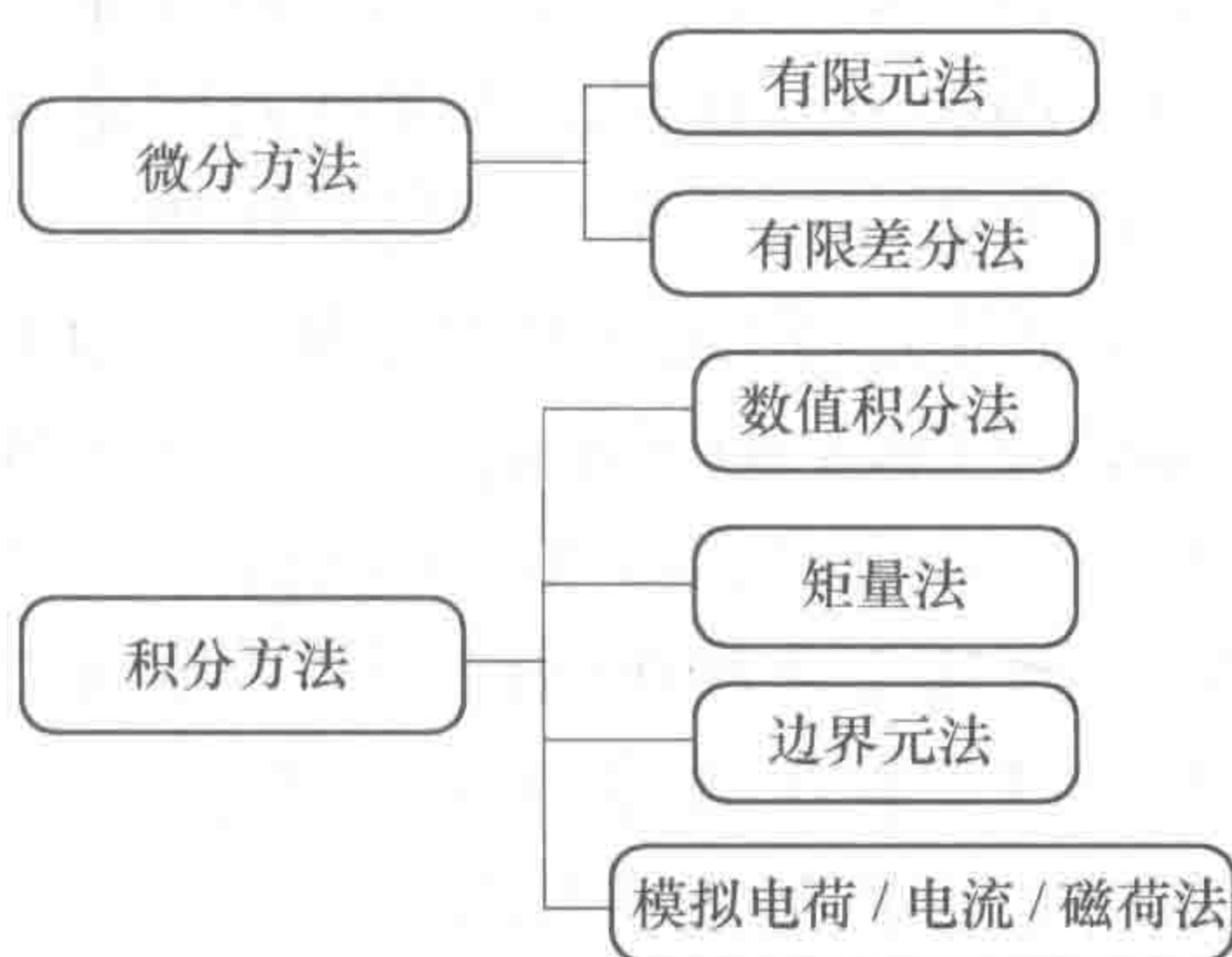


图 1-2 各种数值方法的分类（根据控制方程）

前已述及，电磁场逆问题和优化设计的研究范畴非常广泛，几乎覆盖了电气、电子工程的所有研究领域。需要说明的是，电磁场逆问题和优化设计一词本书特指电磁装置的优化设计，在数学上一般属于有约束条件的数学规划问题。根据目标函数的数量，电磁场逆问题可划分为单目标（标量）优化与多目标（矢量）优化设计问题；根据目标与约束函数的特性，电磁场逆问题可划分为线性数学规划与非线性数学规划问题；根据优化设计的性能要求，电磁场逆问题可划分为性能优化与鲁棒优化设计问题。与此对应的优化算法也存在多种不同的划分方法。依据能否能够搜索到全局最优点来划分，优化算法可划分为全局与局部搜索算法；依据目标函数的数量来划分，优化算法可划分为单目标（标量）与多目标（矢量）优化算法；依据迭代过程中新点的产生规则来划分，优化算法可划分为确定类与随机类搜索方法。

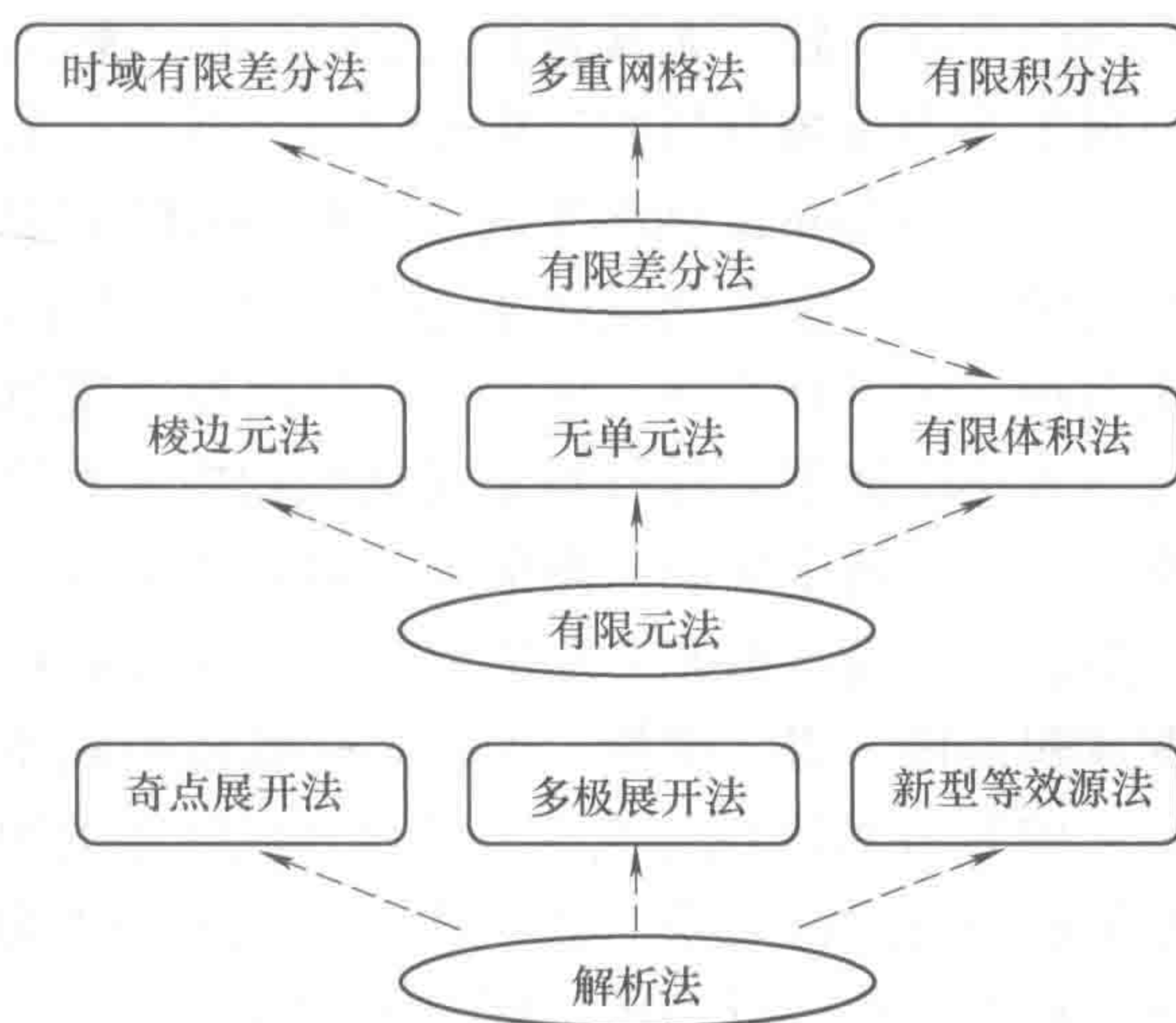


图 1-3 新方法与传统方法之间的联系

1.1.2 计算电磁学的研究现状与技术进步

计算电磁学研究正在蓬勃发展，其标志之一是在这一领域内有组织的学术活动。例如 COMPUMAG（Computing Electromagnetic Field Conference）、CEFC（Conference on Electromagnetic Field Computation）等影响较大的世界性国际会议均为双年会；另有一些地区性国际会议定期召开，并且正在向更大的地域扩展。为了检验和比较各种算法的计算精度，目前已被

公认的所谓 TEAM Workshop 问题已达 34 个, 成为计算电磁学研究者经常使用的标准模型例题。每年有数千篇论文在国内外各种学术会议和刊物上发表。本节试图概括这一领域的研究现状与技术进步, 并介绍若干重要研究成果^[14,15]。

1. 有限元法得到普遍应用

在电磁场正问题的分析方法中, 有限元法的应用最为广泛, 其二维、三维解已经有了很大发展, 包括对稳态、时变场问题和非线性问题、运动媒质问题的处理, 对规范问题的正确理解等。用有限元法解决工程问题的论文在各种有关文献中所占的比例最大。以下成果对有限元法的发展起到了重要的促进作用。

(1) 求解有限元离散化方程组的 ICCG 法 ICCG 法即不完全乔列斯基分解-共轭梯度法 (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient Method), 是一种预处理共轭梯度法。该方法最初由 J. A. Meijerink 和 V. der Vorst 提出^[16], 用于求解有限元分析中的大型稀疏对称代数方程组, 目前已广泛用于大型工程问题的有限元计算, 并出现了一些改进形式^[17]。这一方法的突出优点是, 其计算次数随 $n \log n$ 增长, 而不是像高斯消元法及其派生方法那样随 n^3 增长, n 为未知数个数; 其存储量需求独立于系数矩阵的带宽, 也大大小于高斯消元法。ICCG 法的应用使得在 20 世纪 80 年代以前很难进行的许多三维大型工程问题的有限元计算得以实现。不过, 对于三维涡流场分析, 由于有限元离散化方程组系数矩阵的病态程度严重, 从而 ICCG 法的收敛性变差, 尤其是进入 21 世纪以来, 电力变压器等电工设备单台容量的迅猛增长, 使得工程涡流场分析的计算规模越来越大, 采用常规的 ICCG 法计算这类问题已产生困难。

(2) Delaunay 网格生成法 网格剖分的质量与有限元计算的精度密切相关。对于一组给定的节点, 怎样的网格才是最好的三角形网格? 许多研究者认为, Delaunay 三角化方法能实现最好的网格结构。该方法由俄国数学家 Delaunay 提出 (1934), Cendes (1983) 首先将这一方法应用于二维有限元网格自适应生成^[18]。这一方法能使三角形的最小角度之和极大化, 也就是所生成的三角形在一定条件下最接近于等边三角形, 于是能避免细长畸形单元的产生, 这正是有限元分析所要求的。Delaunay 法已从二维推广到三维, 此时需要将三角形转变成四面体, 将二维情况下的外接圆转变成外接球^[19]。

(3) 开域问题的变换方法 开域问题的边界位于无穷远处, 在有限元计算中无法实现。常用的权宜之计是采用截断法, 将无限域截断成有限域。为了确定这一边界的设定是否合理, 通常需要经过多次试算, 最后设定一个满足给定误差要求的相对较小的区域作为求解域, 显然这一区域仍然包含了很大的“无用”空间。为节约计算机资源并提高计算精度, 1988 年由 Freeman 和 Lowther^[20] 提出了处理开域问题的精确变换方法。应用保角变换中的拟矢径变换, 将无穷区域变换到有限区域内, 再进行有限元离散化。这一方法已被推广到三维^[21]。其后发展起来的几何变换法突破了保角变换的限制, 保留了有限元法系数矩阵稀疏对称的优点, 应用起来比较方便。

(4) 棱边元 (Edge Element) 的使用 从 20 世纪 80 年代开始, 在三维涡流问题计算中采用了多种矢量位-标量位耦合的数学模型, 最初均应用于常规的节点元。为了直接获得待求的场矢量并且便于处理非线性问题, 也出现了直接用磁场强度 (或电场强度) 为未知量的算法。但是在节点元中作为未知函数的场矢量在相邻单元的公共棱边上有唯一的值, 因而其切向分量和法向分量都是连续的, 此时, 若以磁场强度 \mathbf{H} 和标量磁位 ψ 为未知函数建立数学模型, 当采用节点元计算时, 在两种媒质交界面处磁场强度的法向分量将保持连续, 这

就违背了电磁场边界条件的基本理论。Bossavit^[22,23]首先将 Whitney^[24]提出的棱边元引入电磁场分析。棱边元中将未知函数取作场矢量沿单元棱边的环量,可以保证共有一条棱边的相邻单元的 H 的切向分量相等,而对 H 的法向分量不做约束,从而解决了这一矛盾。

2. 场-路-运动耦合问题研究取得新进展

电磁场与电路系统、机械运动系统以及其他物理场的耦合问题研究取得了很大进展。采用电路系统变量与电磁场变量的直接耦合来分析二维电磁场已经很普遍。电磁系统与机械运动的耦合、电磁系统与包括磁致伸缩效应在内的微型机械变形问题的耦合、磁场与熔融金属流场的耦合、电场与气流场的耦合均已吸引了不少研究者的关注。

旋转电动机、直线电动机和各种含有运动执行元件的电磁机械的动态特性仿真需要研究场-路-运动系统的耦合。在这一研究中,将电压作为已知量,以电流和电磁位作为待求变量,将电路方程与电磁场方程直接联立求解的所谓直接耦合方法已被很多研究者采用^[25]。由于求解场域中含有运动部分,因而在有限元分析中需要不断改变网格剖分。为了简化网格生成的负担,目前已经发展了几种不同的处理方法,大体可分成“协调交界面”和“非协调交界面”两类^[26]。在协调交界面方法中,静止部分的网格保持固定,运动部分的网格拓扑结构不变,只改变节点坐标,但运动边界上的节点需要小心处理,以保持两部分交界面网格的相容性。这类方法的实施依赖于具体问题,其计算机程序不够通用。非协调交界面方法是场域内静止部分和运动部分的网格分别独立生成,在两部分的交界面上网格不需要协调相容,采用拉格朗日乘子法实现两部分的耦合^[27]。这一方法即使对运动部分的网格也只需要生成一次,就可以处理运动网格的旋转或移动,其缺点是由于拉格朗日乘子项的加入使离散化方程组系数矩阵的性状变差,增加了方程组求解时的 ICCG 迭代次数。

3. 媒质特性模拟的研究进一步精细化

工程电磁场问题的数值计算精度在很大程度上依赖于所研究区域中各种媒质电磁特性参数的准确模拟。媒质的非线性、各向异性等特性研究均取得了显著成果。以往忽略磁滞和各向异性、简单地应用平均磁化曲线来模拟铁磁媒质的非线性磁特性,在许多电磁装置的磁场分析中已经不能满足要求。在铁磁媒质磁滞特性的模拟中,应用较多的是 Preisach (1935) 模型^[28]。Mayergoyz 等人对该模型的原始版本做了重要改进,目前已经发展了标量磁滞模型、矢量磁滞模型^[29]、动态磁滞模型^[30]等针对不同问题的模拟方法。考虑旋转磁化的 E&S 模型是最近几年提出的矢量磁滞模型。事实上,在电动机、变压器运行时,铁心中的局部磁场是交变磁场 (H 与 B 矢量方向相同) 和旋转磁场 (H 与 B 矢量方向不同) 的合成。与之相联系的铁心损耗也可分为交变损耗和旋转损耗两部分,在以往的许多磁滞模型中都没有考虑旋转损耗。日本学者 M. Enokizono 与合作者 N. Soda 在 2000 年提出了“Enokizono and Soda (E&S)”模型^[31],同时考虑了电磁钢片的磁滞、各向异性以及旋转损耗。

此外,新媒质的使用促进了媒质电磁特性模拟的研究,例如微粉黏结型永磁媒质的磁特性^[32]、超磁致伸缩媒质特性的有限元模拟^[33,34]等。特别应当提到的是新型媒质在生物医学领域的应用。文献 [35] 研究了用于目标药物递送的黏性液体中超顺磁铁氧纳米颗粒在外磁场作用下经生物毛细血管运动的动态特性,就是一个涉及媒质特性模拟和不同物理场耦合的前沿性课题的例子。

事实上,媒质特性模拟研究既包含模型的建立和特性参数的测量,同时还与电磁场的数值分析方法密切相关。如何将复杂媒质特性模型与数值分析方法恰当地结合,仍然是需要深

入研究的课题。

4. 电磁场逆问题成为研究热点之一

电磁场逆问题的研究与耦合问题、媒质特性模拟问题被公认为 20 世纪 90 年代计算电磁学的三大研究热点。电磁场逆问题从第 6 届 COMPUMAG 会议 (1987 年, Graz, Austria) 开始成为以后历届会议的重要专题。这一问题实际上包含了电磁场分析 (正问题) 与优化方法的组合。由于将电磁场数值分析作为目标函数评价的手段, 因而有别于其他的优化问题。由于电磁场逆问题需要冗长的计算时间, 因而目前的研究主要集中于二维稳态问题的优化。在确定性算法中, 除了一般的直接搜索法以外, 有限元法与梯度法相结合的设计灵敏度分析得到相当的重视^[36]。为了克服确定性方法通常会陷入局部最优解的局限性, 出现了为人们熟知的模拟退火法、遗传算法、进化算法、禁忌搜索法、神经网络等随机类算法。在进化算法中, 新近发展了蚁群算法^[37] 和粒子群法^[38, 39]。为了发挥确定性算法和随机类算法各自的优点, 许多研究者致力于研究这两类方法的结合。不过, 这些算法的收敛速度目前仍然不能满足包含三维、瞬态、耦合问题在内的复杂大系统计算的要求。总之, 电磁场逆问题的研究仍处于初级阶段。为减少计算时间, 近几年出现了一种新的优化策略——表面响应模型 (Response Surface Model) 与随机类优化算法的结合^[40, 41]。该方法首先将目标变量空间离散为一系列采样点, 并应用数值计算方法计算出目标函数在这些采样点的值, 根据这些采样值, 利用一定的表面响应模型重构目标函数, 然后采用某一优化方法对重构以后的目标函数进行寻优计算。由于只需要对采样点处的目标函数值进行电磁场数值分析, 因而算法效率大大提高。文献 [42] 首次将移动的最小二乘法^[43] (Moving Least Squares) 与模拟退火法相结合, 用于电磁装置的优化设计, 取得了较好效果。

5. 几种用于高频电磁场数值分析的方法

高频电磁场体现出波动的性质, 其数值分析方法与似稳场分析有很大区别。这两种电磁场的研究和计算历来分属弱电和强电专业, 具有各自的研究者群体。不过, 随着电磁兼容性问题在电气设备制造与运行中的重要性日益凸显, 高频与低频电磁场的研究者的相互交流也在不断增进, 以往在两个领域中采用的不同方法也有相互借鉴的趋势。下面简要介绍几种用于高频电磁场分析的方法。

(1) 矩量法 (Moment Method) 在天线、微波技术和电磁波发射等方面广泛应用的一种方法是矩量法, 该方法将待求的积分方程 (或微分方程) 转化为代数方程组并求得其数值解, 由于在求解过程中需要计算广义矩量, 故称矩量法^[44, 45]。该方法的优点是在自由空间不需要网格剖分, 但由于与积分方程相结合, 使离散化代数方程组的系数矩阵为满阵, 从而计算时间为 $O(n^3)$ 。

(2) 传输线矩阵法 (Transmission Line Matrix, TLM) 传输线矩阵法于 20 世纪 70 年代提出, 并首先用于分析波导的不连续性及散射问题^[46]。该方法基于经典的惠更斯原理, 并对空间域采用传输线连接的网格进行离散, 对时间域则采用显式数值算法进行离散, 通过建立网格中传输线上电压、电流与麦克斯韦方程组中电场、磁场的等效关系, 将场在空间域的传播问题等效为电压 (电流) 波在网格中的传播问题^[47]。该方法通常所应用的规则网格不能很好地适应复杂的几何形状, 为了解决这一问题, 不规则网格的 TLM 方法仍在研究中^[48]。

(3) 时域有限差分法 (Finite Difference Time Domain Method, FDTD) 由 K. S. Yee 提出

的时域有限差分法的广泛应用是近20年来高频电磁场分析的重要成果^[49]。该方法直接从麦克斯韦方程出发,不需要任何导出方程,避免了使用更多的数学工具。近年来在处理吸收边界条件、构建非均匀网格和不规则网格等方面的研究成果使得这一方法能够适应复杂的边界条件并便于实施。最初的Yee-FDTD法采用显式蛙跳格式,其时间增量 Δt 和空间增量 Δx 不是相互独立的,为了保证数值稳定性,应使 $\Delta t \leq \Delta x/c$, $c = \sqrt{\epsilon\mu}$;因此对于电大尺寸的三维问题需要非常大的存储空间和很长的计算时间。为克服这一困难,新的隐式算法和并行处理方法^[50, 51]正在研究中。此外,与FDTD法同时发展的还有有限积分法^[52, 53],该方法与FDTD法同样需要两套网格分别针对麦克斯韦第一方程和第二方程进行计算,所不同的是有限积分法引入了电场和磁场沿线或面的积分。

6. 工程实践不断提出新的挑战

现代电气和电子工业的迅速发展,对计算电磁学这一计算工具不断提出适应精细化研究的新要求和新挑战。仅以电力网中的主要设备电力变压器、电抗器类产品为例。例如,高电压、大容量电力变压器电压等级已经达到1000kV级,单台容量已经超过1000MVA,为了通过电磁场分析得到产品的损耗、电磁力等运行特性,除了要面对超大规模、含多尺度分析的计算问题以外,以前在中小型变压器计算中曾采用的粗略简化假设已经不能满足要求,需要更精细地考虑产品的实际结构和实际运行工况,致使计算规模过大,甚至无法在合理的时间内完成计算,这就提出了提高计算速度和计算精度的新要求。又如,由于相对于传统的交流输电更为经济,高压直流输电已成为远距离、跨区域电能输送的重要组成手段。用于直流输电网络的换流变压器,其铁心处于交流磁场和直流磁场同时作用的磁化状态,铁磁材料的磁滞特性不再呈对称形状,需要进一步研究直流偏磁条件下硅钢片铁心磁特性的恰当模拟方法。再如,由于城市用电量逐年增加,许多高电压、大容量的大型电力变压器的安装地点正逐渐进入市内。变压器连续运行所发出的噪声对人们的正常生活和工作造成影响,减振降噪问题早已提上日程。变压器的本体噪声来源于硅钢片磁致伸缩引起的铁心振动,以及硅钢片接缝处和叠片间因漏磁而产生的电磁吸力,因此振动、噪声问题不仅涉及制造工艺,而且与声学、力学、铁磁材料的磁致伸缩特性模拟等多学科领域相关,是复杂物理场的耦合问题。工程实践提出的新问题不胜枚举,需要各相关领域研究者的共同关注。

概括地说,工程电磁场分析或正问题不仅研究各类电磁场定解问题的数值计算方法、反映电磁场能量的局部参数与总体参数的提取方法、媒质电磁特性模拟的数学模型和处理方法,同时包含了各类场域的离散技术、大型代数方程组的快速高效求解技术,以及数值结果的后处理技术,此外还需要研究电磁场和其他物理场的耦合问题。工程电磁场的优化设计问题或逆问题是在正问题研究成果的基础上发展起来的。目前对于逆问题的求解都是将其分解成一系列的正问题,以正问题的解算方法作为评价方案优劣的工具,再与作为搜索工具的适当优化方法相结合,最终求得尽可能理想的设计方案。完成一个电磁场优化问题的计算,不仅需要了解正问题所涉及的数值计算方法和软件技术,同时要学习和了解有约束条件的数学规划问题。以后的章节将分别介绍上述基本问题,并说明具体问题的当前发展水平。

1.2 电磁场控制方程的表述

电磁场数值分析的具体任务,就是要求解一个与特定问题相联系的偏微分方程定解问