不动点方法的理论及应用

张国伟 著

The Theory and Applications of Fixed Point Methods

科学出版社

不动点方[redacted]应用

张国伟 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书专注于应用半序以及不动点指数讨论不动点问题. 第1章介绍一般的半序集和与选择公理等价的 Zorn 引理, 讨论赋范线性空间中具有不同性质的锥及其导出的半序, 完整地说明锥的性质之间的关系, 给出增算子不动点定理不依赖于Zorn引理的证明. 第2章介绍连续算子的延拓和收缩核, 论述全连续算子延拓和不动点指数的内容, 重点在于一些泛函形式拉伸与压缩型条件下不动点指数的计算, 叙述全连续算子的一些不动点定理. 第3章介绍不动点方法在几类微分边值问题非平凡解研究中的应用. 第4章的内容是非紧性测度和非紧算子的不动点.

本书适合非线性泛函分析相关领域的研究人员、研究生和高年级本科生阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

不动点方法的理论及应用/张国伟著. —北京: 科学出版社, 2017.3
ISBN 978-7-03-051938-2
I. ①不… II. ①张… III. ①不动点方法—研究 IV. ①O189.3
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 040455 号

责任编辑: 胡庆家 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2017 年 3 月第一次印刷 印张: 14 1/4
字数: 278 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

不动点方法研究在变换下不动点的存在和非存在、个数、性质和求法, 是讨论方程是否有解的具有一般性意义的工具, 这里的方程是指从各类具体方程抽象出来的算子方程. 不动点问题无论是在拓扑学上还是在泛函分析中都是重要的内容, 自 1910 年荷兰数学家 Brouwer 建立的不动点定理至今已经有较长的历史, 两位波兰数学家 Banach 和 Schauder 的不动点定理, 以及美国数学家 Lefschetz 和丹麦数学家 Nielsen 的工作, 分别是不同方向上的代表, 我国的数学家也在各个方面作出了重要的贡献, 不动点方法在代数方程、微分方程、积分方程和数理经济学等领域都有广泛的应用.

关于不动点方法已有很多非常出色的专著来论述, 其中一部分与本书内容相关密切的著作已在参考文献中列出. 本书限定在作者的能力和兴趣所在的范围内, 专注于应用半序以及不动点指数讨论不动点问题, 实际上全书的内容是作者的部分研究工作和一些相关文献内容的综合. 第 1 章首先介绍了一般的半序集和与选择公理等价的 Zorn 引理; 然后讨论了赋范线性空间中具有不同性质的锥及其导出的半序, 并且收集了不同空间中的锥, 它们有些在后面被使用, 同时也完整地说明了锥的性质之间关系, 有些内容是新的; 最后给出了增算子不动点定理不依赖于 Zorn 引理的证明. 第 2 章首先介绍了连续算子的延拓和收缩核, 特别给出了一些新的非凸收缩核; 然后论述了全连续算子延拓和不动点指数的内容, 重点在于一些泛函形式拉伸与压缩型条件下不动点指数的计算; 最后叙述了全连续算子的一些不动点定理. 第 3 章是不动点方法在几类微分边值问题非平凡解研究中的应用, 虽然很多结果已经在一些引用的文献中被推广或在更一般情形下被讨论, 但是其中的内容应该不失参考价值. 第 4 章的内容是非紧性测度和非紧算子的不动点, 值得注意的是, 凝聚算子不动点指数中具有一般性的同伦.

本书适合非线性泛函分析相关领域的研究人员、研究生和高年级本科生阅读和参考. 感谢国家自然科学基金项目 (NSFC 61473065) 的出版资助, 感谢东北大学李旭光博士在写作和出版过程中的支持和帮助欢迎读者对书中的不足之处给予批评和建议, 如有赐教, 作者不胜感激, 请将内容发至邮箱 gwzhang@mail.neu.edu.cn.

张国伟

2016 年 11 月于东北大学

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　半序集与赋范线性空间中的锥

1.1　半序集与 Zorn 引理

定义 1.1.1　设 X 非空集合, 如果在 X 中的某些元素对 x, y 之间定义一种序关系 "$\leqslant$", 满足条件:

(i) 自反性: $x \leqslant x$, $\forall\, x \in X$;

(ii) 传递性: 如果 $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, 那么 $x \leqslant z$;

(iii) 反对称性: 如果 $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, 那么 $x = y$,

则称 X 为半序集, 可记为 $(X, \leqslant)$.

如果半序集 $(X, \leqslant)$ 中任意两个元素都能比较, 则称 X 为全序集, 即 $\forall x, y \in X$, 或 $x \leqslant y$, 或 $y \leqslant x$. 设 x, y 是半序集 $(X, \leqslant)$ 中的两个点, 若 $x \leqslant y$, 称集合 $[x, y] = \{z \in X \mid x \leqslant z \leqslant y\}$ 为 $(X, \leqslant)$ 中的序区间. 如果 $x \leqslant y$, 并且 $x \neq y$, 则记为 $x < y$.

设 X_0 是半序集 X 的一个子集. 如果存在 $x \in X$, 使得 $\forall y \in X_0$, $y \leqslant x$, 则称 x 为 X_0 的一个序上界. 如果 x 是 X_0 的一个序上界, 并且对 X_0 的任意序上界 x', 都有 $x \leqslant x'$, 则称 x 为 X_0 的序上确界, 记作 $\sup X_0$. 类似地, 可以定义 X_0 的序下界和序下确界 $\inf X_0$. 设 X 是半序集, $x \in X$, 如果 $\forall y \in X$, 只要 $x \leqslant y$, 就有 $x = y$, 则称 x 为 X 的一个极大元. 类似地, 可以定义 X 的极小元.

半序集中如果存在极大元或极小元, 它们不一定唯一. 但是全序集中如果存在极大元或极小元, 它们是唯一的.

引理 1.1.1 (Zorn 引理)　设 X 是半序集. 如果 X 中的任意全序子集在 X 中都有序上界, 则 X 中存在极大元.

注 1.1.1　Zorn 引理等价于选择公理, 见文献 [34]. 著名的 Hahn-Banach 定理的证明依赖于 Zorn 引理, 见文献 [14], [87], [114].

定义 1.1.2　设 E 是实线性空间, $H \subset E$. 如果 H 中任意有限个元素均线性无关, 则称 H 是 E 中的线性无关组. 如果 H 是 E 中的线性无关组, 并且 E 中的非零元素都是 H 中元素的线性组合, 则称 H 是 E 中的 Hamel 基.

定理 1.1.1　设 E 是实线性空间, θ 是 E 中的零元素, $E \neq \{\theta\}$, 则 E 中存在 Hamel 基.

证明　记 $\mathcal{H} = \{H \subset E \mid H\text{中任意有限个元素均线性无关}\}$, 显然若 $\theta \neq x \in E$, 那么 $\{x\} \in \mathcal{H}$. 如果 $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, 当 $H_1 \subset H_2$ 时, 定义 $H_1 \leqslant H_2$, 易证 $(\mathcal{H}, \leqslant)$ 是半

序集. 设 $\{H_\lambda \in \mathcal{H} \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的全序子集, 令 $H = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$. 由 $\{H_\lambda\}$ 的全序性知, $H \in \mathcal{H}$, 并且 H 是 $\{H_\lambda\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的一个序上界. 根据 Zorn 引理, $\mathcal{H}$ 中存在极大元 H^*, 显然 H^* 就是 E 的 Hamel 基. ■

注 1.1.2 可以证明实线性空间 E 中任意两个 Hamel 基的基数相同, 见文献 [12]. 当 E 中 Hamel 基的基数有限时, 称 E 为有限维空间, 否则称 E 为无穷维空间.

引理 1.1.2 设 E 是实线性空间, $E \neq \{\theta\}$. 如果 H 是 E 的 Hamel 基, 则 $\forall x \in E\backslash\{\theta\}$, 存在唯一的 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset H$, 以及唯一的 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}$, 使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

证明 设 $x \in E\backslash\{\theta\}$, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset H$, $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \subset \mathbf{R}$, 使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. 如果存在正整数 m, 以及

$$\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\} \subset H, \quad \{\mu_1, \cdots, \mu_n, \mu_{n+1}, \cdots, \mu_{n+m}\} \subset \mathbf{R},$$

使得 $x = \sum\limits_{i=1}^{n+m} \mu_i x_i$, 于是

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i) x_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \mu_i x_i = \theta.$$

因为 $\{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}\}$ 线性无关, 从而

$$\mu_i = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad \mu_i = 0, \quad i = n, n+1, \cdots, n+m.$$ ■

定理 1.1.2 (i) 设 E 是无穷维的实赋范线性空间, 则 E 中存在不连续的线性泛函;

(ii) 设 f 是实赋范线性空间 E 中的非零线性泛函, f 不连续当且仅当 $\overline{\mathcal{N}(f)} = E$, 即 f 的零空间 $\mathcal{N}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ 在 E 中稠密.

证明 (i) 设 H 是 E 的 Hamel 基, 因为 E 是无穷维的, 所以 H 中含有无穷多元素, 并且可以从 H 中取出一列线性无关的元素 $\{x_n\}$. 因为 $\forall x \in E$, 存在 $x_i, y_j \in H$ 以及 $\lambda_i, \mu_j \in \mathbf{R}(i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m)$, 使得

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j,$$

故根据引理 1.1.2, 可以定义 E 上的泛函

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i i\|x_i\|.$$

由引理 1.1.2 也可知 f 是线性的, 但是 $f(x_n)=n\|x_n\|(n=1,2,\cdots)$ 表明 f 不连续.

(ii) 设 f 是实赋范线性空间 E 中的不连续线性泛函, 则对任意正整数 n, 存在 $x_n\in E$, 使得 $|f(x_n)|>n\|x_n\|$. 对任意的 $x\in E$, 令

$$y_n=x-\frac{f(x)}{f(x_n)}x_n,$$

于是 $y_n\in\mathcal{N}(f)$. 由于

$$\|y_n-x\|=\frac{|f(x)|}{|f(x_n)|}\|x_n\|\leqslant\frac{|f(x)|}{n}\to 0,$$

故 $x\in\overline{\mathcal{N}(f)}$, 从而 $\overline{\mathcal{N}(f)}=E$.

反之, 设 $\overline{\mathcal{N}(f)}=E$, 则 $\forall x\in E$, 存在 $x_n\in\mathcal{N}(f)$, 使得 $x_n\to x$. 如果 f 连续, 那么 $0=f(x_n)\to f(x)$, 故 f 是零泛函, 矛盾. ■

注 1.1.3 根据 Hahn-Banach 定理, 实赋范线性空间 E 中存在足够多的连续线性泛函, 并且 E 中的线性泛函是连续的当且仅当 $\mathcal{N}(f)$ 是 E 中的闭集, 见文献 [63], [87]. 由定理 1.1.2 可知, 如果 f 是无穷维实赋范线性空间 E 中连续的非零线性泛函, 则 $\overline{\mathcal{N}(f)}\subsetneqq E$.

1.2 赋范线性空间中的锥

设 E 是实赋范线性空间, θ 是 E 中的零元素.

定义 1.2.1 如果 P 是 E 中非空凸闭集, $P\neq\{\theta\}$, 满足条件:

(i) 如果 $x\in P$, $\lambda\geqslant 0$, 那么 $\lambda x\in P$;

(ii) 如果 $x\in P$, $-x\in P$, 那么 $x=\theta$,

则称 P 是 E 中的一个锥.

设 P 是 E 中的锥, $x,y\in E$. 如果 $y-x\in P$, 记 $x\leqslant y$ 或 $y\geqslant x$, 易证 $(E,\leqslant)$ 成为半序集, 称为由锥 P 导出的半序赋范线性空间, 简称为半序赋范线性空间. 显然半序赋范线性空间中的序区间是闭集, 并且易证

定理 1.2.1 设 E 是由锥 P 导出的半序赋范线性空间, 则

(i) 如果 $x,y\in P$, 那么 $x+y\in P$;

(ii) 如果 $x,y,z\in E$, 并且 $x\leqslant y$, 那么 $x+z\leqslant y+z$, 同时 $\forall\lambda\geqslant 0$, $\lambda x\leqslant\lambda y$;

(iii) 如果 $x_n,y_n\in E$, $x_n\leqslant y_n$, 并且 $x_n\to x,y_n\to y$, 那么 $x\leqslant y$.

定义 1.2.2　设 E 是由锥 P 导出的半序赋范线性空间.

(i) 如果 P 的内点集 $\mathring{P} \neq \varnothing$, 则称 P 是体锥;

(ii) 如果 $E = P - P$(即 $\forall x \in E$, 存在 $y, z \in P$, 使得 $x = y - z$), 则称 P 是再生锥;

(iii) 如果存在常数 $N > 0$, 使得对任意的 $\theta \leqslant x \leqslant y$, 都有 $\|x\| \leqslant N\|y\|$, 则称 P 是正规锥, 使不等式成立的最小正数 N 称为 P 的正规常数;

(iv) 如果 E 中任意有序上界的增序列收敛 (即 $\{x_n\} \subset E$, 存在 $y \in E$, 满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant y$, 那么存在 $x \in E$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$), 则称 P 是正则锥;

(v) 如果 E 中任意范数有界的增序列收敛 (即 $\{x_n\} \subset E$, 满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$, $\sup \|x_n\| < \infty$, 那么存在 $x \in E$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$), 则称 P 是全正则锥.

注 1.2.1　如果 $x \leqslant y$ 并且 $x \neq y$, 可记为 $x < y$. 对于体锥 P, 显然 $\theta \notin \mathring{P}$, 如果 $y - x \in \mathring{P}$, 可记为 $x \ll y$ 或 $y \gg x$, 并且易证当 $x \gg \theta$, $\lambda > 0$ 时, 有 $\lambda x \gg \theta$; 以及当 $x \ll y \leqslant z$ 或 $x \leqslant y \ll z$ 时, 有 $x \ll z$. 显然正规锥的正规常数 $N \geqslant 1$. P 是再生锥当且仅当 $E = \mathrm{span} P$. 设 $D \subset E$, 如果存在 $x, y \in E$, $x \leqslant y$, 使得 $D \subset [x, y]$, 则称 D 序有界. 序有界集合不一定范数有界, 范数有界集合也不一定序有界, 见 1.3 节中的注.

定理 1.2.2　如果 P 是 E 中的体锥, 则 P 是再生锥.

证明　设 $x_0 \in \mathring{P}$, 于是存在 $r > 0$, 使得闭球 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - x_0\| \leqslant r\} \subset P$. $\forall x \in E \backslash \{\theta\}$, 令

$$y = \frac{\|x\|}{2r}\left(x_0 + r\frac{x}{\|x\|}\right), \quad z = \frac{\|x\|}{2r}\left(x_0 - r\frac{x}{\|x\|}\right).$$

因为

$$x_0 \pm r\frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}(x_0, r) \subset P,$$

所以 $y, z \in P$. 另外 $x = y - z$, 可见 P 是再生锥. ■

定理 1.2.3　设 P 是 Banach 空间 E 中的锥, 则如下结论互相等价:

(i) P 是正规锥;

(ii) 如果 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, 并且 $x_n \to x$, $y_n \to x$, 那么 $z_n \to x$;

(iii) 任意序区间 $[x, y]$ 范数有界;

(iv) 存在常数 $\delta > 0$, 使得当 $x, y \in P$, 并且 $\|x\| = \|y\| = 1$ 时, $\|x + y\| \geqslant \delta$;

(v) 如果 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, 并且 $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} x$, 那么 $z_n \xrightarrow{w} x$;

(vi) 存在 E 中的等价范数 $\|\cdot\|_1$, 使得对任意的 $\theta \leqslant x \leqslant y$, 都有 $\|x\|_1 \leqslant \|y\|_1$.

证明　我们循环证明 (i)—(iv), 至于 (v) 和 (vi) 的证明见文献 [26], [65], [112].

(i) ⇒(ii): 设 P 是正规锥, 其正规常数为 N. 如果 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, 并且 $x_n \to x$, $y_n \to x$, 于是

$$\theta \leqslant z_n - x_n \leqslant y_n - x_n.$$

从而

$$\|z_n - x_n\| \leqslant N\|y_n - x_n\|,$$

故

$$\begin{aligned}\|z_n - x\| &\leqslant \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leqslant N\|y_n - x_n\| + \|x_n - x\| \\ &\leqslant N\|y_n - x\| + N\|x_n - x\| + \|x_n - x\| \to 0.\end{aligned}$$

(ii) ⇒(iii): 如果 $[x, y]$ 不是范数有界的, 那么对任意正整数 n, 存在 $z_n \in [x, y]$, 使得 $\|z_n\| > n$. 令

$$w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}, \quad x_n = \frac{x}{\|z_n\|}, \quad y_n = \frac{y}{\|z_n\|},$$

于是 $x_n \leqslant w_n \leqslant y_n$. 由于 $x_n \to \theta$, $y_n \to \theta$, 故 $w_n \to \theta$, 这与 $\|w_n\| = 1$ 矛盾.

(iii) ⇒(iv): 如果结论 (iv) 不成立, 那么对任意正整数 n, 存在 $x_n, y_n \in P$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, 使得 $\|x_n + y_n\| < 4^{-n}$. 显然 $x_n + y_n \neq \theta$, 否则由 $-x_n = y_n \in P$ 可知, $x_n = \theta$, 矛盾. 令

$$u_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}}, \quad v_n = \frac{x_n + y_n}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}},$$

于是 $\theta \leqslant u_n \leqslant v_n$, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty.$$

因此由空间的完备性知, 存在 $v \in E$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 显然 $\theta \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v$. 但是

$$\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{\|x_n + y_n\|}} > 2^n,$$

从而序区间 $[\theta, v]$ 无界, 矛盾.

(iv)⇒(i): 如果 P 不是正规的, 那么对任意正整数 n, 存在 $x_n, y_n \in E$, $\theta \leqslant x_n \leqslant y_n$, 使得

$$\|x_n\| > n\|y_n\|, \quad 即 \ \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} < \frac{1}{n} \to 0.$$

令 $z_n = (y_n - x_n)/\|x_n\|$, 显然 $z_n \in P$, 并且由

$$1 - \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} \leqslant \|z_n\| \leqslant 1 + \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|}$$

可知, $\|z_n\| \to 1$. 于是

$$\delta \leqslant \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{z_n}{\|z_n\|}\right\| \leqslant \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + z_n\right\| + \left\|\frac{z_n}{\|z_n\|} - z_n\right\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_n\|} + \|z_n\|\left|\frac{1}{\|z_n\|} - 1\right| \to 0,$$

矛盾. ■

定理 1.2.4　设 P 是 Banach 空间 E 中的锥, 则 P 是全正则锥 $\Rightarrow P$ 是正则锥 $\Rightarrow P$ 是正规锥.

证明　如果 P 不是正规锥, 根据定义 1.2.2 的 (iii), 对任意正整数 n, 存在 $x_n, y_n \in E$, 使得

$$\theta \leqslant x_n \leqslant y_n, \quad \|x_n\| > 2^n\|y_n\|. \tag{1.2.1}$$

令 $u_n = x_n/\|x_n\|$, $v_n = y_n/(2^n\|y_n\|)$, 由 (1.2.1) 可知

$$\theta \leqslant u_n \leqslant \frac{x_n}{2^n\|y_n\|} \leqslant \frac{y_n}{2^n\|y_n\|} = v_n, \tag{1.2.2}$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1. \tag{1.2.3}$$

从而由空间的完备性知, 存在 $v \in E$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v. \tag{1.2.4}$$

对正整数 m, 定义

$$w_n = \begin{cases} v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m}, & n = 2m, \\ v_1 + v_2 + \cdots + v_{2m} + u_{2m+1}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

由 (1.2.2), (1.2.3) 和 (1.2.4) 可知

$$\theta \leqslant w_2 \leqslant w_3 \leqslant \cdots \leqslant w_{2m} \leqslant w_{2m+1} \leqslant \cdots \leqslant v, \quad \sup_{n\geqslant 2}\|w_n\| \leqslant 1,$$

即 $\{w_n\}$ 是增序列, 有序上界并且范数有界. 但是 $\|w_{2m+1} - w_{2m}\| = \|u_{2m+1}\| = 1$, 从而序列 $\{w_n\}$ 不收敛, 这说明 P 既不是全正则锥也不是正则锥.

设 P 是全正则锥, 根据前面的证明可知 P 是正规锥, 记其正规常数为 N. 如果 $\{z_n\}$ 是 E 中有序上界 z 的增序列, 于是 $\theta \leqslant z - z_n \leqslant z - z_1$, 从而 $\|z - z_n\| \leqslant N\|z - z_1\|$, 由此可知 $\{z_n\}$ 范数有界. 再由 P 的全正则性, $\{z_n\}$ 收敛, 故 P 是正则锥. ■

定理 1.2.5　设 P 是 E 中的锥. 如果 E 是自反空间, 则 P 是全正则锥 $\Leftrightarrow P$ 是正则锥 $\Leftrightarrow P$ 是正规锥.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

定理 1.2.5 的证明可见文献 [26], [65].

定义 1.2.3 设 P 是 E 中的锥. 如果对 E 中任意两个元素 x 和 y, $\sup\{x,y\}$ 都存在, 则称 P 是极小锥; 如果对 E 中任意有序上界的非空集 D, $\sup D$ 都存在, 则称 P 是强极小锥.

注 1.2.2 显然, P 是极小锥 $\Leftrightarrow$ 对 E 中任意两个元素 x 和 y, $\inf\{x,y\}$ 都存在; P 是强极小锥 $\Leftrightarrow$ 对 E 中任意有序下界的非空集 D, $\inf D$ 都存在.

如果在度量空间 (X,d) 中引入半序 “ $\leqslant$ ”, 则称为半序度量空间, 可记为 $(X,d,\leqslant)$.

引理 1.2.1 设 $(X,d,\leqslant)$ 是半序度量空间. 如果 $(X,d,\leqslant)$ 中的任意增序列 $\{x_n\}$(即 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots$) 均收敛, 即存在 $x\in X$, 使得 $d(x_n,x)\to 0$, 并且对任意的正整数 n, 有 $x_n\leqslant x$, 则对任意的 $x_0\in X$, 存在 $\overline{x}\in X$, 使得 $x_0\leqslant\overline{x}$, 并且 $S(\overline{x})=\{\overline{x}\}$, 其中 $S(u)=\{v\in X\mid u\leqslant v\}$.

证明 对于 $x_0\in X$, 按如下方式选取序列 $\{x_n\}$:

(i) 如果 $\sup_{x\in S(x_n)}d(x,x_n)<+\infty$, 取 $x_{n+1}\in S(x_n)$, 使得

$$d(x_{n+1},x_n)\geqslant\sup_{x\in S(x_n)}d(x,x_n)-\frac{1}{n};\tag{1.2.5}$$

(ii) 如果 $\sup_{x\in S(x_n)}d(x,x_n)=+\infty$, 取 $x_{n+1}\in S(x_n)$, 使得

$$d(x_{n+1},x_n)\geqslant 1.$$

于是得到 X 中的增序列 $\{x_n\}$, 令 $\{x_n\}$ 收敛到 $\overline{x}\in X$, 并且对任意的正整数 n, 有 $x_n\leqslant\overline{x}$.

由于对任意的正整数 n, $x_0\leqslant x_n\leqslant\overline{x}$, 故存在正整数 n_0, 使得当 $n\geqslant n_0$ 时, $\sup_{x\in S(x_n)}d(x,x_n)<+\infty$. 否则, 由 $d(x_{n+1},x_n)\to 0$ 知, 与对充分大的 n, $d(x_{n+1},x_n)\geqslant 1$, 矛盾.

取 $x'\in S(\overline{x})$, 根据传递性, $x_n\leqslant\overline{x}\leqslant x'$, 于是对任意的正整数 n, $x'\in S(x_n)$. 从而当 $n\geqslant n_0$ 时, 由 (1.2.5) 可知

$$d(x',x_n)\leqslant\sup_{x\in S(x_n)}d(x,x_n)\leqslant d(x_{n+1},x_n)+\frac{1}{n}.$$

因此 $x_n\to x'$, 故 $x'=\overline{x}$, 即 $\{\overline{x}\}=S(\overline{x})$. ■

定理 1.2.6 设 P 是 E 中的锥.

(i) 如果 P 是极小锥, 则 P 是再生锥;

(ii) 如果 P 是再生的强极小锥, 则 P 是极小锥;

(iii) 如果 P 是正则的极小锥, 则 P 是强极小锥.

证明　(i) 对 $x \in E$, 记 $u = \sup\{x, \theta\}$, 于是 $u \in P$. 令 $v = u - x$, 显然 $v \in P$, 并且 $x = u - v$, 即 P 是再生锥.

(ii) 设 $x, y \in E$. 因为 P 是再生的, 所以 $x - y \in P - P$, 并且 $x - y = u - v$, 其中 $u, v \in P$. 于是 $z = x + v = y + u$, 并且 $z \geqslant x, z \geqslant y$, 即 z 是 $\{x, y\}$ 的序上界. 又因为 P 是强极小锥, 所以 $\sup\{x, y\}$ 存在, 即 P 是极小锥.

(iii) 设 D 是 E 中有序下界的非空集, 记 $X = \{x \in E | x \leqslant y,\ \forall y \in D\}$, 显然 X 非空. 对 X 中的增序列 $\{x_n\}$, 显然任意的 $y \in D$ 都是 $\{x_n\}$ 在 E 中的序上界. 因为 P 是正则锥, 所以存在 $x \in E$, 使得 $x_n \to x$. 由于对任意的 $n \geqslant k$ 和 $y \in D$, 有 $x_k \leqslant x_n \leqslant y$, 故 $x_k \leqslant x \leqslant y$. 从而 $x \in X$, 并且对任意的正整数 n, $x_n \leqslant x$. 因此根据引理 1.2.1, 存在 $\overline{x} \in X$, 使得 $S(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$.

对 $z \in X$, 因为 P 是极小锥, 所以存在 $x' = \sup\{z, \overline{x}\}$. 又因为 $z, \overline{x} \in X$, 故 $x' \in X$. 显然 $x' \in S(\overline{x})$, 从而 $x' = \overline{x}$, 于是 $z \leqslant \overline{x}$, 即 $\overline{x} = \inf D$. ■

定义 1.2.4　设 P 是 E 中的锥. 如果存在 E 中的锥 P_1 和常数 $b > 0$, 使得对任意的 $x \in P \backslash \{\theta\}$, 都有 $\overline{B}(x, b\|x\|) = \{y \in E \mid \|y - x\| \leqslant b\|x\|\} \subset P_1$, 则称 P 是可扩锥.

定理 1.2.7　设 P 是 E 中的锥.

(i) P 是可扩锥当且仅当存在 $f \in E^*$ 和常数 $a > 0$, 使得 $f(x) \geqslant a\|x\|$, $\forall x \in P$;

(ii) 如果 E 是 Banach 空间, 则 P 是可扩锥 $\Rightarrow P$ 是全正则锥;

(iii) 如果 E 是有限维空间, 则 P 是可扩锥.

证明　我们只证明结论 (ii), 其余结论的证明可见文献 [26], [41].

设 P 是可扩锥, 于是根据 (i), 存在 $f \in E^*$ 和常数 $a > 0$, 使得

$$f(x) \geqslant a\|x\|, \quad \forall x \in P.$$

如果 $\{x_n\} \subset E$, 满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$, 并且 $M = \sup \|x_n\| < \infty$, 那么

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \leqslant \cdots \leqslant f(x_n) \leqslant \cdots \leqslant M\|f\|,$$

故 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在. 又因为对任意的正整数 p, $x_{n+p} - x_n \in P(n = 1, 2, \cdots)$, 所以

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{1}{a}(f(x_{n+p}) - f(x_n)) \to 0, \quad n \to \infty,$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是存在 $x \in E$, 使得 $\|x_n - x\| \to 0$, 即 P 是全正则锥. ■

从下面 1.3 节中一些具体赋范线性空间中锥的例子可见, 再生锥不一定是体锥, 也不一定是极小锥; 正规锥不一定是正则锥, 正则锥不一定是全正则锥, 全正则锥不一定是可扩锥; 极小锥不一定是强极小锥, 正规的极小锥也不一定是强极小锥, 强极小锥不一定是极小锥.

1.3 赋范线性空间中锥的例子

例 1.3.1 考虑线性空间 $\mathbf{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)\}$，其中的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$P=\{x\in\mathbf{R}^n\mid x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)\},$$

则 P 是 $\mathbf{R}^n$ 中的锥; P 是体锥,

$$\mathring{P}=\{x\in\mathbf{R}^n\mid x_i>0(i=1,2,\cdots,n)\},\tag{1.3.1}$$

从而 P 是再生锥; P 是可扩锥; P 是极小锥也是强极小锥.

证明 显然 P 是非空凸集. 如果 $x\in P$, $\lambda\geqslant 0$, 那么 $\lambda x\in P$; 如果 $x\in P$, $-x\in P$, 那么 $x=\theta$. 令 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})\in P$, 并且 $x_m\to x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n(m\to\infty)$. 于是对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n)$, $x_i^{(m)}\to x_i^{(0)}(m\to\infty)$. 由于 $x_i^{(m)}\geqslant 0$, 故 $x_i^{(0)}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$, 即 $x_0\in P$, 从而 P 是闭集. 因此 P 是 $\mathbf{R}^n$ 中锥.

设 $x_0\in\{x\in\mathbf{R}^n\mid x_i>0(i=1,2,\cdots,n)\}$, 则 $\min_{1\leqslant i\leqslant n}x_i^{(0)}=r>0$. 若 $x\in B(x_0,r)$, 那么对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n)$,

$$|x_i-x_i^{(0)}|\leqslant\|x-x_0\|<r,$$

从而 $x_i>x_i^{(0)}-r\geqslant 0$. 所以 $x\in P$, 即 x_0 是 P 的内点, P 是体锥.

反之, 设 $x_0\in\mathring{P}$, 则存在 $r>0$, 使得 $\overline{B}(x_0,r)\subset P$. 取 $x'=(r/\sqrt{n},r/\sqrt{n},\cdots,r/\sqrt{n})$, 记 $\overline{x}=x_0-x'$, 则 $\|\overline{x}-x_0\|=\|x'\|=r$, 于是 $\overline{x}\in\overline{B}(x_0,r)\subset P$. 从而对任意的 $i(i=1,2,\cdots,n)$,

$$\overline{x}_i=x_i^{(0)}-\frac{r}{\sqrt{n}}\geqslant 0,$$

故 $x_i^{(0)}\geqslant r/\sqrt{n}>0$, 即 $x_0\in\{x\in\mathbf{R}^n\mid x_i>0(i=1,2,\cdots,n)\}$. 因此 (1.3.1) 成立.

根据定理 1.2.2, P 是再生锥. 也可以直接验证 P 是再生锥. 事实上, 对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$, 令 $y_i=\max\{x_i,0\}$, $z_i=-\min\{x_i,0\}(i=1,2,\cdots,n)$, 显然 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in P$, 并且 $x=y-z$.

因为 $\mathbf{R}^n$ 是有限维空间, 由定理 1.2.7(iii) 知 P 是可扩锥. 下面我们利用定理 1.2.7(i) 来证明 P 是可扩锥. 事实上, $\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, 定义

$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$$

易证 $\|\cdot\|_1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的范数. 因为有限维空间中的范数都是等价的 (见文献 [63]), 所以存在常数 $a,b>0$, 使得

$$a\|x\|\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|,\quad \forall x\in\mathbf{R}^n.$$

设

$$f(x)=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,$$

显然 f 是 $\mathbf{R}^n$ 中的线性泛函, 并且 $|f(x)|\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|$, 故 $f\in(\mathbf{R}^n)^*$(或者根据有限维空间中的线性泛函一定连续, 也可知 $f\in(\mathbf{R}^n)^*$, 见文献 [63]). 而 $\forall x\in P$, $f(x)=\|x\|_1\geqslant a\|x\|$, 从而由定理 1.2.7(i) 可知 P 是可扩锥.

根据定理 1.2.7(ii) 和定理 1.2.4, P 是正则锥. 而 P 又是再生锥, 因此根据定理 1.2.6 可知, P 是极小锥当且仅当 P 是强极小锥, 于是我们只需验证 P 是极小锥. 设 $x,y\in\mathbf{R}^n$, 令 $z_i=\max\{x_i,y_i\}(i=1,2,\cdots,n)$, 易见 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\sup\{x,y\}$. 当然也能很容易地直接验证 P 是强极小锥. ■

例 1.3.2　设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空紧集, 考虑线性空间 $C(G)=\{x\mid x(t)$ 是 G 上实值连续函数 $\}$, 其中的范数为 $\|x\|=\max_{t\in G}|x(t)|$, $\forall x\in C(G)$. 令

$$P=\{x\in C(G)\mid x(t)\geqslant 0,t\in G\},$$

$$P_1=\left\{x\in P\mid \int_{G_1}x(t)\mathrm{d}t\geqslant\varepsilon_1\|x\|\right\},$$

$$P_2=\left\{x\in P\mid \min_{t\in G_2}x(t)\geqslant\varepsilon_2\|x\|\right\},$$

其中 G_1,G_2 是 G 的非空闭子集, $0<\varepsilon_1<\mathrm{mes}G_1$, $0<\varepsilon_2<1$, 则 P,P_1 和 P_2 是 $C(G)$ 中的锥; P,P_1 和 P_2 是体锥,

$$\mathring{P}=\{x\in C(G)\mid x(t)>0,t\in G\},\tag{1.3.2}$$

$$\mathring{P}_1=\left\{x\in\mathring{P}\mid \int_{G_1}x(t)\mathrm{d}t>\varepsilon_1\|x\|\right\},\tag{1.3.3}$$

$$\mathring{P}_2=\left\{x\in\mathring{P}\mid \min_{t\in G_2}x(t)>\varepsilon_2\|x\|\right\},\tag{1.3.4}$$

从而 P, P_1, P_2 都是再生锥; P 是正规锥, 但不是正则锥; P_1 和 P_2 都是可扩锥; P 是极小锥, 但不是强极小锥; P_1 和 P_2 既不是极小锥, 也不是强极小锥.

证明　(i) 我们只需验证 P 是 $C(G)$ 中的闭集, 即知 P 是 $C(G)$ 中的锥. 令 $\{x_m\}\subset P$, 并且当 $m\to\infty$ 时, $x_m\to x_0\in C(G)$, 于是 $x_m(t)$ 在 G 上一致收敛到 $x_0(t)$. 因为 $x_m(t)\geqslant 0(t\in G)$, 所以 $x_0(t)\geqslant 0(t\in G)$, 即 $x_0\in P$, 故 P 是 $C(G)$ 中的闭集.

(ii) 设 $x, y \in P_1$, $\lambda \in [0,1]$, 于是

$$\begin{aligned}
&\int_{G_1} (\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) \mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_{G_1} x(t) \mathrm{d}t + (1-\lambda) \int_{G_1} y(t) \mathrm{d}t \\
&\geqslant \lambda \varepsilon_1 \|x\| + (1-\lambda) \varepsilon_1 \|y\| \\
&\geqslant \varepsilon_1 \|\lambda x + (1-\lambda) y\|,
\end{aligned}$$

于是 P_1 是凸集. 令 $\{x_m\} \subset P_1$, 并且当 $m \to \infty$ 时, $x_m \to x_0 \in C(G)$, 故 $\|x_m\| \to \|x_0\|$. 由于 $x_m(t)$ 在 G 上一致收敛到 $x_0(t)$, 所以

$$\int_{G_1} x_m(t) \mathrm{d}t \to \int_{G_1} x_0(t) \mathrm{d}t,$$

从而

$$\int_{G_1} x_0(t) \mathrm{d}t \geqslant \varepsilon_1 \|x_0\|,$$

故 P_1 是 $C(G)$ 中的闭集. 因此易见 P_1 是 $C(G)$ 中的锥.

(iii) 设 $x, y \in P_2$, $\lambda \in [0,1]$, 于是

$$\begin{aligned}
&\min_{t \in G_2} (\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) \\
&\geqslant \lambda \min_{t \in G_2} x(t) + (1-\lambda) \min_{t \in G_2} y(t) \\
&\geqslant \lambda \varepsilon_2 \|x\| + (1-\lambda) \varepsilon_2 \|y\| \\
&\geqslant \varepsilon_2 \|\lambda x + (1-\lambda) y\|,
\end{aligned}$$

则 P_2 是凸集.

定义 $\beta(x) = \min_{t \in G_2} x(t)$, $\forall x \in C(G)$. 于是当 $x, y \in C(G)$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\beta(x) - \beta(y) &= \min_{t \in G_2} x(t) - \min_{t \in G_2} y(t) = \min_{t \in G_2} x(t) + \max_{t \in G_2} (-y(t)) \\
&\leqslant \max_{t \in G_2} (x(t) - y(t)) \leqslant \max_{t \in G_2} |x(t) - y(t)| \\
&\leqslant \max_{t \in G} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|,
\end{aligned}$$

同理, $\beta(y) - \beta(x) \leqslant \|x - y\|$, 故 $|\beta(x) - \beta(y)| \leqslant \|x - y\|$, 即 $\beta(x)$ 是 $C(G)$ 上的一致连续泛函.

令 $\{x_m\} \subset P_2$, 并且当 $m \to \infty$ 时, $x_m \to x_0 \in C(G)$, 于是 $\|x_m\| \to \|x_0\|$. 由 $\beta(x)$ 在 $C(G)$ 上的连续性知

$$\beta(x_m) = \min_{t \in G_2} x_m(t) \to \beta(x_0) = \min_{t \in G_2} x_0(t),$$

从而 $\min_{t\in G_2} x_0(t) \geqslant \varepsilon_2\|x_0\|$, 故 P_2 是 $C(G)$ 中的闭集. 因此易见 P_2 是 $C(G)$ 中的锥.

(iv) 设

$$x_0 \in \{x \in C(G) \mid x(t) > 0, t \in G\},$$

则

$$\min_{t\in G} x_0(t) = r > 0.$$

如果 $x \in B(x_0, r)$, 那么

$$x(t) > x_0(t) - r \geqslant 0 (t \in G).$$

所以 $x \in P$, 即 x_0 是 P 的内点, P 是体锥.

反之, 设 $x_0 \in \mathring{P}$, 则存在 $r > 0$, 使得 $\overline{B}(x_0, r) \subset P$. 取 $x_1(t) = x_0(t) - r (t \in G)$, 则 $x_1 \in C(G)$, 并且 $\|x_1 - x_0\| = r$, 于是 $x_1 \in \overline{B}(x_0, r) \subset P$. 从而 $x_0(t) - r \geqslant 0$, 故 $x_0(t) \geqslant r > 0 (t \in G)$, 即 $x_0 \in \{x \in C(G) \mid x(t) > 0, t \in G\}$. 因此 (1.3.2) 成立.

(v) 设

$$x_0 \in \left\{x \in \mathring{P} \mid \int_{G_1} x(t)\mathrm{d}t > \varepsilon_1\|x\|\right\},$$

则 $\min_{t\in G} x_0(t) = r > 0$. 取 $\delta > 0$ 满足

$$\delta \leqslant \min\left\{r, \frac{\int_{G_1} x_0(t)\mathrm{d}t - \varepsilon_1\|x_0\|}{\varepsilon_1 + \mathrm{mes}G_1}\right\}. \tag{1.3.5}$$

于是当 $x \in B(x_0, \delta)$ 时,

$$x(t) > x_0(t) - \delta \geqslant r - \delta \geqslant 0, \quad t \in G,$$

并且由 (1.3.5) 得

$$\int_{G_1} x(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{G_1} (x_0(t) - \delta)\mathrm{d}t = \int_{G_1} x_0(t)\mathrm{d}t - \delta\mathrm{mes}G_1 \geqslant \varepsilon_1\|x_0\| + \varepsilon_1\delta \geqslant \varepsilon_1\|x\|,$$

所以 $x \in P_1$, 即 x_0 是 P_1 的内点, P_1 是体锥.

反之, 设 $x_0 \in \mathring{P}_1$, 则存在 $r > 0$, 使得 $\overline{B}(x_0, r) \subset P_1$. 取 $x_1(t) = x_0(t) - r (t \in G)$, 类似可得 $x_0(t) \geqslant r > 0 (t \in G)$, $x_1 \in P_1$. 并且

$$\int_{G_1} x_0(t)\mathrm{d}t = \int_{G_1} (x_1(t) + r)\mathrm{d}t = \int_{G_1} x_1(t)\mathrm{d}t + r\mathrm{mes}G_1$$

$$\geqslant \varepsilon_1\|x_1\| + r\mathrm{mes}G_1 > \varepsilon_1\|x_1\| + \varepsilon_1 r \geqslant \varepsilon_1\|x_1 + r\| = \varepsilon_1\|x_0\|,$$

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com