徐文兵　李劲松　齐亚超　编著

不等式
秘诀解读

INEQUALITY

清华大学出版社

不等式秘诀解读

徐文兵　李劲松　齐亚超　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是清华大学附属中学针对大学自主招生开设的校本课程“不等式选讲”的教材，该校本课程面向高一优秀学生，在高一下学期开设，共18学时，系统讲授不等式问题的思想与方法，拓宽解决数学问题特别是不等式问题的思路. 全书共14讲，分为基础知识篇、思想进阶篇和试题赏析篇，每讲精选例题，并配有习题，附有习题提示与解答.

本书适合高中师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

不等式秘诀解读/徐文兵，李劲松，齐亚超编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-45984-2

Ⅰ. ①不…　Ⅱ. ①徐…　②李…　③齐…　Ⅲ. ①不等式—研究　Ⅳ. ①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第312855号

责任编辑：赵轶华
封面设计：常雪影
责任校对：袁　芳
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：7　　**字　　数**：153千字
版　　次：2017年3月第1版　　**印　　次**：2017年3月第1次印刷
印　　数：1～1000
定　　价：36.00元

产品编号：071408-01

前 言

与等量关系一样，不等量关系也是自然界中存在的基本数学关系，是数学研究的重要内容.建立不等观念、处理不等关系与处理等量问题是同样重要的.《普通高中数学课程标准(实验)》特别强调不等式的现实背景和实际应用，把不等式作为刻画现实世界中不等关系的数学工具，作为描述刻画问题的一种数学模型.

不等式与数、式、方程、函数、几何等内容有密切的联系.如讨论方程或方程组的解的情况；用判别式的符号判断一元二次方程的根的存在情况；研究函数的定义域时常用到以下不等关系：分式的分母不为零；偶次根式的被开方数非负；对数的真数大于0；函数的单调性；利用自变量的不等关系来研究函数值的变化趋势；刻画函数的值域、最大值、最小值等概念.

在本校本课程的学习中，第1～5讲针对不等式的基础知识，将系统学习均值不等式、柯西不等式、排序不等式、"零件不等式"这些基本而重要的不等式，扩展了学习者对较复杂代数式的不等关系的认识，提高了求函数的值域与最值的能力，又为进一步学习不等式的证明奠定了基础.

第6～9讲强化了证明不等式的方法与技巧、运用数形结合思想解决问题的能力、构造法来解决不等式问题、巧用齐次化和非齐次化思想，使学习者学会变通灵活地解决问题，可谓数学思维之美与形象思维之妙的完美结合！

第10～12讲针对线性规划问题、典型的自主招生题和竞赛题作深入剖析和探究.线性规划问题开拓了不等式的实际运用领域，揭示出不等式的几何意义；典型的自主招生题和竞赛题，使学生对不等式的认识有了质的飞跃，无疑会使学习者产生强烈的学习兴趣和探究的动力.

第13、14讲是笔者在教学中的积累与探索，对一些有趣的不等式问题给出了妙解与改编，并从命题人的角度分享了试题的原创命制心路历程，极有利于学生思维层面上的提升，进一步促使学习者在思维的更深层面上，主动完成对函数、方程、不等式有机数学知识网络的构建.

总之，不等式在高中数学中占有重要的地位，是进一步学习数学的基础知识.在高等数学中，不等关系是刻画诸多数学概念的有力数学工具.同样，对现实世界的数学刻画中存在着大量的不等关系，相等是特殊的，不等是普遍的.

编 者
2017年2月

目　录

基础知识篇

思想进阶篇

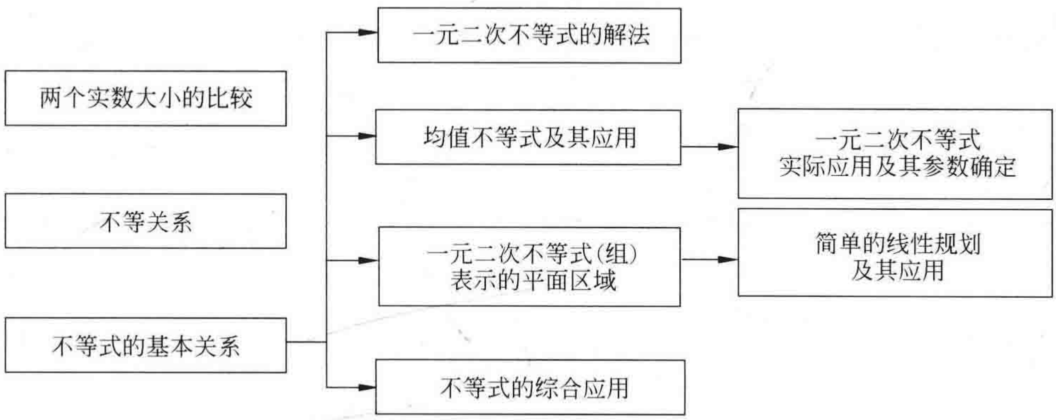
试题赏析篇

基础知识篇

第1讲

不等式基础知识整合

一、知识清单



二、例题选讲

例 1 (1) 设 $x>0,y>0$,不等式$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立,求 a 的最小值.

(2) 设 $x\in\mathbf{R}$,不等式 $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

思路点拨:这两个小问题都与"恒成立"有关,可以考虑把待确定的参数分离到不等式的一端,用最大值或最小值求解.

解:(1) $\because x>0,y>0,\therefore$不等式$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}\Leftrightarrow a\geqslant\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$.

由已知 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$恒成立,故 $a\geqslant\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}$.

$\because\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x+y}=1+\dfrac{2\sqrt{xy}}{x+y}\leqslant1+\dfrac{x+y}{x+y}=2$,当且仅当 $x=y$ 时取等号,

$\therefore \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}\right)_{\max}=\sqrt{2}$，可得 $a\geqslant\sqrt{2}$，a 的最小值为$\sqrt{2}$.

(2) $2x^2-a\sqrt{x^2+1}+3>0\Leftrightarrow a\sqrt{x^2+1}<2x^2+3\Leftrightarrow a<\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$,

只需$a<\left(\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}\right)_{\min}$.

$\because \dfrac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}}=2\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，$2\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$无解，

$\therefore$令 $\sqrt{x^2+1}=t$，则 $t\geqslant1$. 再令 $g(t)=2t+\dfrac{1}{t}$，$g(t)$在$[1,+\infty)$上是增函数.

故当 $t=1$，$x=0$ 时，$g(t)$取最小值 3，$\therefore a<3$.

技巧提炼：用基本不等式求函数的最大值或最小值，一定要具备“一正、二定、三相等”，定值的条件是一个难点，往往需要在给定的代数式里进行拼凑或构造，用基本不等式取不到等号时可以考虑用导数研究函数单调性.

例 2 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2$. 若对于任意的 $x\in[t,t+2]$，不等式 $f(x+t)\geqslant2f(x)$恒成立，则实数 t 的取值范围是(　　).

A. $[\sqrt{2},+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $(0,2]$　　D. $(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[2,+\infty)$

思路点拨：遇函数问题，从定义域、值域、单调性、奇偶性对其进行“查体”是常规思路，立足本题题设 $f(x+t)\geqslant2f(x)$，首先应该关注函数 $f(x)$的单调性最自然不过. 若把分段函数 $f(x)$，$f(x+t)$代入，较繁. 求函数的最大(小)值在解决“恒成立”问题中有着重要应用.

解：$\because$当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2$，$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上是增函数.

又$\because f(x)$是奇函数，

$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，且 $2f(x)=f(\sqrt{2}x)$，

即 $f(x+t)\geqslant2f(x)\Leftrightarrow f(x+t)\geqslant f(\sqrt{2}x)\Leftrightarrow x+t\geqslant\sqrt{2}x\Leftrightarrow x\leqslant(\sqrt{2}+1)t$.

由已知 $f(x+t)\geqslant2f(x)$恒成立，故 $x\leqslant(\sqrt{2}+1)t$ 恒成立.

$\because x$ 的最大值是 $t+2$，故只需$(\sqrt{2}+1)t\geqslant t+2$，解得 $t\geqslant\sqrt{2}$，故选 A.

技巧提炼：①函数的单调性是把不等式中抽象函数符号转化为具体函数的重要方法. ②有关不等式的综合性试题，历来以“含参数的不等式恒成立”体现之，常规的通法是分离参数，即使得不等式一端只含有参数(不含其他变量)，另一端只含有变量(不含参数)，即将 $F(x,a)>0$ 分离成 $f(x)>g(a)$或 $f(x)<g(a)$的形式，再利用“$f(x)>g(a)$或 $f(x)<g(a)$恒成立$\Leftrightarrow[f(x)]_{\min}>g(a)$或$[f(x)]_{\max}<g(a)$”的基本原理求解.

例 3 求证：对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+xy+y^2\geqslant 3(x+y-1)$ 总成立.

思路点拨：证明不等式的一般方法为作差，作差后变形是比较大小的关键一环，待证不等式中出现 x^2,xy,y^2,x,y 元素，可以通过配方将它们联系起来，化成几个完全平方数和的形式或一些易判断符号的因式积的形式.

证明：$x^2+xy+y^2-3(x+y-1)$

$$=x^2+(y-3)x+(y^2-3y+3)$$

$$=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2-\frac{(y-3)^2}{4}+(y^2-3y+3)$$

$$=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}\right)$$

$$=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2\geqslant 0,$$

当且仅当 $x+\frac{y-3}{2}=0$ 且 $y-1=0$，即 $x=y=1$ 时取等号.

即对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，不等式 $x^2+xy+y^2\geqslant 3(x+y-1)$ 总成立.

技巧提炼：作差后将二元二次六项式转化为以 x 为主元的二次三项式后，两次配方获得证明.

例 4 已知关于 x 的不等式 $\frac{a(x-1)}{x-2}>2$ 的解集为 A，且 $3\notin A$.

(1) 求实数 a 的取值范围.

(2) 求 A.

思路点拨：①理解 $3\notin A$ 的含义，即当 $x=3$ 时，有 $\frac{a(x-1)}{x-2}\leqslant 2$. ②先转化为标准型，再对参数 a 进行分类讨论，注意层次性，先对系数 $a-2$ 的符号进行讨论，再对根 2 和 $\frac{a-4}{a-2}$ 的大小进行讨论.

解：(1) $\because 3\notin A$，$\therefore$ 当 $x=3$ 时，有 $\frac{a(x-1)}{x-2}\leqslant 2$，即 $\frac{2a}{3-2}\leqslant 2$，

$\therefore a\leqslant 1$，故 a 的取值范围是 $\{a\mid a\leqslant 1\}$.

(2) $\frac{a(x-1)}{x-2}>2\Leftrightarrow\frac{a(x-1)}{x-2}-2>0\Leftrightarrow\frac{(a-2)x-(a-4)}{x-2}>0$.

由(1)知 $a-2<0$，故 $\dfrac{x-\frac{a-4}{a-2}}{x-2}<0$.

由$\frac{a-4}{a-2}-2=\frac{-a}{a-2}$知：

当$0<a\leqslant 1$时，$\frac{a-4}{a-2}>2$，则原不等式解集$A=\left(2,\frac{a-4}{a-2}\right)$；

当$a=0$时，原不等式解集$A=\varnothing$；

当$a<0$时，$\frac{a-4}{a-2}<2$，原不等式解集$A=\left(\frac{a-4}{a-2},2\right)$.

例 5 已知关于x的不等式$\log_a(8-ax)>1$在$[1,2]$上恒成立，求实数a的取值范围.

思路点拨：转化为求某函数的最大值、最小值问题.去掉对数符号时，要利用对数函数的单调性，因此要对底数a分类讨论.

解：(1) 当$a>1$时，

$\log_a(8-ax)>1\Leftrightarrow\log_a(8-ax)>\log_a a\Leftrightarrow 8-ax>a\Leftrightarrow a<\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$.

由已知，不等式$a<\frac{8}{x+1}$对$x\in[1,2]$恒成立.

设$f(x)=\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$，则$f(x)$在$[1,2]$上是减函数，$f(x)_{\min}=f(2)=\frac{8}{3}$.

故$1<a<\frac{8}{3}$.

(2) 当$0<a<1$时，

$\log_a(8-ax)>1\Leftrightarrow\log_a(8-ax)>\log_a a\Leftrightarrow\begin{cases}8-ax<a\\8-ax>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{8}{x+1}\\a<\frac{8}{x}\end{cases}(x\in[1,2])$.

由已知，不等式$a>\frac{8}{x+1}$与不等式$a<\frac{8}{x}$对$x\in[1,2]$均恒成立.

设$f_1(x)=\frac{8}{x+1}(x\in[1,2])$，$f_2(x)=\frac{8}{x}(x\in[1,2])$，

则$f_1(x)$，$f_2(x)$在$[1,2]$上均是减函数，

$\therefore f_1(x)_{\max}=f_1(1)=4$，$f_2(x)_{\min}=f_2(2)=4$，$\therefore\begin{cases}a>4\\a<4\end{cases}$，此不等式组无解.

综上所述，实数a的取值范围是$\left(1,\frac{8}{3}\right)$.

技巧提炼：求参数的取值范围时要注意等价转化，在去掉对数符号时，$8-ax>0$容易漏掉，要注意等价转化.

习　题　1

1. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$,比较 $5x^2+y^2+z^2$ 与 $2xy+4x+2z-2$ 的大小.

2. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$x-2y+3z=0$,则$\dfrac{y^2}{xz}$的最小值________.

3. 三个同学对问题"关于 x 的不等式 $x^2+25+|x^3-5x^2|\geqslant ax$ 在$[1,12]$上恒成立,求实数 a 的取值范围"提出各自的解题思路.

甲说:"只需不等式左边的最小值不小于右边的最大值."

乙说:"把不等式变形为左边含变量 x 的函数,右边仅含常数,求函数的最值."

丙说:"把不等式两边看成关于 x 的函数,作出函数图象."

参考上述解题思路,你认为他们所讨论的问题的正确结论,即 a 的取值范围是________.

4. 设 $a>0$,解关于 x 的不等式 $ax^2-(a^2+2)x+2a\leqslant 0$.

5. 已知关于 x 的不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的所有整数解之和为 27,求实数 a 的取值范围.

第2讲

均值不等式应用技巧

一、知识清单

均值不等式

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n\geqslant nx_1x_2\cdots x_n,$$

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n\quad(x_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号.

二、例题选讲

技巧一：为了求和的最小值，首先需要通过代数变形，使得各项乘积为定值.

例1 （第21届“希望杯”全国数学邀请赛高一第一试）已知 a,b,c 为非负数，则 $f(a,b,c)=\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}$ 的最小值是________.

思路点拨：运用均值不等式求和式的最小值，要求“一正、二定、三相等”，而 $\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b}{c}$ 不是定值，因此要进行代数变形.

解：$f(a,b,c)=\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}=\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}\right)-1$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c}}-1=2.$$

当 $\frac{c}{a}=\frac{a}{b+c}=\frac{b+c}{c}$ 时取等号（如 $a=c=1,b=0$），∴所求最小值为2.

例2 （2010年高考四川理科）设 $a>b>c>0$，则 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

思路点拨：先将 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 看成关于 c 的二次函数，经配方求出其最小值为 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$，考虑到运用均值不等式求 $a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值时需要“一正、二定、三相等”的条件，而 $a^2\cdot\frac{1}{ab}\cdot\frac{1}{a(a-b)}$ 不是定值，所以要进行代数变形.

解：$2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2=(5c-a)^2+a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$

$\geqslant 0+a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}=a^2-ab+ab+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}$

$=ab+\frac{1}{ab}+a(a-b)+\frac{1}{a(a-b)}\geqslant 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}+2\sqrt{a(a-b)\cdot\frac{1}{a(a-b)}}=4.$

当且仅当 $a-5c=0, ab=1, a(a-b)=1$ 时等号成立，即 $a=\sqrt{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{2}, c=\frac{\sqrt{2}}{5}$ 时取等号.

故答案为 B.

技巧二：先通过代数变形，将二元对称代数式变形成关于基本对称多项式 $a+b$，ab 的式子，再利用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ 将三元对称代数式变形成关于基本对称多项式 $a+b+c, ab+bc+ca, abc$ 的式子，再利用 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$.

例 3 （第 21 届“希望杯”全国数学邀请赛高二第一试）已知 $\lg a+\lg b=0$，则满足不等式 $\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\leqslant\lambda$ 的实数 λ 的取值范围是________.

思路点拨：关键是求 $f(a,b)=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}$ 的最大值. 先将二元对称式化成关于 $a+b, ab$ 的表达式，再用 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

解：$f(a,b)=\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}=\frac{a(b^2+1)+b(a^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

$=\frac{(ab+1)(a+b)}{a^2b^2+a^2+b^2+1}=\frac{(ab+1)(a+b)}{(ab)^2+(a+b)^2-2ab+1}.$

$\because \lg a+\lg b=0$，$\therefore ab=1$，$\therefore f(a,b)=\frac{2}{a+b}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{ab}}=1.$

$\therefore$ 实数 λ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

例 4 设 $a,b,c\geqslant 0,a+b+c=1$，求证：

$$2\leqslant (1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant (1+a)(1+b)(1+c).$$

思路点拨：先将不等式表示为关于基本对称多项式 $a+b+c,ab+bc+ca,abc$ 的式子，再利用三个数的均值不等式.

证明：设 $\begin{cases}ab+bc+ca=u\\ abc=v\end{cases}$，则

$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc=2+u+v.$

而 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=1-2u$，

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4&=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=(1-2u)^2-2[(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)]\\&=(1-2u)^2-2(u^2-2v\cdot 1)=2u^2-4u+4v+1,\end{aligned}$$

$\therefore (1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$

$=3-2(a^2+b^2+c^2)+(a^4+b^4+c^4)$

$=3-2(1-2u)+(2u^2-4u+4v+1)$

$=2+2u^2+4v$，

$\therefore$待证不等式等价于 $2\leqslant 2+2u^2+4v\leqslant 2+u+v.$

$\because u\geqslant 0,v\geqslant 0,\therefore 2+2u^2+4v\geqslant 2$ 显然成立.

而 $2+2u^2+4v\leqslant 2+u+v\Leftrightarrow 3v\leqslant u(1-2u).$

事实上 $u(1-2u)=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)\geqslant (ab+bc+ca)\cdot\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2$

$$\begin{aligned}&=(ab+bc+ca)\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}\times\frac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{abc}\\&=3abc=3v.\end{aligned}$$

即 $2\leqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant(1+a)(1+b)(1+c).$

例 5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$. 求证：

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leqslant\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

证明：设 $a+b+c=x,ab+bc+ca=y$，

原不等式 $\Leftrightarrow \dfrac{\sum(1+b+c)(1+c+a)}{(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)}\leqslant\dfrac{\sum(2+a)(2+b)}{(2+a)(2+b)(2+c)}.$ ①

又 $(2+a)(2+b)(2+c)=8+4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)+abc=8+4x+2y+1$

$=9+4x+2y.$

同理，可以计算得出

$$\sum(1+b+c)(1+c+a)=x^2+y+4x+3,$$

$$\sum(2+a)(2+b)=12+4x+y,$$

$$(1+a+b)(1+b+c)(1+c+a)=x^2+y+2x+xy.$$

∴只需证$\dfrac{x^2+y+4x+3}{x^2+y+2x+xy}\leqslant\dfrac{12+4x+y}{9+4x+2y}$.

上式$\Leftrightarrow\dfrac{2x+3-xy}{x^2+y+2x+xy}\leqslant\dfrac{3-y}{9+4x+2y}$

$$\Leftrightarrow 3x^2y+xy^2+12xy-5x^2-y^2-6xy-3y-24x-27\geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}x^2y-5x^2\right)+\left(\frac{1}{3}xy^2-y^2\right)+(xy-3y)+\left(\frac{4}{3}x^2y-4xy\right)$$

$$+\left(\frac{2}{3}xy^2-2xy\right)+(8xy-24x)+(3xy-27)\geqslant 0. \qquad ②$$

由均值不等式得，$x=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$，$y=ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}=3$.

∴②式成立，等号当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得.

注：用三元初等对称多项式将①式表示出，这样便于去分母，再根据均值不等式建立起 $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc 之间的关系，从而达到目标.

习　题　2

1. 求证：对任意实数 $a>1$，$b>1$，都有不等式$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geqslant 8$.

2. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

3. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，$b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^+$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

4. 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$，求证：

$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\frac{x_3^2}{1-x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

5. α,β,γ 为锐角，且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证：

$$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}.$$

第3讲

柯西不等式及其应用

一、知识清单

二维形式的柯西不等式$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2$，其中，$a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，等号成立的条件是$ad=bc$，若$a,b,c,d$都不为零，等价于$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$等号成立.

把二维形式推广到n维：

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

$$(a_ib_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n),$$

等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$或$b_i=ka_i$时成立(k为常数，$i=1,2,\cdots,n$).

令$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$B=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$，$C=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，等价于证明$B^2-AC\leqslant0\Leftrightarrow(2B)^2-4AC\leqslant0$，构造函数去证明.

证明：构造二次函数$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

若a_i全为0，则结论显然成立；

若a_i不全为0，则$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$，又$f(x)\geqslant0$恒成立.

$\because\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0$，

即$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

当且仅当$a_ix+b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，即$a_i=kb_i(i=1,2,\cdots,n)$时等号成立，

若$b_i\neq0$，亦即$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时等号成立.

二、例题选讲

例1 (2010年浙江省五校联考)已知$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，$a+b+c=1$.

(1) 求$(a+1)^2+4b^2+9c^2$的最小值.

(2) 求证：$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(1) **解**：很明显，此题需要设法嵌入两个因式，对两个因式的合理嵌入是解此题的关键所在.