电动力学
与
相对論

孙景李编

南京大学
1963

目　录

电动力学与相对論

引　言

电动力学与相对論是組成本书的两个独立而又相关的部分，而电动力学部分的目的在於研究并闡明电磁場的基本属性，它的运动规律以及它和带电粒子間的相互作用，回顾一下整个物理世界的概况，将会有助於加深对本課程的地位与目的的理解。如我們之所週知苹果之所以会掉在地上是由於地球对它的吸引，一个带电的物体放在电磁場中之所以会运动，是由於电磁場对它施加以力，中子質子之所以能够緊密地結合在一起而形成各种不同的坚固的原子核，是由於它們之間存在着一种非常强的“核力”(Nuclear Forces)的作用的結果，总之宇宙間之种种事物形形色色，千変万化，穷其因不外乎“相互作用”而已。

粗略地說，自然界中的相互作用大致可以归結为如下四大类：

(Ⅰ)强相互作用 (Strong interactons)，例如上面所說的中子，質子彼此間的相互作用卽属此类，为了与其他各类在强度上相互比較方便，取此类相互作用强度之数量級为1。

(Ⅱ)电磁相互作用 (Electromagnetic interactions)，它的强度的数量級为 10^{-2}，这类相互作用卽带电粒子与电磁場相互作用。

(Ⅲ)弱相互作用 (Weak interactons)，存在於基本粒子間，其数量級为 10^{-13}。

(Ⅳ)重力相互作用(Gravitational interactions)，例如地球对於苹果之吸引卽属此类，它是牛頓力学研究的主要对象之一，它的强度的数量級为 2×10^{-39}，

电动力学之主要目的实卽在於研究电磁作用的种种性質，並且借助於对这些基本性質的全面了解，来处理属於这一領域的一些实际問題。

众所週知，在电动力学的形成，发展以至完备的历史时期，物理学还只是被限制在宏观領域之中，微观以至於超微观世界物理学的发展，还是在这以后的事，因此所有电动力学的基本定律都是建立在宏观世界的基础之上的，这是問題的一个方面，另一方面是当时快速变化的电荷电流情形由於实驗水平的限制也还沒有涉及，因此这些規律又是建立在稳定或似稳过程的基础上的。生产的发展促使了近代实驗与理論物理的进一步发展，使得我們不仅有可能而且也有迫切的需要来涉及到快速变化电荷电流的情形，以及微观甚至超微观世界的內部規律問題，这样自然就不免提出了如下的問題：我們这些建立在宏观的稳定或似稳过程基础上的規律对於微观以至超微观世界，对於快速变化电荷电流的情形是否适合的呢？显然，凭主观的臆測来作出任何結論都是徒然的，唯一的解决这一問題的办法是实踐，也就是說我們把这些規律推广到如上所述的各种情形中去，看它們是否与实驗相符合，如果符合那就可以推广，如果不符合，那就說明这种推广是失敗的，事实表明，当推广到快速变化的电荷电流情形一部分的結果（如电磁波的輻射

和傳播）是和实驗符合的，但另一部分結果（如运动物体的电磁現象）則不与实驗相符合，而在推广到微观或超微观世界中去的时候，这些規律則不是那么好的和实驗符合的，理由很显然，在微观或超微观世界量子效应不能被忽略。尽管如此我們还願意来研究它的这种推广，因为虽然这种理論不能給出严格定量的結果，但对於定性的說明問題却仍有很大的作用，而它的优点在於比考虑了量子效应的所謂量子电动力学要簡单的多。

在麦克斯威方程建立以后，电动力学的基本理論已达完整境地，但是人們对於电磁場本質的認識却仍然是錯誤的，即把电磁場解釋为某种充滿整个宇宙空間的类似於彈性介質的“以太”的运动形态，而运动介質中电磁現象的进一步实驗研究，指出了这种理論观点所无从解决的根本困难。在分析这些新的实驗結果的基础上爱因斯坦提出了新的狭义相对論的理論，它否定了原有的以太理論，提出了新的原理，变革了长期以来物理学中的帶有形而上学局限性的时空观念——牛頓时空观，創造性地指出了时間和空間的联系，这一理論不仅使电动力学摆脫了机械論的影响，而且广泛地影响了物理学的其他学科，这正是我們这个課程狭义相对論一章所要研究的。随着近代科学的发展，晚近以来对於建立在广义协变原理基础上的广义相对論日益显示其主要性。对广义相对論的全面討論將超出本书范圍作为我們这儿本书的結束，將只对广义相对論作一簡要的討論，在不运用复杂的張量分析所許可的条件下，尽可能的給出它的基本原理和主要結論。

第一章　矢量 張量与δ—函数

§1.1　张量的概念

設我們从連續介質力学出发来介紹一下張量的概念，当一个彈性物体受到外力时，它內部分子与分子間一般也受到相当复杂的力，在客观的描述里，这个內部力可由下面的方式表示。

在彈性物体內，設想有一个任意平面，平面两面的物質受到相等而相反的力，令平面后面的物質，在单位面积上，受到平面前面物質的力为$\vec{T}$，$\vec{T}$显然地与所取平面的方向有关，令$\vec{n}$为平面的方向（向着平面前面垂直於平面的方向），$\vec{T}$即称为彈性体內在平面$\vec{n}$上的張力，必須注意的是：在一般情況下，$\vec{T}$是不平行於$\vec{n}$的，下面我們指出，如果我們已知在垂直於x,y,z軸的三个平面上的張力，那么在任意一个平面$\vec{n}$上的張力$\vec{T}$可立即算出。令平面x（即垂直於x軸的平面）上的張力的三个分量为：

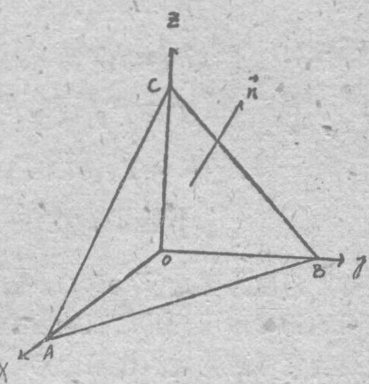


图 (1.1)

$$T_{xx}, T_{xy}, T_{xz} \tag{1.1}$$

同样命在平面y,z上的張力为：

$$\begin{aligned} &T_{yx}, T_{yy}, T_{yz} \\ &T_{zx}, T_{zy}, T_{zz} \end{aligned} \tag{1.2}$$

或者为方便計把x,y,z換作1,2,3有張力的九个分量为：

$$\begin{aligned} &T_{11} T_{12} T_{13} \\ &T_{21} T_{22} T_{23} \\ &T_{31} T_{32} T_{33} \end{aligned} \tag{1.3}$$

以下我們均彷此以x_1，x_2，x_3表x，y，z，現在我們考慮作用在任一方向$\vec{n}$的平面ABC上的力，令ABC的面积为a，这个面上所受到的力为$a\vec{T}$我們再考慮在体积$OABC$內的物質，这物質除去受上述作用力$a\vec{T}$以外尙受到OCB，OAC和OAB三个平面外面的物質对於它的作用力，这三个平面的面积各为an_1, an_2, an_3（n_1, n_2, n_3为$\vec{n}$沿方x，y，z向的分量）OCB平面外面物体对於体积$OABC$所施的力正是an_1乘

上平面 $-x$ 上的張力，但平面 $-x$ 上的張力又是平面 x 上的張力的負数，同样我們可以找到其余两个平面 OAB 和 OAC 上所受到的力，我們得体积 $OABC$ 所受到的总力 $\vec{T}_t$ 的分量为

$$
\begin{aligned}
T_{t1}&=aT_1-an_1T_{11}-an_3T_{21}-an_3T_{31}\\
T_{t2}&=aT_2-an_1T_{12}-an_2T_{22}-an_3T_{32}\\
T_{t3}&=aT_3-an_1T_{13}-an_2T_{23}-an_3T_{33}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

这个体积所受到的总力应等於这个体积的慣性力，由於此四面体处於力学平衡状态故合力为零，因之有：

$$
\begin{aligned}
T_1&=n_1T_{11}+n_2T_{21}+n_3T_{31}\\
T_2&=n_1T_{12}+n_2T_{22}+n_3T_{32}\\
T_3&=n_1T_{13}+n_2T_{23}+n_3T_{33}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

若令

$$
\begin{aligned}
T=&T_{11}\vec{i}\vec{i}+T_{12}\vec{i}\vec{j}+T_{13}\vec{i}\vec{k}+T_{21}\vec{j}\vec{i}+T_{22}\vec{j}\vec{j}+T_{23}\vec{j}\vec{k}+\\
&+T_{31}\vec{k}\vec{i}+T_{32}\vec{k}\vec{j}+T_{33}\vec{k}\vec{k}
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

則有

$$\vec{T}=\vec{n}\cdot\vec{\vec{T}} \tag{1.7}$$

我們称 $\vec{\vec{T}}$ 为应力張量(Tensor)，因为它是在討論張力时所引起的量，由於 $\vec{T}$ 为一单位面积前面的物質作用於其后面物質上的力，故可以明显地看出：一块为 S 封閉面所包圍的物質受到它外面物質的作用力为

$$\vec{F}_r=\oint\vec{n}\cdot\vec{\vec{T}}dS=\oint\vec{dS}\cdot\vec{\vec{T}} \tag{1.8}$$

这个結論对於以后討論电磁場压力与动量問題时将有所应用。

§1.2 張量的代数运算

由 (1.6) 式所規定張量，可以看到，是由两个矢量經过一种旣非点乘又非叉乘的乘法卽簡单的并列乘法构成，这种乘法，我們常把它称作"外乘积"，而由此所构成的張量我們把它称作并矢式或二阶張量，現在我們来討論一下关於这种二阶張量的性質，对於矢量，例如速度，我們通常将 v_x, v_y, v_z，称作它的三个分量，同样我們把（$T_{11}\cdots$，T_{33}）称作二阶張量的九个分量。

在物理学中，有許多物理量是張量，为了使含有这些物理量的公式处理簡化，我們可以給張量規定一些运算規則。

i）加法：两个張量 $\vec{\vec{T}}$ 和 $\vec{\vec{U}}$ 相加，卽分别相应的分量相加，卽

$$\vec{\vec{T}}+\vec{\vec{U}}=(T_{11}+U_{11})ii+(T_{12}+U_{12})ij+\cdots \tag{2.1}$$

由此，加法服从交換律及結合律。

ii）張量与标量的乘法：标量 φ 乘張量 $\vec{\vec{T}}$ 卽等於将 φ 乘 $\vec{\vec{T}}$ 的每一个分量。

$$\varphi\overleftrightarrow{T}=\varphi T_{11}ii+\varphi T_{12}ij+\cdots \tag{2.2}$$

iii）張量与矢量的点乘：

$$\begin{aligned}
&\vec{f}\cdot(ii)=(\vec{f}\cdot\vec{i})i,\quad \vec{f}\cdot(\vec{i}\vec{j})=(\vec{f}\cdot\vec{i})\vec{j}\\
&(\vec{i}\vec{j})\cdot\vec{f}=\vec{i}(\vec{j}\cdot\vec{f})\\
&\vec{f}\cdot(\overleftrightarrow{T}+\overleftrightarrow{U})=(\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T})+(\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{U})\\
&(\vec{f}+\vec{g})\cdot\overleftrightarrow{T}=\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}+\vec{g}\cdot\overleftrightarrow{T}\\
&(\overleftrightarrow{T}+\overleftrightarrow{U})\cdot\vec{f}=\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}+\overleftrightarrow{U}\cdot\vec{f}\\
&\overleftrightarrow{T}\cdot(\vec{f}+\vec{g})=\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}+\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{g}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

值得注意的是点乘的前后次序不能对調，这是因为，从上面的一系列表式可以看出一个結論：一个二阶 張量与矢量点乘时 仅只其与矢量鄰 部分与矢量发生联系，如果 更換次序‘实質上卽变更这种联系，那么可以想象所得結果自然与更換前不同，更具体一些說，若

$$\overleftrightarrow{T}=\vec{A}\vec{B},\ \overleftrightarrow{T}'=\vec{B}\vec{A}$$

则 $$(a)\ \overleftrightarrow{T}\neq\overleftrightarrow{T}'$$

$$(b)\ \vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}\neq\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f} \tag{2.4}$$

iv）張量与矢量的叉乘：定义

$$\begin{aligned}
&\vec{f}\times(\vec{i}\vec{i})=(\vec{f}\times\vec{i})\vec{i},\ \vec{f}\times(\vec{i}\vec{j})=(\vec{f}\times\vec{i})\vec{j}\cdots\cdots\\
&\vec{f}\times\overleftrightarrow{T}=T_{11}(\vec{f}\times\vec{i})\vec{i}+T_{12}(\vec{f}\times\vec{i})\vec{j}+T_{13}(\vec{f}\times\vec{i})\vec{k}\\
&\qquad+T_{21}(\vec{f}\times\vec{j})\vec{i}+T_{22}(\vec{f}\times\vec{j})\vec{j}+T_{23}(\vec{f}\times\vec{j})\vec{k}\\
&\qquad+T_{31}(\vec{f}\times\vec{k})\vec{i}+T_{32}(\vec{f}\times\vec{k})\vec{j}+T_{23}(\vec{f}\times\vec{k})\vec{k}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$\vec{f}$ 以右边叉乘定义仿此，注意

$$\vec{f}\times\overleftrightarrow{T}\neq\overleftrightarrow{T}\times\vec{f}$$

v）張量与張量的点乘：分一次点乘和二次点乘两种。一次点乘的定义为

$$\begin{aligned}
&(\vec{i}\vec{i})\cdot(\vec{i}\vec{i})=\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{i})\vec{i}=\vec{i}\vec{i}\\
&(\vec{i}\vec{i})\cdot(\vec{i}\vec{j})=\vec{i}(\vec{i}\cdot\vec{i})\vec{j}=\vec{i}\vec{j}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$(\vec{i}\vec{j})\cdot(\vec{i}\vec{i})=\vec{i}(\vec{j}\cdot\vec{i})\vec{i}=0$$

$$(\vec{i}\vec{j})\cdot(\vec{i}\vec{j})=\vec{i}(\vec{j}\cdot\vec{i})\vec{j}=0$$

…………………………

$$\vec{\vec{T}}\cdot\vec{\vec{U}}=(T_{11}\vec{i}\vec{i}+T_{12}\vec{i}\vec{j}+\cdots)\cdot(U_{11}\vec{i}\vec{i}+U_{12}\vec{i}\vec{j}+\cdots)$$
$$=T_{11}U_{11}(\vec{i}\vec{i})\cdot(\vec{i}\vec{i})+T_{11}U_{12}(\vec{i}\vec{i})\cdot(\vec{i}\vec{j})+\cdots$$
$$+T_{12}U_{11}(\vec{i}\vec{j})\cdot(\vec{i}\vec{i})+T_{12}U_{12}(\vec{i}\vec{j})\cdot(\vec{i}\vec{j})+\cdots$$

由此可見两張量在一次点乘之后仍为一張量，注意

$$\vec{\vec{T}}\cdot\vec{\vec{U}}\neq\vec{\vec{U}}\cdot\vec{\vec{T}} \tag{2.7}$$

二次点乘的定义是先将两个靠近的矢量点乘，在它們化为一标量并提出后，再点乘剩下的两个，即

$$(\vec{i}\vec{i}):(\vec{i}\vec{i})=(\vec{i}\cdot\vec{i})(\vec{i}\cdot\vec{j})=1$$

$$(\vec{i}\vec{j}):(\vec{k}\vec{j})=(\vec{j}\cdot\vec{k})(\vec{i}\cdot\vec{j})=0$$

$$\vec{\vec{T}}:\vec{\vec{U}}=(T_{11}\vec{i}\vec{i}+T_{12}\vec{i}\vec{j}+\cdots):(U_{11}\vec{i}\vec{i}+U_{12}\vec{i}\vec{j}+\cdots)$$
$$=T_{11}U_{11}(\vec{i}\vec{i}):(\vec{i}\vec{i})+T_{11}U_{12}(\vec{i}\vec{i}):(\vec{i}\vec{j})+\cdots$$
$$+T_{12}U_{11}(\vec{i}\vec{j}):(\vec{i}\vec{i})+T_{12}U_{12}(\vec{i}\vec{j}):(\vec{i}\vec{j})+\cdots$$
$$=T_{11}U_{11}+T_{12}U_{21}+T_{13}U_{31}+T_{21}U_{12}+T_{22}U_{22}$$
$$+T_{23}U_{32}+T_{31}U_{13}+T_{32}U_{23}+T_{33}U_{33}$$

由此可見两張量两次点乘以后即为一标量，而且

$$\vec{\vec{T}}:\vec{\vec{U}}=\vec{\vec{U}}:\vec{\vec{T}} \tag{2.8}$$

vi) 矢量的外乘：定义两矢量的外乘为

$$\vec{f}\vec{g}=(f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k})(g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k})$$
$$=f_1g_1\vec{i}\vec{i}+f_1g_2\vec{i}\vec{j}+f_1g_3\vec{i}\vec{k}$$
$$+f_2g_1\vec{j}\vec{i}+f_2g_2\vec{j}\vec{j}+f_2g_3\vec{j}\vec{k} \tag{2.9}$$
$$+f_3g_1\vec{k}\vec{i}+f_3g_2\vec{k}\vec{j}+f_3g_3\vec{k}\vec{k}$$

因此为一張量，已如前述，不难知

$$\vec{f}\vec{g}\neq\vec{g}\vec{f}$$

$$\vec{f}(\vec{g}_1+\vec{g}_2)=\vec{f}\vec{g}_1+\vec{f}\vec{g}_2$$

vii) 单位張量，張量$\vec{\vec{S}}=\vec{i}\vec{i}+\vec{j}\vec{j}+\vec{k}\vec{k}$有这样一个特点，它与任何矢量点乘都得到原

来的矢量，同任何張量一次点乘都得到原来的張量，即

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{S}=\overleftrightarrow{S}\cdot\vec{f}=\vec{f} \tag{2.10}$$

$$\overleftrightarrow{\Phi}\cdot\overleftrightarrow{S}=\overleftrightarrow{S}\cdot\overleftrightarrow{\Phi}=\overleftrightarrow{\Phi}$$

为此我們称$\overleftrightarrow{S}$为单位張量

单位張量与任意張量作二次点乘結果为 (2.11)

$$\overleftrightarrow{\Phi}:\overleftrightarrow{S}=\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi_{33}$$

§1.3 矢量与张量的矩陣表述

矢量和張量也可以表示成矩陣形式，矢量f可以表作$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$或$(f_1 f_2 f_3)$，張量$\overleftrightarrow{T}$可以表作

$$\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

这样張量与矢量的点乘即按普通的矩陣乘法进行

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{f}=\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{T}=(f_1 f_2 f_3)\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

張量与張量的一次点乘，亦按普通乘法进行，即

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{\Phi}=\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{13} \\ \Phi_{21}\Phi_{22}\Phi_{23} \\ \Phi_{31}\Phi_{32}\Phi_{33} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

两个張量的两次点乘等於一次点乘后的張量再求跡，即

$$\overleftrightarrow{T}:\overleftrightarrow{\Phi}=\mathrm{Spur}\left\{\begin{pmatrix} T_{11} T_{12} T_{13} \\ T_{21} T_{22} T_{23} \\ T_{31} T_{32} T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{13} \\ \Phi_{21}\Phi_{22}\Phi_{23} \\ \Phi_{31}\Phi_{32}\Phi_{33} \end{pmatrix}\right\} \tag{3.5}$$

单位張量相当於矩陣中的单位矩陣，即

$$\overleftrightarrow{S}=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

因此易於看出单位張量与任意矢量点乘仍得原来矢量，与任意張量一次点乘仍得原来張量，至於单位張量与任意張量两次点乘显然地为

$$\overleftrightarrow{S}:\overleftrightarrow{\Phi}=\mathrm{Spur}\begin{pmatrix}\Phi_{11}\Phi_{12}\Phi_{13}\\ \Phi_{21}\Phi_{22}\Phi_{23}\\ \Phi_{31}\Phi_{32}\Phi_{33}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

§1.4 张量的微分运算和积分变换公式

当張量的各个分量都是 $x_1, x_2 x$ 的函数时，我們可以称它为張量場 (Tensor field)，現在我們就来探討一下关於張量場的一些运算規則，我們先来探討一个張量 $\overleftrightarrow{T}$ 的散度，根据 §1.2 所約定的規則我們有

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}&=\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}+j\frac{\partial}{\partial x_2}+k\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot\Big\{i(iT_{11}+jT_{12}+kT_{13})\\&\quad+j(iT_{21}+jT_{22}+kT_{23})+k(iT_{31}+jT_{32}+kT_{33})\Big\}\\&=\frac{\partial}{\partial x_1}(iT_{11}+jT_{12}+kT_{13})+\frac{\partial}{\partial x_2}(iT_{21}+jT_{22}+kT_{23})+\\&\quad+\frac{\partial}{\partial x_3}(iT_{31}+jT_{32}+kT_{33})=\\&=\frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{i}\cdot\overleftrightarrow{T})+\frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{T})+\frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{T})\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}=\frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{i}\cdot\overleftrightarrow{T})+\frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{T})+\frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{T}) \tag{4.1}$$

仿此不难証明：

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\overleftrightarrow{T}&=i\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{T})-\frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{T})\right\}+\\&\quad+j\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}(\vec{i}\cdot\overleftrightarrow{T})-\frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{k}\cdot\overleftrightarrow{T})\right\}+\\&\quad+k\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{j}\cdot\overleftrightarrow{T})-\frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{i}\cdot\overleftrightarrow{T})\right\}\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\vec{\nabla}\vec{f}=i\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_1}+j\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_2}+k\frac{\partial\vec{f}}{\partial x_2} \tag{4.3}$$

和矢量分析中的情形一样，我們可以把 $\vec{\nabla}$ 看作具有矢量和微分运算双重性質的量，它一方面适合矢量运算法則，另一方面又适合微分运算法則，根据这个原則，我們不难推求下面一系列的关系式，例如我們来求 $\vec{\nabla}\times(\vec{f}g)$，作为微分运算，它应分别作用在 $\vec{f}$

和$\vec{g}$上：

$$\vec{\nabla}\times(\vec{f}\vec{g})=\vec{\nabla}_f\times(\vec{f}\,\vec{g})+\vec{\nabla}_g\times(\vec{f}\,\vec{g})$$

$$=(\vec{\nabla}_f\times\vec{f})\vec{g}+(\vec{\nabla}_g\times\vec{f})\vec{g}$$

再根据$\vec{\nabla}_g$的矢量性質有

$$\vec{\nabla}_g\times\vec{f})\vec{g}=-(\vec{f}\times\vec{\nabla}_g)\vec{g}$$

於是我們得

$$\vec{\nabla}\times(\vec{f}\,\vec{g})=(\vec{\nabla}\times\vec{f})\vec{g}-(\vec{f}\times\vec{\nabla})\vec{g} \qquad (4.4)$$

仿此理，不难直接証明：

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\vec{T}})=(\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{\vec{T}}+\varphi\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}} \qquad (4.5)$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\,\vec{g})=(\vec{\nabla}\cdot\vec{f})\vec{g}+(\vec{f}\cdot\vec{\nabla})\vec{g} \qquad (4.6)$$

$$\vec{\nabla}\times(\varphi\vec{\vec{T}})=(\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{\vec{T}}+\varphi\vec{\nabla}\times\vec{\vec{T}} \qquad (4.7)$$

$$\vec{\nabla}(\varphi\vec{f})=(\vec{\nabla}\varphi)\vec{f}+\varphi\vec{\nabla}\vec{f} \qquad (4.8)$$

从上面我們看到这种張量場的微分运算和矢量場幷无二致，因此不难想象有关張量的一些积分变换公式也应該和矢量場相仿，例如和矢量場的高斯（Gauss）定理相类比，我們就有：

$$\iiint d\tau\vec{\nabla}\cdot\vec{\vec{T}}=\oiint\vec{d\sigma}\cdot\vec{\vec{T}} \qquad (4.9)$$

仿此可有：

$$\iiint d\tau\vec{\nabla}\vec{f}=\oiint d\,\vec{\sigma}\vec{f} \qquad (4.10)$$

$$\iiint d\tau\vec{\nabla}\times\vec{\vec{T}}=\oiint\vec{d\sigma}\times\vec{\vec{T}} \qquad (4.11)$$

也就是說在上述公式中同样服从矢量場的法則，即

$$\iiint d\tau\vec{\nabla}\to\oiint\vec{d\sigma} \qquad (4.12)$$

惟須注意在代换时次序不可顚倒。

以上§1.1—§1.4我們介紹了二級張量或幷矢式的一些性質，相仿地我們可以引进三級張量$\Phi=\Phi_{111}iii+\Phi_{112}iij+\cdots$，它共有27个分量，关於它的运算服从相仿規則，更高級的張量亦可类推，因为对於我們的課程沒有用处，我們不拟作具体討論。

§1.5　在坐标系統的正交变换下矢量与张量的变换性质

以上几节我們討論了張量的运算法則，无疑地我們并沒有涉及到关於坐标变換的問題，而这一方面恰恰又是我們所需要的知識，为了对正交变换的性质有一个了解，让我們先来考察一下三維空間中的正交变換，也就是三維空間中直角坐标的轉动，我們将看到不同物理量在坐标轉动中具有不同变换关系，根据变换关系可以把物理量区分为标量，矢量，張量……等。

当三維空間直角坐标系統S繞原点作一轉动而至S''系时，在S系中某一点坐标的三个分量x_1, x_2, x_3，則成为S''系相应点x_1', x_2', x_3'，很熟悉地，它們之間有如下关系：

$$\begin{cases} x_1' = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2' = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ x_3' = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{cases} \tag{5.1}$$

上式可以簡书为

$$x_1' = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij}x_i (i=1,2,3) \tag{5.2}$$

亦即

$$x_i' = \alpha_{ij}x_i \quad (i,j=1,2,3) \tag{5.3}$$

凡是重复的指数都必須对这个指数所有可能的值求和，所以不再写求和号 Σ，这种习慣在相对論里是通行的，一般称为爱因斯坦 (Einstein) 慣例，(5.3) 式之变换称正交变換，因为在空間旋轉变换下矢量的长度不变，故有

$$x_i x_i = x_i' x_i' \tag{5.4}$$

即

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \tag{5.5}$$

将(3)代入上式有：

$$x_i x_j = \alpha_{ij} x_i \alpha_{ik} x_k \tag{5.6}$$

比較两边系数得：

$$\boxed{\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}} \tag{5.7}$$

显然可知$\alpha_{ij}'s$为旧坐标在新坐标的方向余弦。

由(5.1)式得：

$$\begin{cases} x_1=\beta_{11}x_1'+\beta_{12}x_2'+\beta_{13}x_3' & (5.8)\\ x_2=\beta_{21}x_1'+\beta_{22}x_2'+\beta_{23}x_3' & (5.9)\\ x_3=\beta_{31}x_1'+\beta_{32}x_2'+\beta_{33}x_3' & (5.10)\end{cases}$$

(5.8)—(5.10)式是(5.1)式的反变换，因之立即可看出

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\\ \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\\ \beta_{21}\beta_{22}\beta_{23}\\ \beta_{31}\beta_{32}\beta_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.11}$$

亦即

$$\alpha\beta=1 \tag{5.12}$$

或

$$\beta=\alpha^{-1} \tag{5.13}$$

由上面知道 α_{ij} 是 x_i' 坐标 x_i' 与坐标間角度的余弦，同样 β_{ji} 也是 x'_i 与 x_j 間的角度的余弦。

故有：

$$\alpha_{ij}=\beta_{ji} \tag{5.14}$$

即

$$\boxed{\alpha_{ij}=(\alpha^{-1})_{ji}} \tag{5.15}$$

(5.7)和(5.15)两式是正交变换的两个基本性質。

又如前所指出者，因为 $\vec{x}$ 的长不会因坐标的变换而有不同，於是

$$x_ix_i=x_i'x_i'$$

即

$$\boxed{x_ix_i=\text{invariant}} \tag{5.16}$$

(5.16)式也是正交变换的基本性質。

从以上討論可以看出，矢量 $\vec{r}\,(=ix_1+jx_2+kx_3)$ 在正交变换下滿足变换关系

$$x_i'=\alpha_{ij}x_j$$

我們自然不难把这一个結論推广到任一矢量 $\vec{A}$，它显然在正交变换下滿足变换关系

$$A_i'=\alpha_{ij}A_j \tag{5.17}$$

作为一个特例，我想指出，微分算符 $\vec{\nabla}=i\dfrac{\partial}{\partial x_1}+j\dfrac{\partial}{\partial x_2}+k\dfrac{\partial}{\partial x_3}$ 也同样地滿足矢量的变换关系

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}=\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{5.18}$$

这是不难証明的，事实上

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}=\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j}=\beta_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{5.19}$$

注意到 $$\beta_{ji}=\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}=\alpha_{ij}$$

故 $$\frac{\partial}{\partial x_i'}=\alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

这正是我們所需要証明的。

現在让我們来探討一下一个二級張量

$$\overleftrightarrow{T}=\vec{A}\vec{B}$$

在正交变换下服从什么变换关系，如所熟知，一个二阶張量有九个分量，它是由向量$\vec{A}$的三个分量(A_1,A_2,A_3)和$\vec{B}$的三个分量(B_1,B_2,B_3)两相相乘而組成，即

$$T_{ij}=A_iB_j(i,j=1,2,3) \tag{5.20}$$

在坐标变换下$T_{ij}\to T_{ij}'$，$A_i\to A_i'$，$B_j\to B_j'$而

$$A_i'=\alpha_{iK}A_K$$

$$B_j'=\alpha_{jS}B_S$$

$$T_{ij}'=A_i'B_j'=\alpha_{iK}\alpha_{jS}A_KB_S=\alpha_{iK}\alpha_{jS}T_{KS} \tag{5.21}$$

(5.21)式正是一个二阶張量在坐标变换下所应滿足的变换关系。

注意到这样的一个事实，一个标量在坐标变换下是不变量，我們就不难用变换关系来定义各种量，以下我們以有无“,”号区分在S,S'系中的量，则有

(i) 标量 $u'=u$

(ii) 矢量 $A_i=a_{ij}A_j$

(iii) 二級張量 $T_{ij}'=\alpha_{iK}\alpha_{jS}T_{KS}$

这样我們就不难推广定义三級以至更高級的張量

$$T_{ijK}'=\alpha_{iS}\alpha_{jt}\alpha_{Ku}T_{Stu} \tag{5.22}$$

$$T_{ijKl}'=\alpha_{iS}\alpha_{jt}\alpha_{Ku}\alpha_{lv}T_{Stuv} \tag{5.23}$$

…………等等

由此可見，从另外一个意义上来看，所有的量皆可視为張量，它的級数即由S系变到S'系中去时的变换矩陣α数。例如标量可称为零級張量，矢量可称为一級張量，然后是二級，三級以至更高級的張量等等，熟悉張量的知識，将有助我們对於本課程的理解。

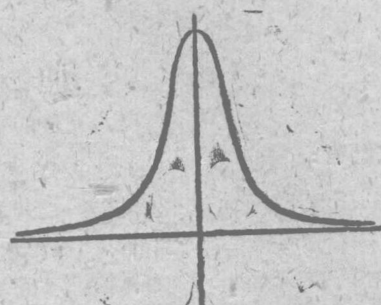
§1.6 δ函数及其性質

一个位於$\vec{r_0}$的点电荷e的电荷密度$\rho(\vec{r})$通常具有这样的一些性質：

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \rho(\vec{r})=0 & \text{当}\ \vec{r}\neq\vec{r}_0 \\
(2) & \rho(\vec{r}_0)=\infty & \\
(3) & \int\rho(\vec{r})dV=e(\text{当}\ V\ \text{内包含}\ r_0\ \text{的时候}) &
\end{array}
\tag{6.1}
$$

很显然，满足(6.1)式的函数不是一个普通的連續函数，它在$\vec{r}=\vec{r}_0$这一点上具有特異的性質，因为我們今后經常碰到点电荷，点电荷的电荷密度又都具有如此特殊的性質，我們有必要把这类函数的性質研究一下，这类函数中最簡单者叫做 δ—函数，其定义是：

$$
\begin{aligned}
&\delta(x-a)=0 \qquad \text{当}\ x\neq a \\
&\int\delta(x-a)dx=1, \text{当积分内包含}\ x=a\ \text{时}
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$



$x=a$

(图 6.1)

若令右图的曲綫在 $x=a$ 处无限升高，但同时又令它的寬度无限变窄，保持这个曲綫內的面积是 1，这时我們便可以得到一个 $\delta(x-a)$的簡单图象，

由(6.1)及(6.2)，点电荷密度 $\rho(\vec{r})$可以表成：

$$
\begin{aligned}
\rho(\vec{r})&=e\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\
&=e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

其中我們用$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$来表示 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ 的乘积。

δ—函数可以用許多不同形式的解析函数序列之极限来表示，其中最为有用者有如下两种：

(i) $\qquad \delta(x)\lim\limits_{g\to\infty}\dfrac{\sin gx}{\pi x}$

証明：要証明一个函数是 δ 函数就必須証明它滿足 δ 函数的基本性質，今試研究，当 a,b 中不包括 $x=c$ 时：

$$\lim_{g\to\infty}\int_a^b\frac{\sin gx}{\pi x}dx$$

$$=\lim_{g\to\infty}\left\{\frac{1}{\pi g}\left[\frac{1}{a}\cos ag-\frac{1}{b}\cos bg\right]-\frac{1}{\pi g}\int_a^b\frac{1}{x^2}\cos gx\right]\right\}=0$$

当 a，b 中包含 $x=0$ 时，积分可分为三段进行，其中有两段为零，故須研究

$-\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{1}{\pi x}\sin gxdx$ 即可。

$$\lim_{g\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\sin gx}{x}dx=\frac{1}{\pi}\lim_{g\to\infty}\int_{\varepsilon g}^{\varepsilon g}\frac{\sin y}{y}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=1$$

$$\therefore\quad \delta(x)=\lim_{g\to\infty}\frac{\sin gx}{\pi x} \tag{6.4}$$

(i i) $$\delta(x)=\lim_{g\to\infty}\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}$$

証明 ..显然地我們可以看到

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}\bigg|_{x=0}=\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}\bigg|_{x\neq 0}=0$$

又我們有:

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}dx=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{2}{\pi}\;\frac{\pi}{2}=1$$

換言之，即上述函数符合於 $\delta(x)$ 之基本性質，故有:

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)} \tag{6.5}$$

(iii) $$\delta(x-x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-x_0)k}\,dk$$

証:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-x_0)k}\,dk=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-K}^{K}e^{i(x-x_0)k}\,dk$$

$$=\frac{1}{2\pi i(x-x_0)}\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}e^{i(x-x_0)k}\,d\left[i(x-x_0)k\right]$$

$$=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi(x-x_0)}\left\{\frac{1}{2i}\left[e^{i(x-x_0)K}-e^{-i(x-x_0)K}\right]\right\}$$

$$=\lim_{K\to\infty}\frac{\sin K(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}=\delta(x-x_0) \tag{6.6}$$

只得証。

对於 δ—函数，我們不难証明下面这一系列性質:

(i)若 $f(x)$ 为任意的連續函数，則

$$\int_a^b f(x)\delta(y-x_0)dx=\begin{cases}f(x_0) & a<x_0<b\\ 0 & x_0<a,x_0>b\end{cases} \tag{6.7}$$

証：1．当 x_0 不在积分限内时由於 $\delta(x-x_0)$ 在整个区域内处处为零，故(6.7)式等於零。

2．当 x_0 在积分限内时(6.7)式的积分只在由 $x_0-\epsilon$ 到 $x_0+\epsilon$ 范圍内方有貢献，其中 ϵ 为任意小数，其他范圍内由於 $\delta(x-x_0)=0$ 而对 (6.7) 式无貢献，因此

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta(x-x_0)dx$$

ϵ 既然可以选擇得任意小，在 $x_0-\epsilon$ 至 $x_0+\epsilon$ 內 $f(x)$ 可以近似地以 $f(x_0)$ 来代替，因之得：

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon}\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$$

故得証。

(ii)如 $f(x)$ 为有連續微商的函数，則

$$\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}-\dfrac{df(x_0)}{dx_0} & \text{当 } a<x_0<b\\ 0 & \text{当 } x_0<a, x_0>b\end{cases} \tag{6.8}$$

$$\int_a^b f(x)\frac{d^n}{dx^n}\delta(x-x_0)dx=\begin{cases}(-1)^n\dfrac{d^nf(x_0)}{dx_0{}^n} & \text{当 } a<x_0<b\\ 0 & \text{当 } x_0<a, x_0>b\end{cases} \tag{6.9}$$

証：由部分积分法

$$\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx=f(x)\delta(x-x_0)\Big|_a^b-$$

$$-\int_a^b\frac{df}{dx}\delta(x-x_0)dx \tag{6.10}$$

由於 $x_0\neq a$，$x_0\neq b$，故(6.10)式中之第一項为零，第二項可用(6.7)式得到(6.8)式之結果，同理可以証明 (6.9) 式。

(iii)
$$\int\delta(x-a)\delta(x-b)dx=\delta(b-a) \tag{6.11}$$

証：令 $x-b=y$ 則有：

$$x=b+y,\ dx=dy$$

故

$$\int\delta(x-a)\delta(x-b)dx=\int\delta(y+b-a)\delta(y)dy=\delta(b-a)$$