

 理性派

 CRC Press  
Taylor & Francis Group

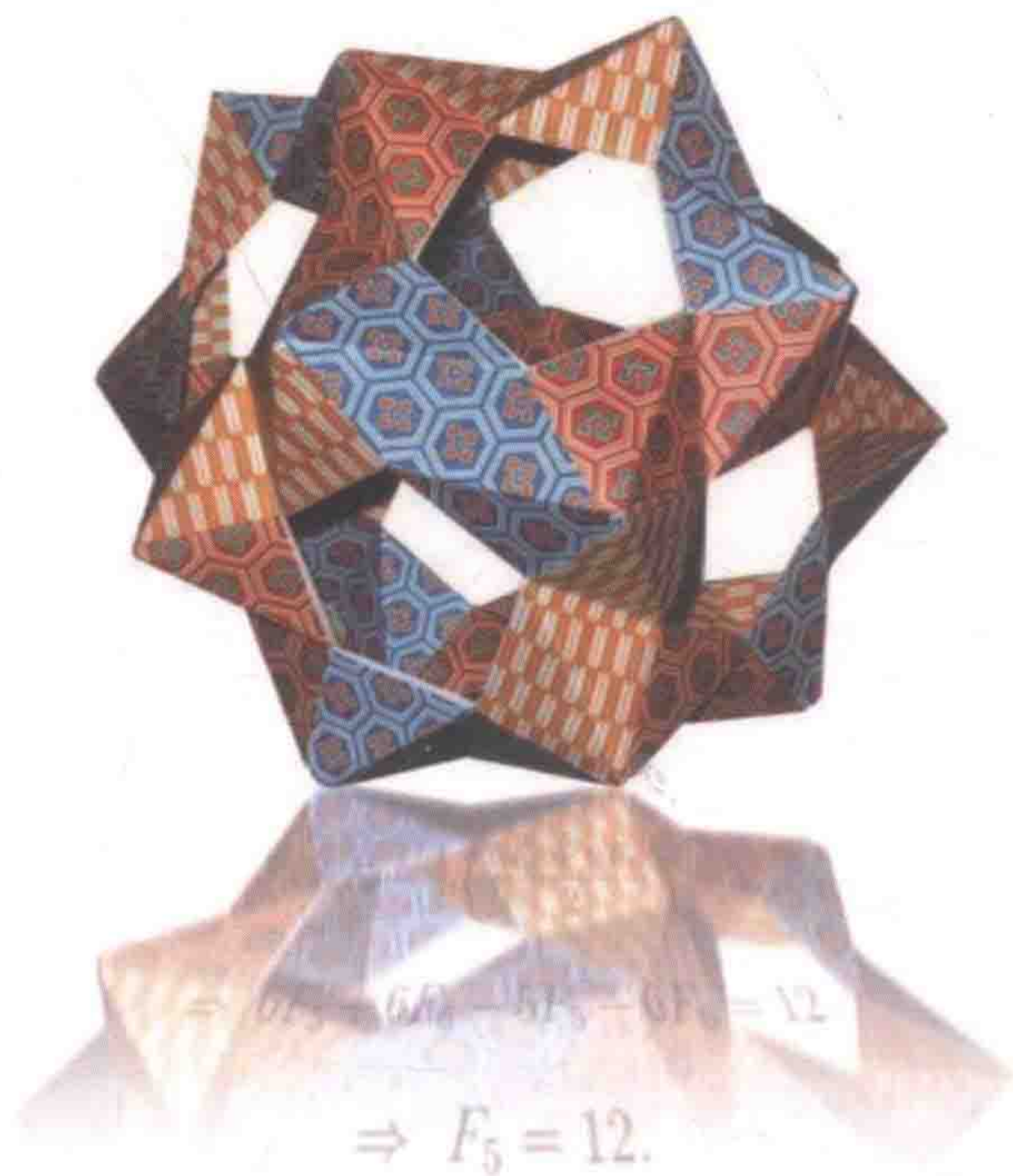
身边的数学译丛

# 折纸设计的秘密

## ——折纸模型中的数学世界

[美] 托马斯·赫尔 (Thomas Hull) 著

张文娟 叶雅玲 译



 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS





身边的数学译丛

# 折纸设计的秘密

——折纸模型中的数学世界

[美] 托马斯·赫尔 (Thomas Hull) 著  
张文娟 叶雅玲 译



机械工业出版社

Project Origami: Activities for Exploring Mathematics, Second Edition/  
by Thomas Hull/ ISBN: 978-1-4665-6791-7

Copyright © 2013 by CRC Press.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis Group LLC.; All Rights Reserved.

本书原版由 Taylor & Francis 出版集团旗下, CRC 出版公司出版, 并经其授权翻译出版, 版权所有, 侵权必究。

China Machine Press is authorized to publish and distribute exclusively the Chinese (Simplified Characters) language edition. This edition is authorized for sale throughout Mainland of China. No part of the publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体翻译版授权由机械工业出版社在中国(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)出版与发行。未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

Copies of this book sold without a Taylor & Francis sticker on the cover are unauthorized and illegal.

本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签, 无标签者不得销售。  
北京市版权局著作权合同登记 图字: 01-2014-2694 号。

## 图书在版编目 (CIP) 数据

折纸设计的秘密: 折纸模型中的数学世界/(美) 托马斯·赫尔  
(Thomas hull) 著; 张文娟, 叶雅玲译. —北京: 机械工业出版社,  
2016. 12

(身边的数学译丛)

书名原文: Project Origami: Activities for Exploring Mathematics,  
Second Edition

ISBN 978-7-111-55761-6

I. ①折… II. ①托… ②张… ③叶… III. ①高等几何 IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 311015 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 汤 嘉 责任编辑: 汤 嘉 王 芳

责任校对: 陈延翔 封面设计: 路恩中

责任印制: 常天培

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 18.5 印张 · 1 插页 · 349 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-55761-6

定价: 59.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88361066 机工官网: [www.cmpbook.com](http://www.cmpbook.com)

读者购书热线: 010-68326294 机工官博: [weibo.com/cmp1952](http://weibo.com/cmp1952)

010-88379203 金书网: [www.golden-book.com](http://www.golden-book.com)

封面无防伪标均为盗版

教育服务网: [www.cmpedu.com](http://www.cmpedu.com)

本书共 30 章，从看似简单的“在一张正方形的纸中折叠出一个等边三角形”和“将一段长度精确  $n$  等分”入门，慢慢衍生出乱花渐欲迷人眼却又令人欲罢不能的奇妙章节，例如折纸螺旋、模块星形环、蝴蝶炸弹、巴基球等，汇集了当今国际一流的折纸数学模型。书中涉及一些高级数学内容，包括三角函数、微分几何、微积分和数学建模等，具备一定的理科功底会更容易理解。

全书内容新颖、发人深省且实操性强，对于高校老师的教学而言是一本非常好的补充教材，对折纸粉丝和数学爱好者而言，也是一本不可多得的拓展思维的实用手册。书中既有与现实生活联系紧密的应用型话题，也有打通三角几何、微积分的富有启发性的讨论和思考，还兼备一些国外最新的教学思想和引导方式，信息量十分丰富。

阅读本书，能轻松激起数学和折纸爱好者的挑战兴趣。同样，具备一定数学基础的大众也可从中一睹折纸之乐趣、数学之魅力。



## 译者的话

谈起折纸，人们往往觉得这是一种简单易行的手工艺术创造，彩纸折叠的飞机、气球、花篮、衣服、青蛙、小船……在很多人的童年中似乎都少不了折纸的乐趣。这种传统意义上即兴发挥的手工折纸如今却与很多人感到棘手的高等数学这一需要缜密论证的学科联系起来，并成为国内外流行的学科。

9年前，本书第1版的出版，迅速吸引了无数折纸粉丝和数学爱好者。现今，作者在无数读者反馈的基础上补充了自己多年来发现的十余个折纸模型，给出了最新一版的书籍，本书可谓是作者多年的教学经验以及无数读者、学生奇思妙想的结晶。

从试译第1章开始，我们就被作者的独具匠心和细心缜密所吸引，并曾亲自动手进行过有趣的尝试。全书包括30章，由浅入深，环环相扣，却又各具独立性。从看似简单的“在一张正方形的纸中折叠出一个等边三角形”和“将一段长度精确 $n$ 等分”入门，慢慢衍生出乱花渐欲迷人眼，却又令人欲罢不能的奇妙章节，例如折纸螺旋、蝴蝶炸弹、折纸花床等，汇集了当今国际一流的折纸数学艺术。作者深入浅出地探讨了典型折纸与数学的联系，在框架结构设置上也是非常缜密，每一章节都按照适用课程内容—练习—教学法的顺序，一步一步加以论述，揭示了折纸中的数学奥秘，设计规范，令人叹服。

全书内容新颖、时尚，发人深省，实操性强，对于高校老师的教学而言是一本非常好的补充教材，对折纸粉丝和数学爱好者而言，也是一本不可多得的拓展思维的实用手册。书中既有与现实生活联系紧密的应用型话题，也有打通三角几何、微积分的富有启发性的讨论和思考，还兼备一些国外最新的教学思想和引导方式，信息量十分丰富。需要注意的是，本书涉及一些高等数学内容，包括三角、几何、微积分和数学建模等，读者如果具备一定的理科功底和空间思维能力，会更容易理解其内容。

阅读本书，能轻松激起数学和折纸爱好者的挑战兴趣。同样，具备一定数学基础的大众也可从中一睹折纸之乐趣、数学之魅力。这本书对广大折纸爱好者包括数学老师来说都是有益的资料。

将折纸引入科学，为数学带来乐趣。能为这样的一本书作译，为读者引入一本兼具艺术和数学的精彩读物，也让更多的中国读者了解折纸与数学之间的联系，了解最新的国外学科动态，我们深感自豪。在此特别感谢杭州市大关中学的方铭老师对本书的审校，但由于译者水平有限，又涉及跨界研究，对于翻译的不当之处，欢迎读者予以指正。

张文娟、叶雅玲

2016年12月12日于北京



## 前言(修订版)

2006年在出版第1版《折纸设计的秘密》后，我收到了许多读者反馈。每学期我都会收到众多读者发来的邮件，他们曾经通过这样或那样的途径使用过这本书。在这些读者之中，有的是大学教授，有的是中学教师。他们告诉我讲授书中的某些章节时效果很好，或者告诉我他们有个好主意，又或者是某一种教学方式对学生很适用。还有些邮件来自学生，他们咨询我对于正在尝试的某个项目有何建议，或者希望获得更多资源以便进一步深入拓展。还有一些邮件来自热爱折纸数学艺术的粉丝们，以及那些因为此书希望感谢我的人。

当然，我自己也常常使用这本书。我在莫瑞麦克学院和西新英格兰大学教授好几门关于折纸数学的课程。每当我教大学几何、多变量微积分或图论时，我都会从这本书中选取课程案例。

当过老师的人都明白，教学活动不是单向的，并不是说信息单方面从老师流向学生，而更像是一种回馈式的互动。在观察学生们学会教材内容并对其做出反应的同时，教师们自身也会学习到很多新东西。因此，在收到读者来信后，加上我多年来的教学经验，开发一本新教材的想法很自然就产生了。与学生们和同事们的交流给我带来了许多灵感。有时，学生们自己在网络上或书本中发现了一个折纸模型后，向我抛出关于这个模型的数学问题。此外，在我打算出第2版书之前，我自己也已经发现了六七个折纸数学教材。当我意识到这些后，我明白，出第2版书的时机已经到了。

无论是自己激动万分发现的新材料，还是其他人在使用第1版书时发现的新材料，无疑都是出版新书时令人开心的一面。但同样令人窘迫的是，任何一本包含大量信息而且被广泛使用的书中小错误总是难免的。大多数错误（有些是我自己发现的）属于拼写类错误或者是为了省略而造成了令人遗憾的错误，这些都是很容易被发现并可以弥补的。然而，有些错误属于数学范畴，尽管第1版初稿经过全国多所大学、学院教授及其学生们的详尽测试，有些数学错误仍然成为漏网之鱼。

这些错误中最糟糕的莫过于“五个交叉四面体”。第1版中关于这一课的解决方案已经很接近完美，但并非百分之百的准确。在第2版中对这个错误进行了更正，事实上，是给出了比第1版更为简捷的新方案。

在准备出版《折纸设计的秘密》（第2版）的过程中，我终于有机会用一种挑剔的眼光来重新通读全书。我很高兴，同时又很惊奇地发现，在本书第一次出

版5年后的今天，我原先所坚持的要用最简单的办法来展示或教授这些教材的观点已经发生了改变。甚至是相对更为直截了当地展示结果，比如平顶点折叠的矩阵模型看起来也可能有所改善。就这样，我对第1版中几乎所有的课程教材都进行了修订，解决方案和教学法部分也在书中多处予以改进。

以我个人的观点，第2版比第1版更棒。不仅目录从原先的22章扩充到30章，新增加了100多页内容，我个人以及其他数十人（将在致谢中一一提及）这些年来的感受和经验也大大完善了课程教材的许多内容。我希望你也会同意这一点：这本书确实值得一读！

托马斯·赫尔  
西新英格兰大学  
马萨诸塞州斯普林菲尔德市



---

---

## 序

---

---

### 我为什么写这本书？

我希望本书能成为众多关于折纸数学书籍中的第一选择。此书源自我对折纸和数学这两大主题的毕生热爱。我从8岁便开始接触折纸，当时叔叔送给了我一本折纸的指导书。尽管这本从日文翻译过来的书中有很多地方语焉不详，翻译模糊，我还是设法琢磨出很多内容，但由于各种原因，仍然有一些没想明白。不过与此同时，我也意识到，我很擅长数学，尤其是从加法和乘法中发现的模式简单易记也很有趣。我还清楚地记得，正是在那些年里，我开始注意到折纸和数学之间的联系。我折了一个动物，可能是经典的拍鸟。我没有把它放在我那不断增多的折叠模型盒子中，而是仔细地展开它。在展开的纸张上，折线的模式复杂又可爱。很显然，在我看来，这其中蕴藏着一些数学的东西。线条的模式必须遵循一些几何规则。但在当时，了解这些规则远远超出我的理解能力。

上大学时，我再度与折纸和数学相遇。那时，我已精通复杂高水平的折纸，并且阅读了大量书籍，包括 John Montroll, Robert Lang, Jun Maekawa, 以及 Peter Engel 的书（参见本书后的参考文献 [Eng89], [Kas83], [Lang95], [Mon79]）。我参加过纽约市的一些折纸大会 [由非营利性组织主办，现在被称为“美国折纸协会” (Origami USA)]<sup>⊖</sup>，甚至还自己发明了一些折纸设计。我上过一些数学课，正在考虑以数学科学作为我的职业生涯。但就在这时发生了一件事，迫使我开始思考和探索折纸与数学的交集。我得到了 Kunihiko Kasahara 和 Toshie Takahama 创作的一本经典书《折纸鉴赏家》（参见 [Kas87]）。起初，我以为这只是另一本复杂一些的折纸书。其实，我买它是因为其中包含了 John Montroll 的著名剑龙模型说明（细节描述无可挑剔，由一张未经裁剪的正方形纸做成）。当时我一点也不知道，这本书其实还包含一些指导说明，而这些会是在未来紧紧吸引我的兴趣爱好，我仿佛上瘾一般，沉迷其中数十小时。

这本书带领我第一次接触了模块化折纸，将许多小方块纸张折成相同的“组件”，接着将这些组件锁定在一起，形成各种形状。《折纸鉴赏家》中的组件使人们可以做出所有正多面体的代表：立方体、四面体、八面体、十二面体和二



十面体。而在此之前，我对这些物体只有大致的了解，但在我折叠了许多，有时甚至是上百个组件来制作这些正多面体和其他多面体后，我才逐渐熟悉了它们。可以毫不夸张地说，模块化折纸是我认识多面体几何物体的第一导师。

对我来说，现在回想起来能很快就明白到底发生了什么事，而在当时，我只知道自己对折纸感兴趣，可以做一些具有漂亮几何形状的物体来装饰我的宿舍。折纸教会了我，并且给了我一个环境，让我去探索和掌握各种多面体的特性。比如，在每个顶点周围，我应该如何安排一个个小组件，使之形成立方八面体？每种颜色的组件我需要多少个，才能做出三十二面体的有趣着色？

从那以后直到在研究生院当教授的多年间，我一直在尽我所能地收集一切和折纸数学相关的材料，先是在莫瑞麦克学院，后来是西新英格兰大学。由于很多来源很难找到，或者仅仅是对潜在模式的暗示，所以我常常不得不自己做研究，把这些零星碎片拼在一起。在此过程中，我看到折纸与各种各样数学主题的交集，从更明显的几何领域到代数、数论和组合。似乎我了解的越多，折纸与数学重叠的领域也就越多。

在收集折纸数学材料的同时，我开始向大学生、高中生，以及他们的老师做关于这一主题的讲座。自那以后，他们对折纸作为数学教学工具的兴趣变得非常浓厚。老师们会经常问我，他们可以在哪里找到如何在他们班的课堂上使用折纸的详细信息。后来出了几本书，如参考文献 [Fra99]，提供了一些方式，可以使用模块化折纸来教授几何概念，但这些都不是针对大学水平做的，也没有触及折纸能够提供的各类主题。

因此，我写了这本书。我的目标是将我所发现的很多数学折纸内容编辑在一起，将它们按照一种比较容易让大学或高中教师在课堂上使用的方式加以呈现。

## 如何使用这本书

本书包含内容涵盖了多个数学领域。出书的目的是让数学老师能找到可用的教材，不管是教大学还是教高中课程。每一章一开始是可能适合的课程列表。

但很重要的一点是，必须认识到许多教材都可以有效应用于不同水平的课程之中。例如，角三等分的活动在高中几何教师之间已经非常普及，但它同样也可以用在高等水平的伽罗瓦理论课程中。PHiZZ 单元巴基球的活动对于“文科数学”的学生而言是一个很好的拓展项目，并为学习图论的学生提供了手把手的教学方式，可以用来探索三边着色立方平面图和四色定理之间的联系，更不要说还有机会在更高水平的几何课上对曲面进行分类。

总之，这本书及其应用的一大关键词就是灵活性。每一章都附有讲义，可以复印给学生使用，还包括为老师提供的关于解决方案的注释、如何使用讲义、对教学法的建议，以及可以进一步采取的方向。



你可以根据你的班级、时间和对折纸的兴趣，试着找到适合自己的方式来使用这本教材。或许对你而言，将“在一张正方形的纸中折叠出一个等边三角形”和“折纸能将一个角三等分吗？”两堂课同时展示会更好；或许你更希望只是使用讲义中的一部分或增加你自己的研究性题目；或许这些作为家庭作业或者加分项目会更适合你的班级；或许其中有些课程是高级研究项目的基础；又或许你可以使用这些教材，在你的大学数学俱乐部或高中数学圈里花上整整一年。

为了向读者提供尽可能多的灵活性，我们的出版商 A. K. 彼得斯/CRC 出版社 (A K Peters/CRC Press) 正在努力将本书中的所有讲义放到网上。很多参与教材测试的教授有讲义的 PDF 版本，能够修改它们并进行测试。有些老师将图形复制成独立的文件，这样他们可以自己记录文字、修改问题。有些老师去掉一些问题或者将几章的内容合而为一。还有一些老师则选择为他们的学生提供更多的解释。你是最了解自己学生的人，因此，我们希望为你提供可以按照自己情况量身定做的课堂教材。

讲义的在线 PDF 版本可以在 CRC 出版社的网址上找到，请访问网址：<http://www.crcpress.com/product/isbn9781466567917>，单击“下载”选项。

我特别想知道是什么样的人在做这些活动。如果你修改了教材或者发现了利用这些材料的有趣方式，请随时给我来信，并分享你的经验。我的邮箱是 [thull@wne.edu](mailto:thull@wne.edu)。

### 发现式学习

所有课程背后的主要教学方法都是以主动学习和发现为基础的（而不是以一场讲座为基础）。对此有一个合乎逻辑的选择值得解释一下。

用折纸来教数学的一大好处在于它需要学生动手参与。当每个人都试图折叠双曲抛物面（参见“刚性折叠 1”）时，没有人有机会躲在教室后排或在课堂上睡大觉。顾名思义，折纸需要动手实践这个事实使它天生就适合学生主动学习。人们甚至可以争论，在折纸的时候，尤其是制作几何模型的时候，总是会出现潜在的数学学习。如果学生对于要做的物体没有一些基本属性的理解，是不可能用 30 个 PHiZZ 单元做出一个十二面体的。

因此，选择使用折纸来给予更有组织的数学指导时，一个相对容易的选择就是让学生们自己去探索和发现。允许学生们自己去实验和探索数学的基本原则和定理，这种教授数学的方法是由 David Henderson 在大学水平的几何课中率先提出的（参见参考文献 [Hen01]）。该方法不仅仅是基于探索，而且可以让学生们在探索的同时学会如何提出正确的问题。

我试图在本书的讲义中达到这样一种融合。一些讲义试着引导学生提出正确的问题，逐步引出定理，就像在“Haga 折纸”这章一样。其他讲义则像“探秘



平顶点折叠”课程一样，是有意设计得非常具有开放性的。在这样的开放性课程中的特定目的是希望学生能通过提问和建立猜想来获得经验。

我强烈建议导师不要回避这种做法。教授们常常觉得他们需要指导学生进行猜想的构建。但要想学会这个过程，最好的办法就是去做。有些学生的表现是在等待老师要求他们去做才会去猜想。一旦你让他们去做，他们就停不下来。有些学生对于这种开放式的任务的确有困难，但同样，这些困难主要是由于他们不知道应该如何提问。让这些学生参与苏格拉底式的对话往往会对他们大有帮助。

例如，一个学生找不到平顶点折叠的任何模式，可以问问他：“那么，山折和谷折到底有什么？”如果这还是没有帮助，那么可以提一个更为具体的问题：“你的顶点上有多少山折和谷折？”这将推动他的思考。正是这些问题帮助学生们看到一张折叠的纸张正是他们的实验室。数学不再是只存在于他们脑海之中的抽象的东西。它成为有形的东西，成为他们可以握在自己手中数，或者用来计算数据的东西，从中看出模式、猜想和定理。

让学生们用他们自己的名字来命名发现的定理会给学生前所未有的满足感。当然，在一个平的可折叠顶点上的山折和谷折的数量差总是2，被称为 Maekawa 定理（见“探秘平顶点折叠”）。这的确是事实。但它也可能会命名为“丹妮尔的猜想”或者许多班级的学生都会发现并尝试证明这一点。

但是，应该指出的是，一个百分之百基于发现的指导方法并不适合所有人。老师如果更习惯于讲座式教学指导，仍然可以使用该讲义，比如说20min的课堂活动，然后通过讲座的方式推出主要观点，让学生观察。不过，看看学生们会得出什么结论并要求他们中的一些人将其成果展示给全班同学，这可能更为有趣。

基于发现的方法的价值应该是很清楚的，因为它为学生提供了成为数学研究员的体验。如果你的一大目标是帮助训练你的学生进行独立研究或得到高级顶点课程经验，那么无论如何都应该尝试一下这种方法。

其实，如果你仔细想想这些技巧和经验，需要经得起数学质询，你可能最终会完全改变你教这门课程的方法。举例来说，对于数学研究员而言，明白“不成功也是好的”这一点是非常重要的，失败是发现的一个自然组成部分。因此，在课堂上探索这些折纸活动时，老师们应该做好他们的学生可能不会成功的准备，并且意识到这没有问题。从而引出了下一个话题。

## 做好准备工作

这些课堂活动需要几方面的准备工作。

首先，如果课程中含有很强的折叠组件，例如折叠模块组件或折叠纸鹤，老师需要自己提前练习折叠这些东西。更为重要的是，教师们在折叠的时候需要思考，他们应该如何向全班同学或者个别碰到困难的学生解释整个折叠过程。教折



纸是和教数学大不相同的。它涉及通过“展示和说明”来试着沟通三维运动。这些课程中关于折叠说明的讲义肯定会有所帮助，但有些人将二维指令转换为手和纸的三维运动时会有很大的问题，始终要假设会有学生需要一对一的折叠指导。

如果技术允许，使用实物投影机（也称为数字成像器或艾路摩）可能会有很大的帮助。实物投影机可以让人们将他们的手和一张纸放在一个摄像头下面，然后将图像投射在一个屏幕上方。这样的话，全班同学都可以看到你的手在做什么，近距离地观看你折叠纸张。根据我的经验，这是迄今为止教全班同学折叠纸张的最有效的方式。它也非常适用于展示如何将模块组件锁定在一起。这些组件往往很小，一个好的实物投影机可以让你把如何正确组装这些组件的细节放大。

但需要注意的是，老师如果要使用“制作折纸巴基球”这章的内容的话，很重要的一点是要熟悉 PHiZZ 单元、很好地理解锁定的过程、自己制作一个 30 个单元的十二面体（包括正确涂上三种颜色），其他更长项目可以留给学生去搞明白。老师不太可能事先有时间做出 270 个单元的巴基球或 84 个单元的圆环，虽然这些项目很有趣，也可以对办公室进行漂亮的装饰。应该鼓励学生去尝试更大的项目。老师自己没有做到的事实会让学生对他们取得的成绩有额外的成就感。

除了折纸本身，不用说，所有教师都将不得不调整课程来适应自己的课堂。如果你确保你的目标和活动预期的重点明确，那么这些活动成功的概率将大大增加。

你的主要目标是强化学生对欧拉公式及其应用的理解（如“制作折纸巴基球”一章）？还是让你的学生明白  $Z_n$  代数与数论应用的手手相传 [例如，“折叠成结”和“等分折叠：藤本近似 (Fujimoto Approximation)”两章]？或者你的主要目标是希望全班同学更积极地参与，让他们自己去探索和发现数学？

对于这些问题的答案将使你更清楚如何在班级里科学地安排这些课堂内容——花多少时间在实际操作部分，花多少时间来进行小组讨论，或者是否提前将折叠指导内容布置为家庭作业，还是期望学生在课堂上自己得出许多猜想。当然，当我们第一次尝试任何新的教学活动，尤其是一种主动学习的或基于发现的课堂内容，我们都要把它当作一项实验。这样，当你第二次尝试使用这些活动的时候，准备工作就少多了。

### 上哪里找到纸张？

哪里可以找到合适的纸张，这个问题有点复杂。这完全取决于你或你的学生想要折叠什么。尽管说起来都是纸，但纸张也有很多不同的类型。一些项目和课程什么纸张都可以用，但是有些纸可以使学生和老师的工作更简单。我将按不同的用途对纸张进行分类。

对于 PHiZZ 单元、平顶点折叠、Haga 折纸、矩阵模型、蝴蝶炸弹课程

我推荐三英寸（1 in = 2.54 cm）见方的正方形备忘录，在办公用品商店很容



易就能买到（500 张大约 3 美元），有各种颜色。在便利贴区域附近寻找，但要确保你买的不是便利贴。（黏性侧会阻碍折叠过程，将模块组件粘到一起。）最好的备忘录纸是装在塑料盒内的那一种，这会比那些不装在盒里的纸张更加方正。此外，如果你仔细看，你会找到空白的便笺备忘录。如果你运气不好，有的纸张可能只有一面空白，另一面上印着“不在座位”等办公室留言。这也一样有用，你的学生可能会发现它更幽默。

**名片** 一旦你迷上了名片模块化折纸（是的，还有有很多种可以用名片来制作的模块组件，远远超过在本书中提及的内容），你会对收集大量的废弃名片非常感兴趣。有时这是很容易做到的。参观办公用品商店或者那些为客户打印名片的打印商店，问问他们是否有任何不需要的名片。往往这些地方都会有很多由于打印错误或放置数月一直无人领取的名片。

如果你让他们知道你对这些没人要的名片感兴趣，他们通常会为你保留这样的惊喜。

在紧急时刻，你也可以买空白名片，但那些上面有打印内容的名片更为有趣。沿着这些思路，你可以在餐馆搜寻多彩或有精致图案的名片。一次拿 10 张左右的名片，慢慢地，就会建立起一大批库存。你也可以要求学生提前各自找到名片，并带到课堂上来。

**纸条**（用于折叠结）很难找到一卷卷的薄纸。胶带纸比较理想，但你也可以得到一卷卷的会计纸条，这是会计师们用在计算器上的纸张，可以在他们的计算过程中打印他们的计算结果。你也可以在办公用品商店中找到成卷的纸张。

**专业的折纸** 这种纸一面彩色，另一面白色，折纸爱好者常常称之为“kami”或“plain kami”。它折叠起来非常好，被认为是“特殊”的折纸。如果学生们折叠千纸鹤（参考“折叠并上色千纸鹤”一章）或其他传统的折纸模型，你可能希望学生们使用这种折纸。你可以在任何艺术品供应商店找到它。它通常只需要 5 到 6 美元就可以买到 100 张正方形的纸，有各种颜色，每边长 6 英寸。你也可以从“美国折纸协会”（Origami USA）的网站上订购它（“美国折纸协会”是一个全国性的非营利组织，如果你是折纸的倡导者，或是想成为一名折纸提倡者，你应该成为其会员，因为它会给你一本杂志，访问只有会员才可以访问的网站内容，能够参加折纸大会，并且在他们的网站上购买有 10% 折扣的物品。参见网址：<http://origamiusa.org>）。

**其他选择**（五个交叉四面体）你可以使用的最基本的纸张就是复印纸。可以将堆放在办公室中的那些  $8\frac{1}{2}$  英寸  $\times$  11 英寸的纸张用裁纸刀裁剪成正方形。这具有强大的功能，在课堂上使用的话也不会多余。用来折叠千纸鹤它是非常精



致的纸，折叠五个交叉四面体模型也非常好用，因为它比正常的折纸要重。此外，你还可以从任何办公用品商店或者你的学院或大学的打印中心得到各种颜色的复印纸。

事实上，方形纸和名片（可能甚至是纸条）的一个非常好的来源是你校园里的友好打印中心。虽然不是每个人的学校都有友好打印中心，但这值得你花时间来找找看。拜访他们，并告诉他们，你正在你的班级里做折纸。他们可能会很乐意将纸张裁剪成你需要的尺寸，或者给你那些废弃的名片，或者他们手边就正好有长长的纸带。

### 其他资料

在每章的学习，我都试着提供关于材料的参考信息，以及在哪里可以了解到更多的信息。

由于人们对折纸数学的兴趣不断增加，现在市面上已经有一些可用的书，专门介绍这一主题的某些方面。此外，有一些书中有专门的折纸章节，其他书也是非常有用的。由于这些来源可能非常有价值，这取决于你对折纸数学的特定兴趣，它们值得一提。

**David Cox** 的《伽罗瓦理论》[Cox04]。这本书是极好的，因为 David Cox 是一个优秀的作家。第 10 章是专门谈几何结构，这一章的第 3 部分是关于折纸的。这可能是一个代数方面、伽罗瓦理论方法在折纸几何结构方面的最好阐述。老师如果对于在一个高等几何班级上使用“抛物线折叠”“折纸能将一个角三等分吗？”和“解三次方程”的章节感兴趣，那么他应该看看这本书。

**Erik Demaine** 和 **Joseph O'Rourke** 的《几何折叠算法：联系、折纸、多面体》[Dem07]。这是对计算折纸领域感兴趣的人的一本必读书，读者可以从书中找到任何棘手或者不那么棘手的折叠问题的答案。如标题所示，作者研究了折叠和展开（可以认为是一维折叠）、纸张和多面体之间的联系。对于这为什么是理论计算机科学中的一个积极研究领域感到困惑的人应该看看这本书，你会看到机器人应用、蛋白质折叠和许许多多其他东西。在这本书中展示的很多数学是与本书中展示的数学一致的。

**Robert Geretschläger** 的《几何折纸》[Ger08]。本书重点介绍折纸几何结构，给人一种非常公理性的综合方法。喜欢几何和“抛物线折叠”“折纸能将一个角三等分吗？”章节的人将会非常喜欢 Geretschläger 的书。

**Kazuo Haga** 的《折纸：通过折纸的数学探索》[Haga08]。这本书是 Haga 的日文作品的英文译著，使用了非常简单的几何折叠问题，使学生们沉浸在数学发现的过程中。Haga 关于几何折纸的办法是相当独特的，你可以从“Haga 折



纸”一章中好好感受一下。如果你喜欢那个的话，你肯定该买这本书。

《折纸<sup>3</sup>》[Hull02-2]、《折纸<sup>4</sup>》[Lang09]和《折纸<sup>5</sup>》[Wang11]。这三本书是“折纸科学、数学和教育”（简称 OSME）的第三、第四和第五届国际会议记录。前两届大会分别在意大利（1989年）和日本（1994年）举行，但这些会议记录都已经是绝版而且很难找到的。其他的会议记录仍然在印，记录下科学、数学和教育领域对折纸研究的最新动态。

我作为其中一卷书的编辑，虽然会有失偏颇，但我可以很自信地说，不管你喜欢什么样的折纸，你都会在这些书的很多文章之中发现极大的兴趣。如果你希望你的学生也能够看到当前的折纸研究是怎样的，一定要确保你们学校的图书馆有这些书。

**Robert Lang** 的《折纸设计的秘密：古老艺术的数学方法》（第2版）[Lang11]。Robert Lang 是复杂的艺术折纸模型的优秀创造者之一，这本书是他的代表作。它详细描述了 Robert Lang 的 Treemaker（造树算法）<sup>⊖</sup>，以及其他折纸设计技巧。虽然本书中没有章节直接与折纸模型设计相关（也就是说，试图回答这个问题，即“如果不进行任何裁剪，你如何用一张正方形的纸折叠一个昆虫？”），现代的折纸爱好者采用的技巧基本上是在遵循折纸的数学原理（例如，源自“探秘平顶点折叠”一章的 Maekawa 定理和 Kawasaki 定理的相关内容）。对折纸着迷的学生看到这本书将爱不释手。这是该领域学生项目的重要资料。

**Peter Hilton, Derek Holton 和 Jean Pedersen** 的《数学思考：在一个有许多镜子的房间里》[Hil97]。这本书（被收入 Springer 的数学教科书系列）中有一章名为“折纸与数论”，共有 57 页。它收集了 Peter Hilton 和 Jean Pedersen 关于如何将纸带折成多边形和多面体的数论研究的许多内容。这与“等分折叠：藤本近似”和“折叠成结”涉及的主题高度相关，尽管 Hilton 等人使用不同的方法，并在不同的方向使用了这份材料。如果这些活动打动你，你一定要好好看看这一章。

**Kunihiko Kasahara 和 Toshie Takahama** 的《折纸鉴赏家》[Kas87]。在众多出版的折纸指导书中，这本书是最数学化的（之前的简介部分有所提及）。它包括对许多几何模型的说明，例如多面体和螺旋外壳，无论是单张纸还是模块化。它还包含了 Maekawa 定理和 Kawasaki 定理，以及一些 Haga 折纸活动。虽然一些模型非常复杂，需要专业的折纸技巧，但其他模型都是令人惊讶得简单且优雅。这是一本充满瑰宝的书。

**George E. Martin** 的《几何构造》[Mar98]。在书的最后一章（共有 14 页）专门介绍了折纸的几何结构。Martin 的做法是纯粹的几何，与 Cox 的代数分析不

⊖ Treemaker, Lang 设计的一款软件。



同，因此这对那些希望了解更多折纸几何的老师而言，极具吸引力。Martin 只关注那些最尖端的单折纸操作——这在“解三次方程”一章中曾探讨过。但是，这是一个人想要进行角三等分和倍立方等构造时所需要的全部。Martin 还将此书与其他构造方法进行了对比，例如，使用一把有标记的尺子。

**John Montroll** 的《折纸多面体设计》[Mon09]。John Montroll 是折纸界的传奇人物。他是在折纸中达到复杂水平的第一人，我们今天会将其与复杂水平折纸联系在一起（参见他在 1979 年的书 [Mon79]）。他还对用单一、未经裁剪的正方形来折叠多面体形状很感兴趣，在这本书中，他提供了很多针对这些折叠项目的指导，并解释了它们背后的数学意义。通过这种方式，他展示了三角几何、平面几何和三维几何的一些很棒的应用，使那些受到激励的高中生也可以接触到数学。那些希望寻找有趣的方式来展示三角几何和几何是如何用于折纸中的老师肯定会喜欢这本书。

**Joseph O'Rourke** 的《如何折叠：联系、折纸和多面体的数学》[ORo11]。正如标题所暗示的，这本书实际上与 Demaine 和 O'Rourke 的书相似 [Dem07]，但同时，它又是大不相同的。O'Rourke 的《如何折叠》一书的范围更小一些，适合高中或大学学生来学习（而 [Dem07] 更倾向于研究专著）。这本书包含了许多项目，有清晰的解释，将是《折纸设计的秘密》一书的好搭档。

**Ivars Peterson** 的《无限片段》[Pet01]。这是一个面向大众的流行数学书，有一个章节专门讲折纸，被称为“折飞机”，共有 22 页。虽然不是一个数学文本，它确实给平面折纸折痕图、Maekawa 定理、Robert Lang 的造树算法，以及折纸镶嵌提供了很好的概述。特别值得一提的是，它包括 Chris Palmer 的复杂折叠镶嵌中的一些精彩照片。如果你觉得“折叠方形旋转”一章很激动人心，那么一定要看看这本书。

**T. Sundra Row** 的《折纸中的几何练习》[Row66]。这本书是一本经典之作。T. Sundra Row 是一位印度的数学老师，19 世纪末，他写了这本关于基础几何构造的书，可以通过折纸来加以实现。这本书吸引了 Felix Klein 的注意，他在一些出版物中提及了它，此后西方出版商开始在全球各地出版这本书。最新的版本是 Dover 出版社出版的，在大多数图书馆都会很容易找到这本书。仔细阅读这本书后，你可能会怀疑 Sundra Row 是否知道折纸可以做三等分角之类的事情（这本书中没有给出这方面的方法，但是 Sundra Row 确实讨论过折纸如何与求解某些种类的三次方程有关）。尽管如此，这是用纸张折叠各种多边形等形状的很棒的方法来源。虽然这本书是以一种非常正式的风格写在一百多年前，但其构造方法很简单，可以很容易地适用于现代几何班级（适用于大学和高中）。



## 致 谢

本书的出版得到了各方支持。首先，也是最重要的，是我在莫瑞麦克学院获得的保罗·穆雷奖金 (Paul E. Murray Fellowship)，它资助了本书第1版的诞生。如果没有穆雷家族的慷慨解囊，这个项目可能永远都不会起步。总的来说，莫瑞麦克学院和汉普郡 (Hampshire) 学院的数学暑期研究为我提供了不可思议的支持力度和非常棒的教学环境，让我得以在此开展研究工作，并自由自在、创造性地向学生教授折纸数学。

在创作本书的过程中，我很幸运地得到了一大帮朋友的鼎力相助和投入。与这些折纸界、数学界朋友探讨并得到他们非常珍贵的反馈，其中包括：Roger Alperin, Sarahmarie Belcastro, Ethan Berkove, Vera Cherepinsky, David Cox, Erik Demaine 和 Marty Demaine, Koshiro Hatori, Miyuki Kawamura, David Kelly, Jason Ku, Robert Lang, Jeannine Mosely, James Tanton, Tamara Veenstra 和 Carolyn Yackel 等人。

我很幸运地得到许多 NExT 项目研究员的帮助，他们在 2005 年春季和秋季学期的数学课上对这些课程讲义进行了初步测试。NExT 项目源自“新的教学经验”的缩写 (New Experiences in Teaching, NExT)，是美国数学协会 (Mathematical Association of America) 的一个奖励项目，旨在帮助新教授成为更好的教师和学者，而不会在数学学术界中感到迷茫或不知所措。他们的集体智慧和教学经验对这本书产生了积极的直接影响。不仅如此，通过 NExT 项目，本书的声名远播到更广泛的数学圈内，许多教师、研究生、大学生甚至高中生都纷纷希望参与测试。

我要特别感谢 Cristina Bacuta, Don Barkauskas, Mark Bollman, David Brenner, Kyle Calderhead, Scott Dillery, Melissa Giardina, Susan Goldstine, Aparna Higgins, Barbara Kaiser, Michael Lang, Chloe Mandell, Hope McIlwain, Blake Mellor, Andrew Miller, Cheryl Chute Miller, Donna Molinek, George Moss, Katarzyna Potocka, Jason Ribando, Liz Robertson, Cameron Sawyer, Amanda Serenevy, Brigitte Servatius (和她的学生们: Roger Burns, Onalie Sotak, John Temple), Linda Van Niewaal, Kathryn Weld, Jennifer Wilson 和 Yi Zhou 等人。

我还要感谢班上的所有学生。折纸数学这门课已经被罗得岛大学、莫瑞麦克学院、汉普郡学院数学暑期研究班、辛辛那提大学和西新英格兰大学列入课程范围，我在这里教授这门课。我想，很多人可能还没有意识到，如果你是一个很在